劣モジュラ構造と離散最適化

藤重 悟

数理解析研究所

(定年退職記念講演，2012 年 3 月 13 日)

マトロイドとの出会い (1974/75)

E: 非空な有限集合

$\mathcal{I} \subseteq 2^E$

$(E, \mathcal{I})$: **マトロイド** ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ \ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

マトロイドとの出会い (1974/75)

E: 非空な有限集合

$\mathcal{I} \subseteq 2^E$

$(E, \mathcal{I})$: **マトロイド** ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

マトロイドを定義する同値な概念

基族，サーキット族，階数関数，閉包関数，$\cdots$

マトロイドとの出会い (1974/75)

E: 非空な有限集合

$\mathcal{I} \subseteq 2^E$

$(E,\mathcal{I})$: **マトロイド** ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ \ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

マトロイドを定義する同値な概念

基族，サーキット族，階数関数，閉包関数，$\cdots$

双対性 双対マトロイド

マトロイドとの出会い (1974/75)

E: 非空な有限集合

$\mathcal{I} \subseteq 2^E$

$(E,\mathcal{I})$: **マトロイド** ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ \ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

マトロイドを定義する同値な概念

基族，サーキット族，階数関数，閉包関数，$\cdots$

双対性 双対マトロイド

マトロイドの変換 簡約, 縮約, 合併マトロイド, ネットワーク変換, ...

マトロイドとの出会い (1974/75)

E: 非空な有限集合

$\mathcal{I} \subseteq 2^E$

$(E, \mathcal{I})$: **マトロイド** ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ \ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

マトロイドを定義する同値な概念

基族，サーキット族，階数関数，閉包関数，$\cdots$

双対性 双対マトロイド

マトロイドの変換 簡約, 縮約, 合併マトロイド, ネットワーク変換, ...

二つのマトロイドの交わり定理 (最大・最小定理)

効率的なアルゴリズムに支えられた体系

$\rho : 2^E \to \mathbf{Z}_+$

(E, ρ): **マトロイド** (ρ: 階数関数)

(ρ0) $\forall X \subseteq E : 0 \leq \rho(X) \leq |X|$

(ρ1) $X \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

(ρ2) $\forall X, Y \subseteq E : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$.

(劣モジュラ性)

$\longrightarrow$ 独立集合族

$$\mathcal{I} = \{X \mid X \subseteq E,\ \rho(X) = |X|\}$$

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \subseteq I_2 \in \mathcal{I} \Longrightarrow I_1 \in \mathcal{I}$.

(I2) $I_1, I_2 \in \mathcal{I},\ |I_1| < |I_2| \Longrightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

$\longrightarrow$ 階数関数

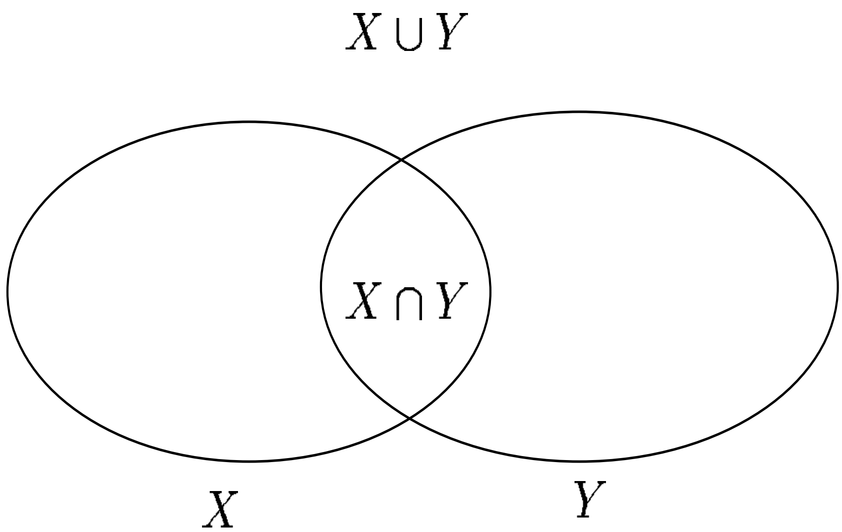
$$\rho(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X,\ Y \in \mathcal{I}\} \qquad (\forall X \subseteq E)$$

E: 有限集合

集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R} \quad (f(\emptyset) = 0)$

＜劣モジュラ性＞

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \qquad (\forall X, Y \subseteq E)$$



E: 有限集合

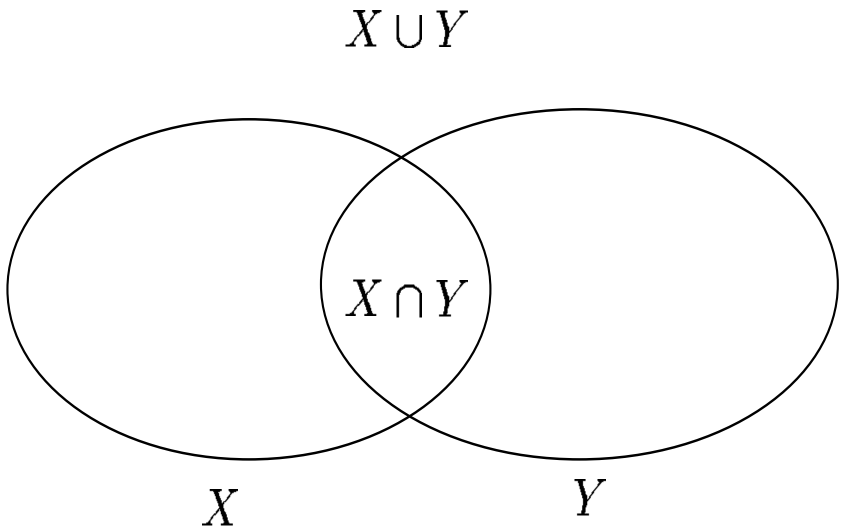
集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R} \quad (f(\emptyset) = 0)$

＜劣モジュラ性＞

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \qquad (\forall X,\, Y \subseteq E)$$

(1) $\{f(X) - f(X \cap Y)\} + \{f(Y) - f(X \cap Y)\}$
$\geq f(X \cup Y) - f(X \cap Y)$

(2) $f(X) - f(X \cap Y) \geq f(X \cup Y) - f(Y)$



劣モジュラ関数の例:

グラフ $G = (V, E)$ **の階数関数** $f : 2^E \to \mathbf{Z}_+$

$\forall X \subseteq E : f(X) = (X$ で張られる点数$) - ($連結成分の個数$)$

行列の階数関数

M: $m \times n$ **行列** (matrix)

$E = \{1, 2, \cdots, n\}$: M の**列の集合**

$\forall X \subseteq E :\ f(X) = M$ の X に対応する列からなる**部分行列の階数**

ネットワークのカット関数

$G = (V, A)$: **(有向) グラフ**

$c(a)$: **枝** $a \in A$ **の容量** ≥ 0

$\forall X \subseteq V$: $f(X) = X$ の中から**出る枝の容量の総和**

多端子ネットワークの流量関数

入り口１個で，**複数の出口**がある容量付きネットワークにおいて，

T: 出口全体の集合

$\forall X \subseteq T$: $f(X) =$ **出口** X への**流出量総和の最大値**

エントロピー関数

$x_1, x_2, \cdots, x_n$: 1 から N の整数値をとる確率変数

$E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

$\forall X \subseteq E$**:** $f(X) =$ **(**X **の (シャノンの意味での) エントロピー)**

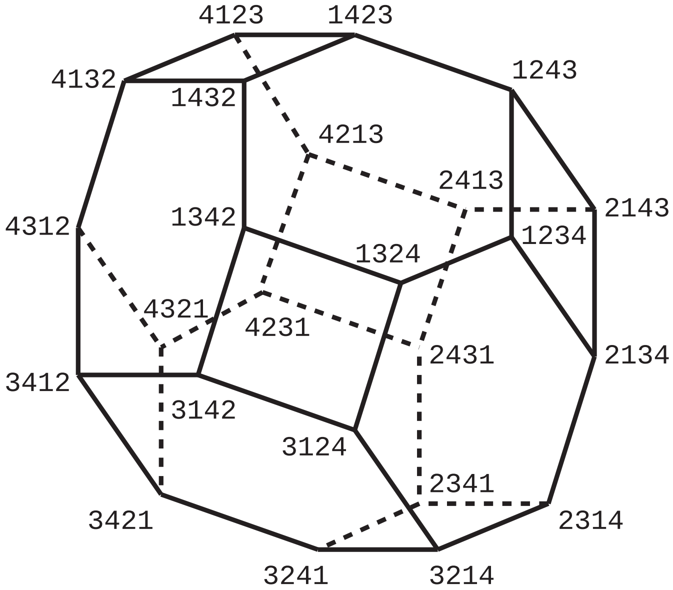
凸ゲーム

E: プレイヤーの集合

$\forall X \subseteq E$**:** $f(X) =$ **(**X **が協力する場合に** X **全体でかかる費用)**

置換多面体 (permutahedron)

$E = \{1, 2, \cdots, n\}$ の**置換** $\sigma : E \to E$ による $\mathbf{R}^E$ 中の点 $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ の集合の凸包を**置換多面体** P_n.



$$g(k) = \sum_{i=1}^{k} (n - i + 1) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$f(X) = g(|X|) \qquad (X \subseteq E)$$

$$P_n = \{x \in \mathbf{R}^E \mid \forall X \subset E:\ x(X) \leq f(X),\ x(E) = f(E)\}$$

$$x(X) = \sum_{e \in X} x(e) \qquad (X \subseteq E)$$

ポリマトロイド (Edmonds (1969*))

E：非空な有限集合

$\rho(: 2^E \to \mathbf{R}_+)$：階数関数

ポリマトロイド (E, ρ)

($\overline{\rho 0}$**)** $\quad \rho(\emptyset) = 0$

($\overline{\rho 1}$**)** $\quad X \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

($\overline{\rho 2}$**)** $\quad \forall X, Y \subseteq E : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$

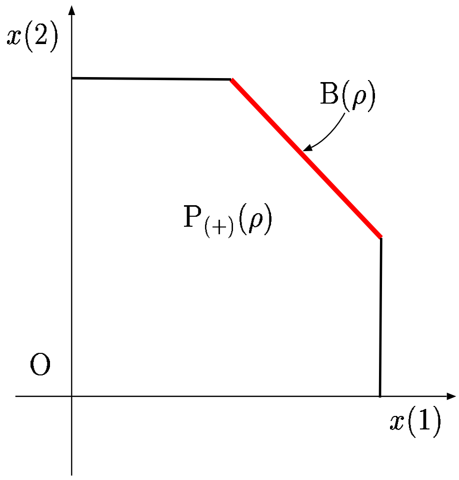
独立多面体

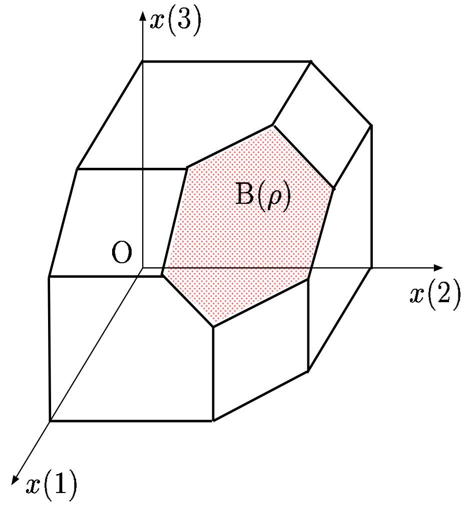
$$\mathrm{P}_{(+)}(\rho) = \{x \mid x \in \mathbf{R}_+^E,\ \forall X \subseteq E : x(X) \leq \rho(X)\}$$

$$(x(X) = \sum_{e \in X} x(e))$$

基多面体

$$\mathrm{B}(\rho) = \{x \mid x \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho),\ x(E) = \rho(E)\}$$





ポリマトロイドから劣(優) モジュラ・システムへ

ポリマトロイド (E, ρ)

$(\overline{\rho 0})$ $\quad \rho(\emptyset) = 0$

$(\overline{\rho 1})$ $\quad X \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

$(\overline{\rho 2})$ $\quad \forall X, Y \subseteq E : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$

E 上の**劣モジュラ・システム** $(\mathcal{D}, f)$

$\mathcal{D} \subseteq 2^E$：分配束，$\emptyset, E \in \mathcal{D}$，$f(\emptyset) = 0$

$f(: \mathcal{D} \to \mathbf{R})$：劣モジュラ関数

$$\forall X, Y \in \mathcal{D} : f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

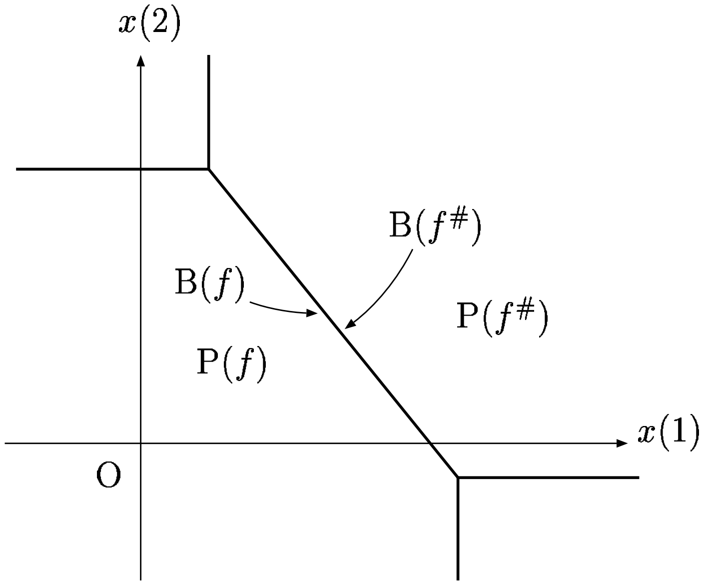
$\mathrm{P}(f) = \{x \in \mathbf{R}^E \mid \forall X \in \mathcal{D} : x(X) \leq f(X)\}$ **(劣モジュラ多面体)**

$\mathrm{B}(f) = \{x \mid x \in \mathrm{P}(f),\ x(E) = f(E)\}$ **(基多面体)**

$$\bar{\mathcal{D}} = \{E \setminus X \mid X \in \mathcal{D}\}$$

$$f^{\#}(E \setminus X) = f(E) - f(X) \qquad (X \in \mathcal{D})$$

$(\bar{\mathcal{D}}, f^{\#})$：劣モジュラ・システム $(\mathcal{D}, f)$ に双対な優モジュラ・システム



$$\mathrm{B}(f) = \mathrm{B}(f^{\#})$$

$\mathcal{D} = 2^E$

最大重み基問題

重み関数 $w : E \to [0, 1]$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ \text{subject to} & x \in \mathrm{B}(f) \end{array}$$

$\mathcal{D} = 2^E$

最大重み基問題

重み関数 $w : E \to [0, 1]$

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ \text{subject to} & x \in \mathrm{B}(f) \end{array}$$

E の順列 $\sigma = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ に対して,

$\Delta(\sigma)$: $1 \geq w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n) \geq 0$

$S_i = \{e_1, \cdots, e_i\} \quad (i = 1, \cdots, n)$

$S_0 = \emptyset \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n = E$

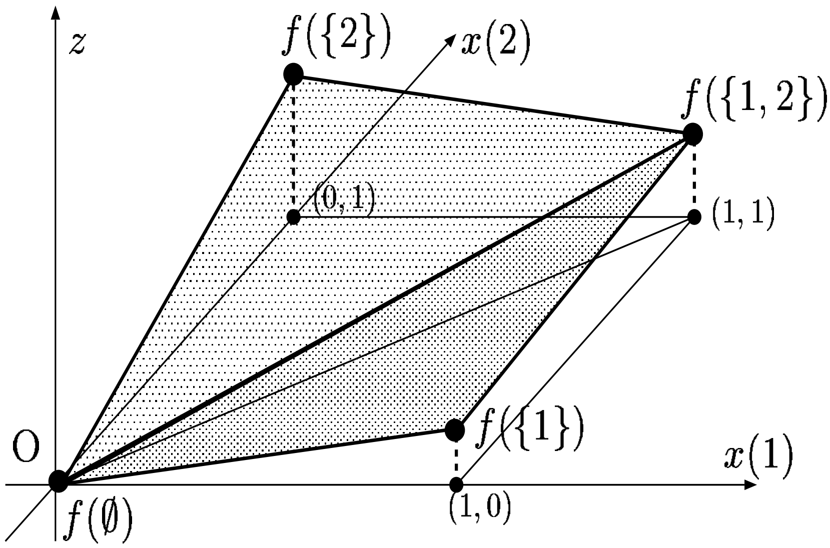
とおいて,

$b^*(e_i) = f(S_i) - f(S_{i-1}) \quad (i = 1, \cdots, n)$

b^*: 最大重み基 ($\longleftarrow$ 貪欲アルゴリズム (Edmonds))

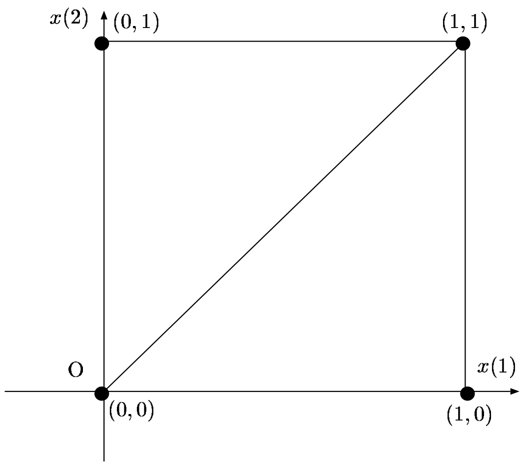
$$\hat{f}(w) = \text{目的関数の最大値} \quad (\mathrm{B}(f) \text{ の支持関数の } [0,1]^E \text{ への制限})$$

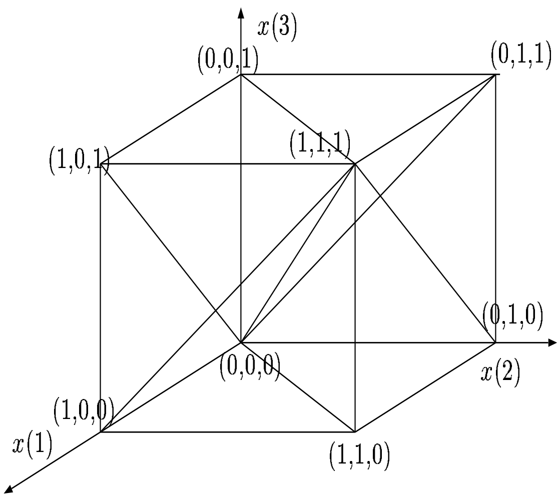
(*) $\hat{f}$ は各単体 $\Delta(\sigma)$ 上で線形な凸関数である.



$$\Delta(\sigma): \quad 1 \geq x(e_1) \geq x(e_2) \geq \cdots \geq x(e_n) \geq 0$$

$n!$ 個の順列 σ に対応する単体 $\Delta(\sigma)$ の集まりは，単位立方体 $[0,1]^E$ の単体分割を与える．





任意の集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ に対して，その関数をすべての単体 $\Delta(\sigma)$ 上で線形補間して得られる $[0,1]^E$ 上の関数 $\hat{f}$ を f の **Lovász 拡張**という．

定理 (Lovász (1982))：任意の集合関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ が劣モジュラ関数であるための必要十分条件は，その Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数であることである.

劣モジュラ性・劣モジュラ関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$

$\Updownarrow$

Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数 (各単体 $\Delta(\sigma)$ 上で線形な凸関数)

$\Updownarrow$

基多面体 $\mathrm{B}(f)$ (辺ベクトルが $(0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0, \mp 1, 0, \cdots, 0)$)

$\Updownarrow$

貪欲アルゴリズムが正しい (重みの大小関係だけで最適解が決まる)

劣モジュラ性・劣モジュラ関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$

$\Updownarrow$

Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数 (各単体 $\Delta(\sigma)$ 上で線形な凸関数)

$\Updownarrow$

基多面体 $\mathrm{B}(f)$ (辺ベクトルが $(0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0, \mp 1, 0, \cdots, 0)$)

$\Updownarrow$

貪欲アルゴリズムが正しい (重みの大小関係だけで最適解が決まる)

劣モジュラ性・劣モジュラ関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$

$\Updownarrow$

Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数 (各単体 $\Delta(\sigma)$ 上で線形な凸関数)

$\Updownarrow$

基多面体 $\mathrm{B}(f)$ (辺ベクトルが $(0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0, \mp 1, 0, \cdots, 0)$)

$\Updownarrow$

貪欲アルゴリズムが正しい (重みの大小関係だけで最適解が決まる)

劣モジュラ関数 $f : 2^E \to \mathbf{R}$ 基多面体 $\mathrm{B}(f)$,

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数 貪欲アルゴリズム

$\Downarrow$ $\Downarrow$

整劣モジュラ関数 付値マトロイド

(Favati-Tardella (1990)) (Dress-Wenzel (1990, 1992))

$\Updownarrow$ (凸共役) $\Downarrow$

L 凸関数, L$^\natural$ 凸関数 $\longleftrightarrow$ M 凸関数, M$^\natural$ 凸関数

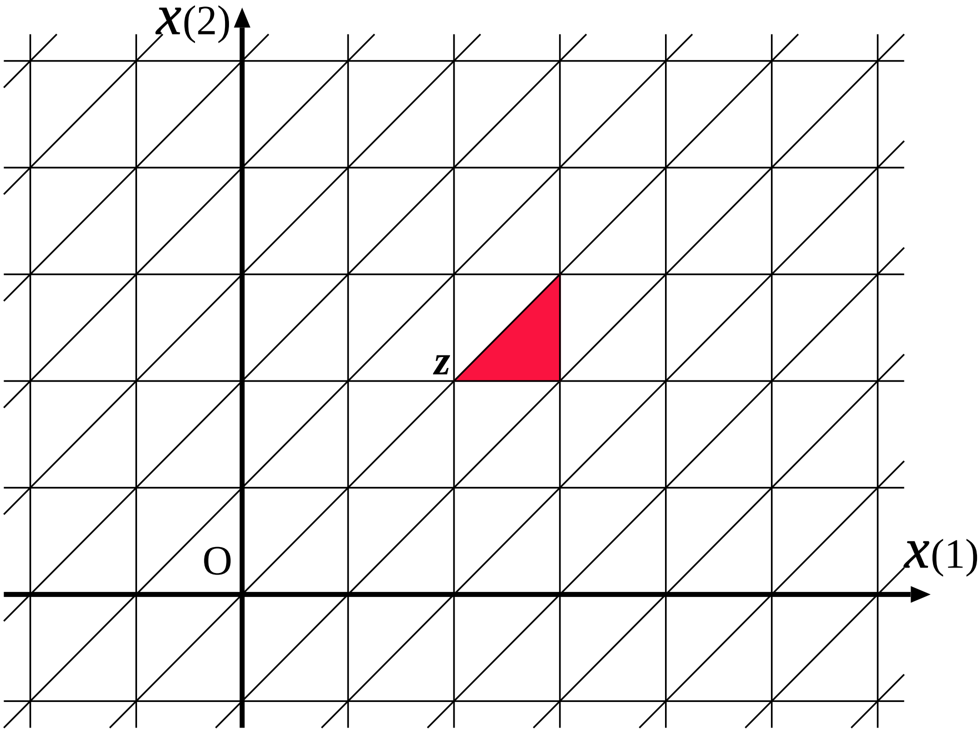
(Murota (1998), F-Murota(2000)) (Murota(1996), Murota-Shioura (1999))

離散凸解析 (室田一雄)

$f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R}$

Coxeter-Freudenthal 単体分割上の凸関数

$\longrightarrow$ L$^\natural$ 凸関数　(Murota (1996), Favati-Tardella (1990))



$$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \qquad (x,\ y \in \mathbf{Z}^E)$$

マトロイド最適化

マトロイド最適化

独立割当問題　(Lawler, Iri-Tomizawa (1974*))

$G = (V^+, V^-; A)$: 2部グラフ

$\mathbf{M}^+ = (V^+, \mathcal{I}^+)$, $\mathbf{M}^- = (V^-, \mathcal{I}^-)$: マトロイド

$w(: A \to \mathbf{R})$: 重み関数,　　k: 正整数

$\partial^+ M \in \mathcal{I}^+$ かつ $\partial^- M \in \mathcal{I}^-$ を満たす G のマッチング M を独立マッチングという. G の $|M| = k$ である独立マッチング M で，その重み

$$w(M) = \sum_{a \in M} w(a)$$

を最小にするものを見出せ.

($\longrightarrow$ primal アルゴリズム (1976*))

マトロイド最適化

独立割当問題 (Lawler, Iri-Tomizawa (1974*))

$G = (V^+, V^-; A)$: 2部グラフ

$\mathbf{M}^+ = (V^+, \mathcal{I}^+)$, $\mathbf{M}^- = (V^-, \mathcal{I}^-)$: マトロイド

$w(: A \to \mathbf{R})$: 重み関数,　　k: 正整数

$\partial^+ M \in \mathcal{I}^+$ かつ $\partial^- M \in \mathcal{I}^-$ を満たす G のマッチング M を独立マッチングという. G の $|M| = k$ である独立マッチング M で，その重み

$$w(M) = \sum_{a \in M} w(a)$$

を最小にするものを見出せ.

($\longrightarrow$ primal アルゴリズム (1976*))

独立連接問題 ((1976*), Iri (1978))

($\longrightarrow$ primal, prima-dual アルゴリズム (1976*))

ポリマトロイド (Edmonds (1969*))

E：非空な有限集合

$\rho(: 2^E \to \mathbf{R}_+)$：階数関数

ポリマトロイド (E, ρ)

($\overline{\rho 0}$) $\rho(\emptyset) = 0$

($\overline{\rho 1}$) $X \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

($\overline{\rho 2}$) $\forall X, Y \subseteq E : \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)$

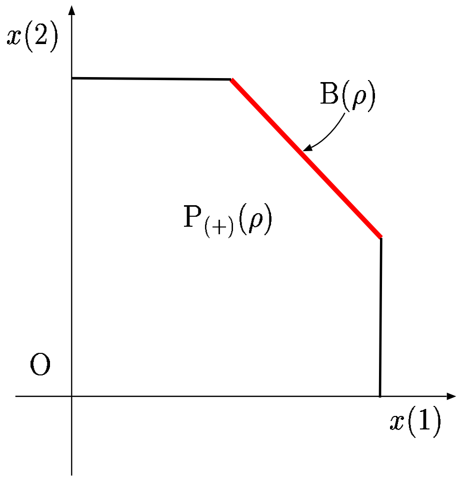
独立多面体

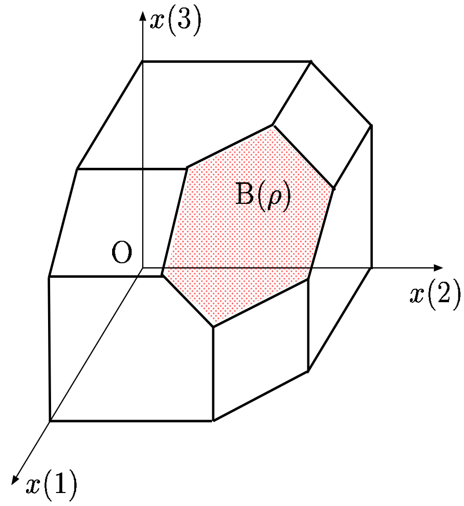
$$\mathrm{P}_{(+)}(\rho) = \{x \mid x \in \mathbf{R}_+^E,\ \forall X \subseteq E : x(X) \leq \rho(X)\}$$

$$(x(X) = \sum_{e \in X} x(e))$$

基多面体

$$\mathrm{B}(\rho) = \{x \mid x \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho),\ x(E) = \rho(E)\}$$





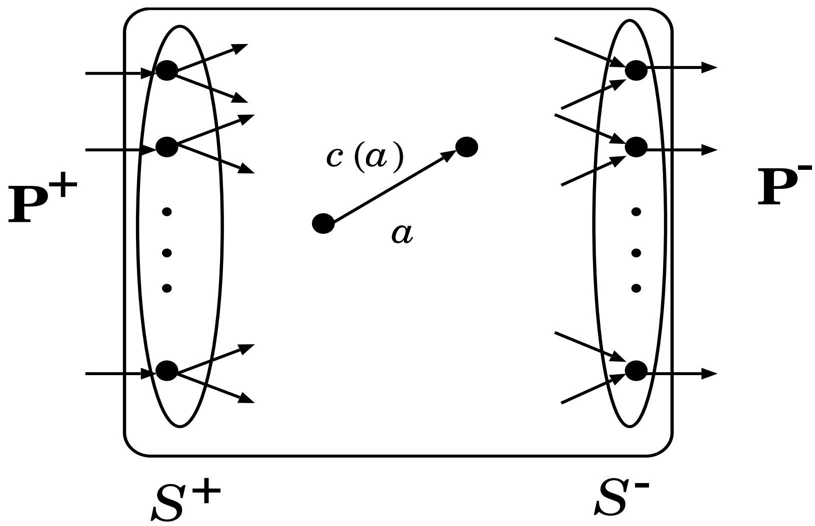
独立フロー問題 (1976*, 1978)

$G=(V,A;S^+,S^-)$: 複数個の入口 S^+ と出口 S^- をもつグラフ

$\mathbf{P}^+=(S^+,\rho^+)$, $\mathbf{P}^-=(S^-,\rho^-)$: ポリマトロイド

$c(: A\to\mathbf{R}_+)$: 容量関数

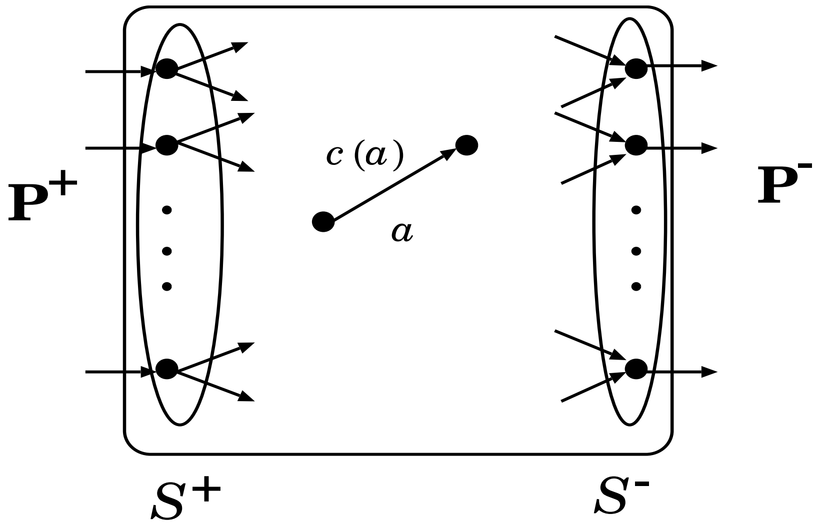
枝容量を満たし流量保存則を満たす，S^+ から S^- へのフロー $\varphi: A\to\mathbf{R}_+$ で，$\partial^+\varphi\in \mathrm{P}_{(+)}(\rho^+)$ かつ $\partial^-\varphi\in \mathrm{P}_{(+)}(\rho^-)$ であるものを，**独立フロー**という．



最大独立フロー：独立フロー φ で，その流量 $\partial^+\varphi(S^+)$ を最大にするものを見出せ．

定理 (最大・最小定理＋整数性)：

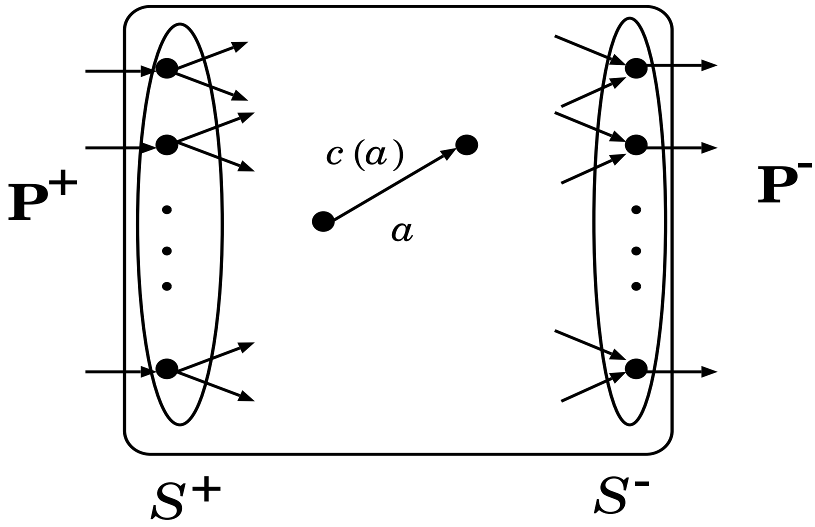
$$\max\{\partial^+\varphi(S^+) \mid \varphi:\ \text{独立フロー}\}$$
$$= \min\{\rho^+(S^+ \setminus X) + \sum_{a\in\Delta^+X} c(a) + \rho^-(S^- \cap X) \mid X \subseteq V\}$$



定理 (1978*)：入口 S^+ で $\partial^+\varphi \in \mathrm{P}((\rho^+)^\#)$，出口 S^- で $\partial^-\varphi \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho^-)$，容量条件を満たすフローが存在するための必要十分条件：

$$\forall X \subseteq V: \quad (\rho^+)^\#(S^+ \cap X) \leq \sum_{a \in \Delta^+ X} c(a) + \rho^-(S^- \cap X)$$

$$((\rho^+)^\#(X) = \rho^+(S^+) - \rho^+(S^+ \setminus X) \quad (X \subseteq S^+)) \quad (+\text{整数性})$$



定理 (1978*)：入口 S^+ で $\partial^+\varphi \in \mathrm{P}((\rho^+)^\#)$，出口 S^- で $\partial^-\varphi \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho^-)$，容量条件を満たすフローが存在するための必要十分条件：

$$\forall X \subseteq V: \ (\rho^+)^\#(S^+ \cap X) \leq \sum_{a \in \Delta^+ X} c(a) + \rho^-(S^- \cap X)$$

$$((\rho^+)^\#(X) = \rho^+(S^+) - \rho^+(S^+ \setminus X) \quad (X \subseteq S^+)) \quad (\text{+整数性})$$

定理 (離散分離定理) (Frank (1982))： 劣モジュラ関数 $f: 2^E \to \mathbf{Z}$ と優モジュラ関数 $g: 2^E \to \mathbf{Z}$ に対して，

$$\exists x \in \mathbf{Z}^E, \forall X \in 2^E: \ g(X) \leq x(X) \leq f(X)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall X \in 2^E: \ g(X) \leq f(X)$$

$\gamma(: A \to \mathbf{R})$: コスト関数

q: 非負実数

最小費用独立フロー：流量 q をもつ独立フロー φ で，そのコスト

$$\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$$

を最小にするものを見出せ.

($\longrightarrow$ primal アルゴリズム，primal-dual アルゴリズム)

独立ベクトル $x \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho)$ に対して,

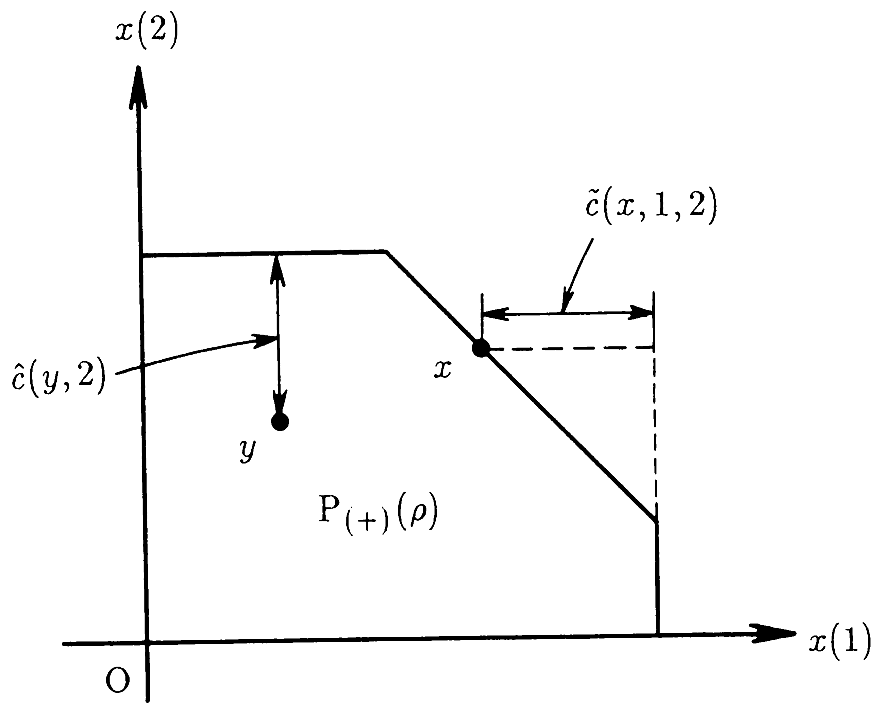
飽和容量: $\hat{\mathrm{c}}(x, e) = \max\{\alpha \in \mathbf{R} \mid x + \alpha\chi_e \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho)\} \quad (e \in E)$

飽和集合: $\mathrm{sat}(x) = \{e \in E \mid \hat{\mathrm{c}}(x, e) = 0\}$

独立ベクトル $x \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho)$ と $e \in \mathrm{sat}(x)$ に対して,

交換容量: $\tilde{\mathrm{c}}(x, e, e') = \max\{\alpha \in \mathbf{R} \mid x + \alpha(\chi_e - \chi_{e'}) \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho)\}$ $(e' \in E)$

従属集合: $\mathrm{dep}(x, e) = \{e' \in E \mid \tilde{\mathrm{c}}(x, e, e') > 0\}$



タイト集合族 $\mathcal{F}(x) = \{X \mid X \subseteq E,\ x(X) = \rho(X)\}$: 分配束

$\mathrm{sat}(x)$: 分配束 $\mathcal{F}(x)$ の最大元

$\mathrm{dep}(x,e)$: 分配束 $\{X \mid e \in X \in \mathcal{F}(x)\}$ の最小元

$$\hat{\mathrm{c}}(x,e) = \min\{\rho(X) - x(X) \mid e \in X \subseteq E\}$$

$$\tilde{\mathrm{c}}(x,e,e') = \min\{\rho(X) - x(X) \mid e \in X \subseteq E,\ e' \notin X\}$$
$$(e \in \mathrm{sat}(x),\ e' \in \mathrm{dep}(x,e))$$

$\longrightarrow$ **劣モジュラ関数最小化**

交差劣モジュラ関数と劣モジュラ・フロー (Edmonds-Giles (1977))

$G = (V, A)$: グラフ

$f : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$: 交差集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ 上の交差劣モジュラ関数

$X,\ Y \in \mathcal{F}$ が交差する:

$$X \cap Y,\ \ X \cap \bar{Y},\ \ \bar{X} \cap Y,\ \ \bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$$

交差集合族 $\mathcal{F}$: $X,\ Y \in \mathcal{F}$ が交差する $\Longrightarrow$ $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{F}$

交差劣モジュラ関数: 交差する $X,\ Y \in \mathcal{F}$ に対して,

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

交差劣モジュラ関数と劣モジュラ・フロー (Edmonds-Giles (1977))

$G = (V, A)$: グラフ

$f : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$: 交差集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ 上の交差劣モジュラ関数

$\underline{c} : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\bar{c} : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: 容量下限，容量上限

$\gamma : A \to \mathbf{R}$: 費用関数

$\mathcal{N} = (G, \underline{c}, \bar{c}, \gamma, f)$ 中の**劣モジュラ・フロー** $\varphi : A \to \mathbf{R}$:

$$\forall a \in A : \underline{c}(a) \leq \varphi(a) \leq \bar{c}(a)$$

$$\forall X \in \mathcal{F} : \sum_{a \in \Delta^+ X} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- X} \varphi(a) \leq f(X)$$

費用： $\displaystyle\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$

交差劣モジュラ関数と劣モジュラ・フロー (Edmonds-Giles (1977))

$\mathcal{N} = (G, \underline{c}, \bar{c}, \gamma, f)$ 中の**劣モジュラ・フロー** $\varphi : A \to \mathbf{R}$:

$$\forall a \in A : \underline{c}(a) \leq \varphi(a) \leq \bar{c}(a)$$

$$\forall X \in \mathcal{F} : \sum_{a \in \Delta^+ X} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- X} \varphi(a) \leq f(X)$$

費用： $\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) \qquad (v \in V)$$

$$\forall X \in \mathcal{F} : \partial\varphi(X) \leq f(X)$$

$$\partial\varphi \in \mathrm{P}(f) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^V,\ \forall X \in \mathcal{F} : x(X) \leq f(X)\}$$

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a\in\delta^+ v}\varphi(a) - \sum_{a\in\delta^- v}\varphi(a)$$

$$\mathrm{P}(f) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^V,\ \forall X \in \mathcal{F} : x(X) \le f(X)\}$$

$$\partial\varphi(V) = 0$$

$$\partial\varphi \in \mathrm{P}(f) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^V,\ \forall X \in \mathcal{F} : x(X) \le f(X)\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\partial\varphi \in \mathrm{P}'(f) = \{x \mid x \in \mathrm{P}(f),\ x(V) = 0\}$$

$$\partial\varphi \in \mathrm{P}'(f) = \{x \mid x \in \mathrm{P}(f),\ x(V) = 0\}$$

定理 (1981*)：$\mathrm{P}'(f) \neq \emptyset$ ならば，$\mathrm{P}'(f)$ は，V 上のある劣モジュラ・システム $(\mathcal{D}, f')$ に関する基多面体 $\mathrm{B}(f')$ である.

さらに, $\partial\Phi = \{\partial\varphi \mid \forall a \in A : \underline{c}(a) \leq \varphi(a) \leq \bar{c}(a)\}$ も基多面体である.

(実行可能フローの存在 $\longleftrightarrow$ 二つの基多面体の交わりの非空性)

$$\mathrm{B}(f') \cap \partial\Phi \neq \emptyset$$

新フロー (neoflow) (1987)

(ポリマトロイド $\longrightarrow$ 劣モジュラ・システム)

独立フロー (1978)

劣モジュラ・フロー (Edmonds-Giles (1977))

ポリマトロイド・フロー (Hassin (1978*, 1982), Lawler-Martel (1982))

各点 $v \in V$ において,

$\mathbf{P}_v^-$: 入る枝集合 $\delta^- v$ 上のポリマトロイド

$\mathbf{P}_v^+$: 出る枝集合 $\delta^+ v$ 上のポリマトロイド

が与えられ，フロー $\varphi : A \to \mathbf{R}_+$ が次式を満たす.

$$\varphi^{\delta^- v} \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho_v^-), \quad \varphi^{\delta^+ v} \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho_v^+), \quad \varphi(\delta^- v) = \varphi(\delta^+ v)$$

新フロー (neoflow) (1987)

(ポリマトロイド $\longrightarrow$ 劣モジュラ・システム)

独立フロー (1978)

劣モジュラ・フロー (Edmonds-Giles (1977))

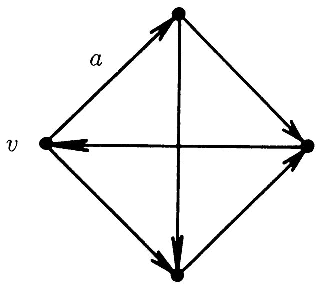
ポリマトロイド・フロー (Hassin (1978*, 1982), Lawler-Martel (1982))

ポリリンキング・フロー (Goemans-Iwata-Zenklusen (2011), F (2011*))

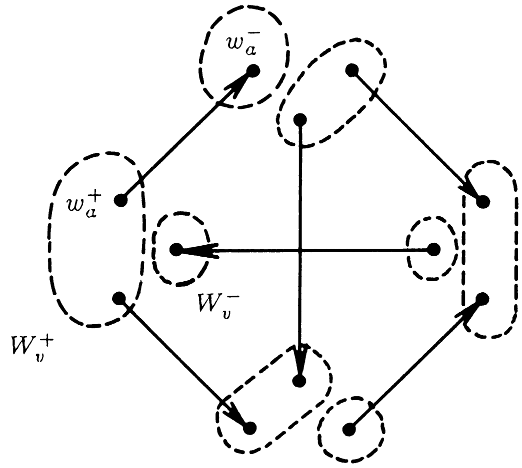
各点 $v \in V$ に $\delta^- v$ から $\delta^+ v$ へのポリリンキング・システム $\mathbf{L}_v$ が与えられ,

$\varphi^{\delta^- v}$ と $\varphi^{\delta^+ v}$ が $\mathbf{L}_v$ のリンクされたベクトル対である.

$((-\varphi^{\delta^- v}) \oplus \varphi^{\delta^+ v}$ が $\mathbf{L}_v$ に対応する基多面体の基である.)



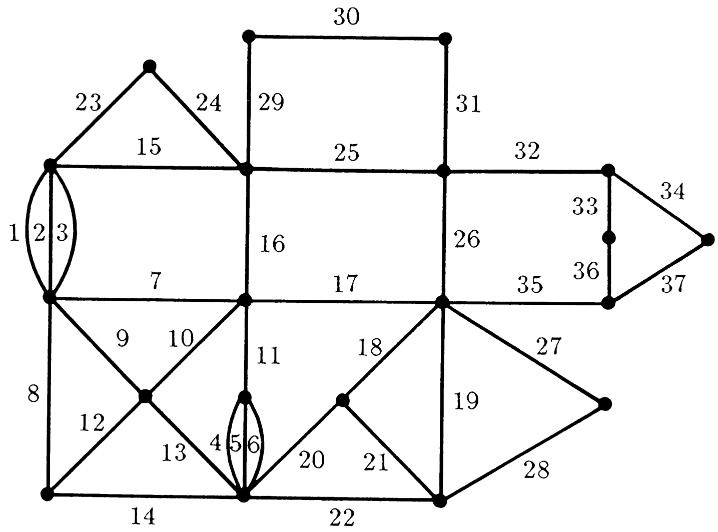
G

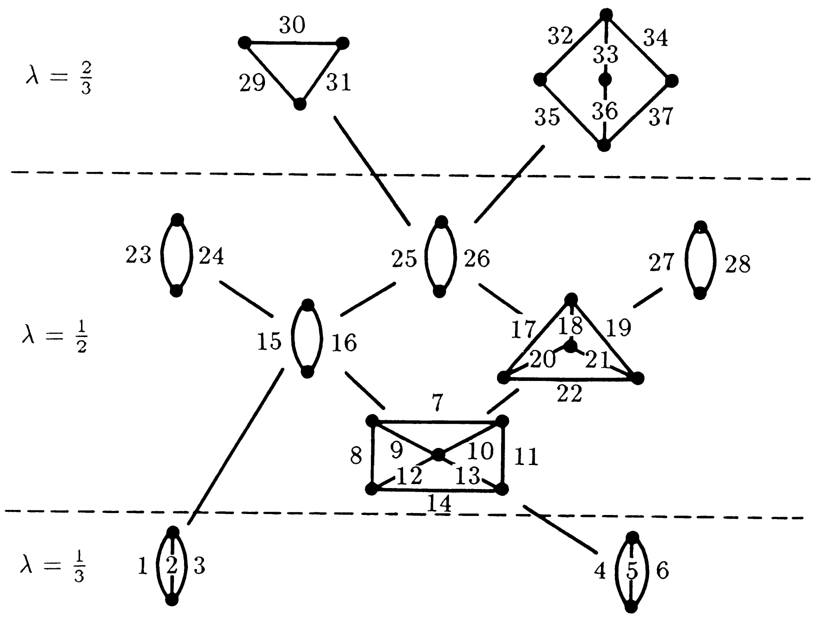


G'

基本分割

グラフ・マトロイドの基本分割 (冨澤・Narayanan (1974*))





Minimize $\rho(X) - \lambda|X|$ s.t. $X \subseteq E$

マトロイド $\mathbf{M} = (E, \rho)$ (階数関数 ρ)

$\longrightarrow$ ポリマトロイド $\mathbf{P} = (E, \rho)$

その基 b の成分 $b(e)$ $(e \in E)$ を非減少順 $b(e_1) \leq \cdots \leq b(e_n)$ に並べて

$$T(b) = (b(e_1), \cdots, b(e_n))$$

とする. $T(b)$ を辞書式に最大にする基 b^* を辞書式最適基という.

定理 (1978*)：辞書式最適基 b^* に対して，分配束

$$\mathcal{D}(b^*) = \{X \mid X \subseteq E,\ b^*(X) = \rho(X)\}$$

から定まる台集合 E の分割とその上の半順序構造が，マトロイド $\mathbf{M}$ の基本分割を決める.

正の重み関数 $w : E \to \mathbf{R}_+$

$$T(b/w) = (b(e_1)/w(e_1), \cdots, b(e_n)/w(e_n)) \qquad \text{単調非減少順}$$

定理 (1978*, 1980)：

重み付きの辞書式最適基 b^*

$$\Updownarrow$$

分離凸 2 次目的関数 $\displaystyle\sum_{e \in E} b^2(e)/w(e)$ を最小にする基 b^*

正の重み関数 $w : E \to \mathbf{R}_+$

$$T(b/w) = (b(e_1)/w(e_1), \cdots, b(e_n)/w(e_n)) \qquad \text{単調非減少順}$$

定理 (1978*, 1980)：

重み付きの辞書式最適基 b^*

$$\Updownarrow$$

分離凸２次目的関数 $\displaystyle\sum_{e \in E} b^2(e)/w(e)$ を最小にする基 b^*

($\longrightarrow$ 資源配分問題＋劣モジュラ制約)

正の重み関数 $w : E \to \mathbf{R}_+$

$T(b/w) = (b(e_1)/w(e_1), \cdots, b(e_n)/w(e_n))$ 　　単調非減少順

定理 (1978*, 1980)：

重み付きの辞書式最適基 b^*

$\Updownarrow$

分離凸2次目的関数 $\sum_{e \in E} b^2(e)/w(e)$ を最小にする基 b^*

($\longrightarrow$ 資源配分問題＋劣モジュラ制約)

Minimize $\rho(X) + \lambda w(E \setminus X)$

基本分割の一般化

($\longrightarrow$ ポリマトロイドを一般の劣モジュラ・システム $(\mathcal{D}, f)$ へ)

($\longrightarrow$ 正重み関数をポリマトロイドへ (Iri (1984), Nakamura (1988)))

$\vdots$

$\vdots$

辞書式最適基 b^* と任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\min\{f(X) + \lambda w(E \setminus X) \mid X \subseteq E\}$$
$$= (b^* \wedge \lambda w)(E) = \max\{x(E) \mid x \leq \lambda w,\ x \in \mathrm{P}(f)\}$$

が成り立つ. また,

$$A_0 = \{e \mid b^*(e) \leq 0\}, \qquad A_- = \{e \mid b^*(e) < 0\}$$

は, 劣モジュラ関数 f の最小化元である.

辞書式最適基 b^* と任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\min\{f(X) + \lambda w(E \setminus X) \mid X \subseteq E\}$$
$$= (b^* \wedge \lambda w)(E) = \max\{x(E) \mid x \leq \lambda w,\ x \in \mathrm{P}(f)\}$$

が成り立つ. また,

$$A_0 = \{e \mid b^*(e) \leq 0\}, \qquad A_- = \{e \mid b^*(e) < 0\}$$

は, 劣モジュラ関数 f の最小化元である.

(劣モジュラ関数最小化 $\longleftarrow$ Wolfe の MNP アルゴリズム)

$$\min\{f(X) \mid X \subseteq E\} = \max\{x(E) \mid x \leq \mathbf{0},\ x \in \mathrm{P}(f)\}$$

劣モジュラ解析 (Submodular Analysis)

劣モジュラ関数は，凸関数か？ 凹関数か？

劣モジュラ解析 (Submodular Analysis)

劣モジュラ関数は，凸関数か？ 凹関数か？

交わり定理 (Edmonds): 二つのポリマトロイド $\mathbf{P}_i = (E, \rho_i)$ $(i = 1, 2)$ に対して，

$$\max\{x(E) \mid x \in \mathrm{P}_{(+)}(\rho_1) \cap \mathrm{P}_{(+)}(\rho_2)\}$$
$$= \min\{\rho_1(X) + \rho_2(E \setminus X) \mid X \subseteq E\}$$

劣モジュラ関数最小化:

$$\max\{x(E) \mid x \leq \mathbf{0},\ x \in \mathrm{P}(f)\} = \min\{f(X) \mid X \subseteq E\}$$

$(\mathcal{D}, f)$: E 上の劣モジュラ・システム

$\mathrm{P}(f)$: 劣モジュラ多面体

$$\forall X \in \mathcal{D}: \quad x(X) \leq f(X) \qquad \left(x(X) = \sum_{e \in X} x(e)\right)$$

$X \leftrightarrow \chi_X$ を同一視して書き換えると，

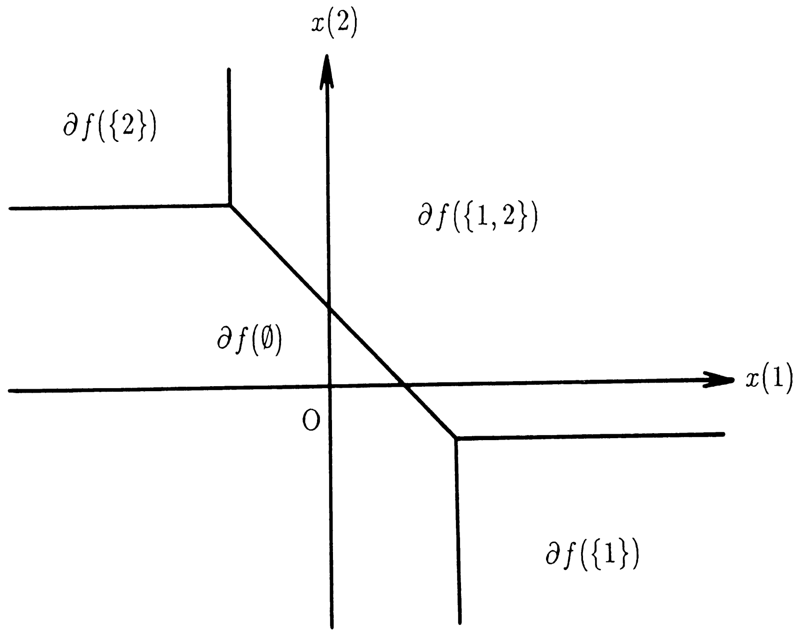
$$\forall X \in \mathcal{D}: \quad \langle x, \chi_X - \chi_\emptyset \rangle \leq f(\chi_X) - f(\chi_\emptyset)$$

これは，$x \in \partial f(\emptyset)$ を意味する．すなわち，$\partial f(\emptyset) = \mathrm{P}(f)$.

$\partial f(Y)$：$Y \in \mathcal{D}$ における f の劣微分

$$\forall X \in \mathcal{D}: \quad x(X) - x(Y) \leq f(X) - f(Y)$$

$\mathbf{0} \in \partial f(Y) \iff Y$ は f の最小化元である.



$f^*(: \mathbf{R}^V \to \mathbf{R})$: 劣モジュラ関数 f の**共役凸関数**

$$f^*(y) = \max\{y(X) - f(X) \mid X \in \mathcal{D}\} \qquad (y \in \mathbf{R}^V)$$

$g^*(: \mathbf{R}^V \to \mathbf{R})$: 優モジュラ関数 f の**共役凹関数**

$$g^*(y) = \min\{y(X) - g(X) \mid X \in \mathcal{D}\} \qquad (y \in \mathbf{R}^V)$$

定理 (Fenchel 型最大・最小定理) (1984):

$$\min\{f(X) - g(X) \mid X \in \mathcal{D}\} = \max\{g^*(y) - f^*(y) \mid y \in \mathbf{R}^V\}$$

(+整数性)

$f^*(: \mathbf{R}^V \to \mathbf{R})$: 劣モジュラ関数 f の**共役凸関数**

$$f^*(y) = \max\{y(X) - f(X) \mid X \in \mathcal{D}\} \qquad (y \in \mathbf{R}^V)$$

$g^*(: \mathbf{R}^V \to \mathbf{R})$: 優モジュラ関数 f の**共役凹関数**

$$g^*(y) = \min\{y(X) - g(X) \mid X \in \mathcal{D}\} \qquad (y \in \mathbf{R}^V)$$

定理 (Fenchel 型最大・最小定理) (1984):

$$\min\{f(X) - g(X) \mid X \in \mathcal{D}\} = \max\{g^*(y) - f^*(y) \mid y \in \mathbf{R}^V\}$$

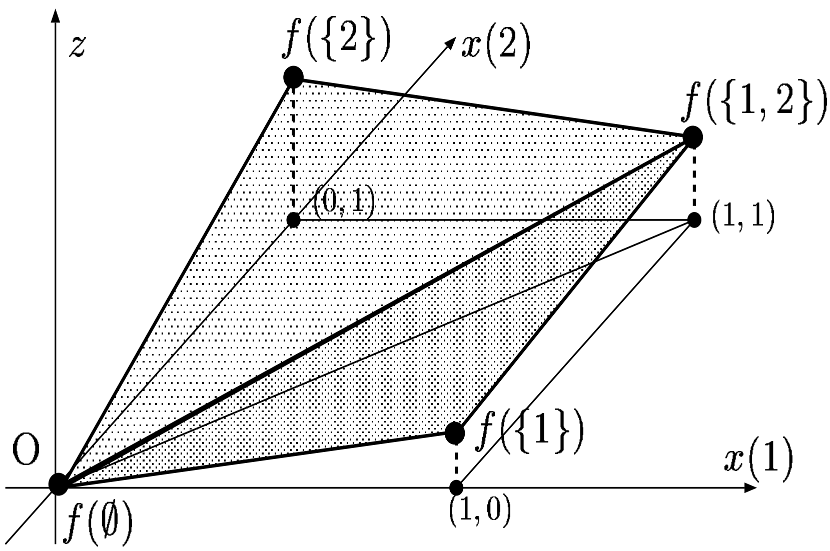
(+整数性)

これは，交わり定理，離散分離定理と同値である．

$(f^*)^*$: f の **Lovász 拡張** (凸関数)

$$(f^*)^*(x) = \sup\{\langle x, y\rangle - f^*(y) \mid y \in \mathbf{R}^V\} \qquad (x \in \mathbf{R}^V)$$

$$\partial f(X) = \partial (f^*)^*(\chi_X)$$



劣モジュラ関数最小化

弱多項式時間アルゴリズム：Grötschel-Lovász-Schrijver (1981)

強多項式時間アルゴリズム：Grötschel-Lovász-Schrijver (1988)

組合せ的強多項式時間アルゴリズム: Schrijver, Iwata-Fleischer-F (1999*)

基多面体 $\mathrm{B}(f)$ のメンバシップ $b \in \mathrm{B}(f)$

端点基 b_i $(i \in I)$ の凸結合

$$b = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \qquad (\forall i \in I : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \ \sum_{i \in I} \lambda_i = 1)$$

(Cunningham (1984, 1985) (ポリ)マトロイドのメンバシップ)

劣モジュラ関数最小化

弱多項式時間アルゴリズム：Grötschel-Lovász-Schrijver (1981)

強多項式時間アルゴリズム：Grötschel-Lovász-Schrijver (1988)

組合せ的強多項式時間アルゴリズム：Schrijver, Iwata-Fleischer-F (1999*)

基多面体 $\mathrm{B}(f)$ のメンバシップ $b \in \mathrm{B}(f)$

端点基 b_i $(i \in I)$ の凸結合

$$b = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$$

(Cunningham (1984, 1985) (ポリ)マトロイドのメンバシップ)

凸結合を使わずに解けないか？

組合せ包 (Combinatorial Hull) (2000*)

二つの基 b, b' と $t \in E$ に対して,

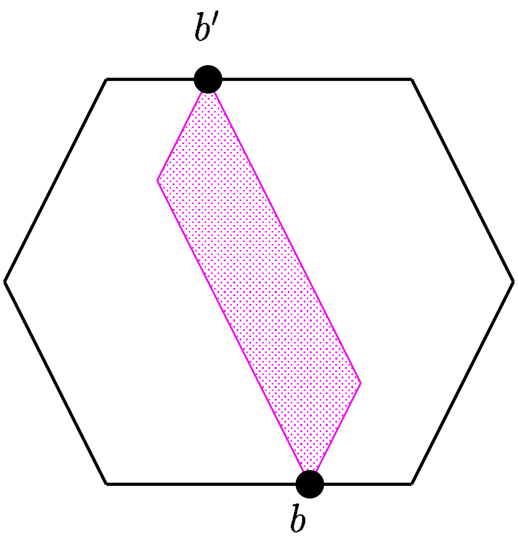
$$b(t) > b'(t) \quad b(u) \leq b'(u) \quad (\forall u \in E \setminus \{t\})$$

であるとき, **「箱」** 領域

$$B(b, b', t) = \{x \mid x(E) = f(E),\ b(t) \geq x(t) \geq b'(t), \\ \forall u \in E \setminus \{t\} : b(u) \leq x(u) \leq b'(u)\}$$

を定義すると,

$$B(b, b', t) \subseteq \mathrm{B}(f)$$



端点基 b における接錐 $\mathrm{TC}(b)$: タイト集合族 (分配束)$\mathcal{D}(f)$ に対応する半順序集合のハッセ図の枝集合 $A(b)$ によって定まるベクトル

$$\chi_{\partial^+ a} - \chi_{\partial^- a} \qquad (a \in A(b))$$

が，接錐 $\mathrm{TC}(b)$ の端射線である．

($\longrightarrow$ 基多面体の外側近似)

端点基 $\longleftrightarrow$ ネットワーク構造

端点基 b における接錐 $\mathrm{TC}(b)$: タイト集合族 (分配束)$\mathcal{D}(f)$ に対応する半順序集合のハッセ図の枝集合 $A(b)$ によって定まるベクトル

$$\chi_{\partial^+ a} - \chi_{\partial^- a} \qquad (a \in A(b))$$

が，接錐 $\mathrm{TC}(b)$ の端射線である．

($\longrightarrow$ 基多面体の外側近似)

端点基 $\longleftrightarrow$ ネットワーク構造

実用的なアルゴリズム：

Wolfe の MNP アルゴリズムを用いたアルゴリズム

(その計算複雑度は？)　(変種改良は可能か？)

LPニュートン法 (F-Hayashi-Yamashita-Zimmermann (2009))

線形計画問題 (LP)：

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c(j)x(j) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

LP ニュートン法 (F-Hayashi-Yamashita-Zimmermann (2009))

線形計画問題 (LP)：

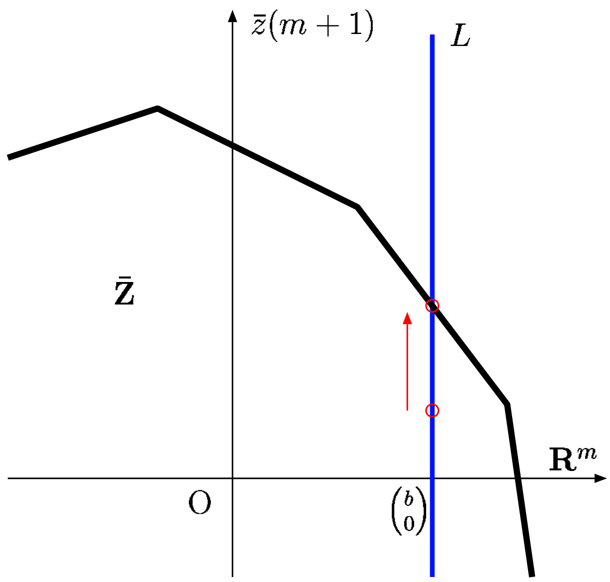
$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c(j)x(j) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & l \le x \le u \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix}$$

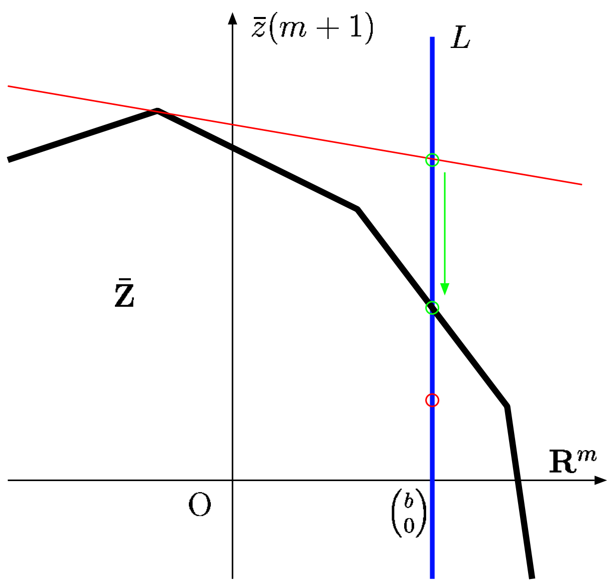
$$\bar{\boldsymbol{Z}} = \{\bar{z} \mid \bar{z} = \bar{A}x,\ l \le x \le u\}$$

問題 $(\mathrm{LP})'$：

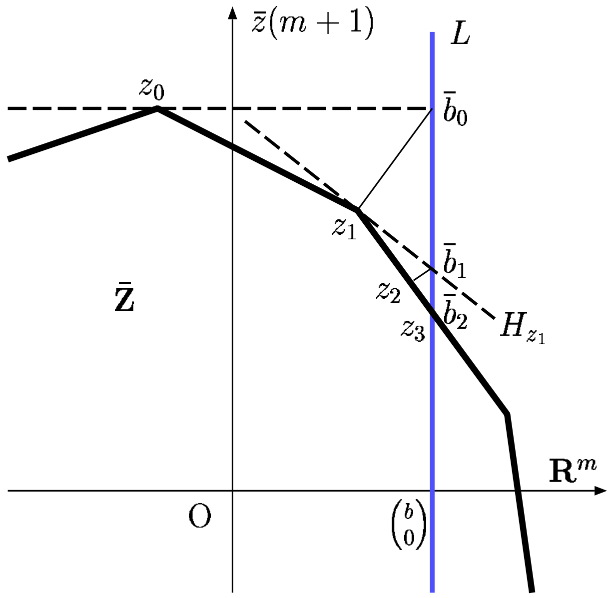
$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \gamma \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} b \\ \gamma \end{pmatrix} \in \bar{\boldsymbol{Z}}, \end{aligned}$$



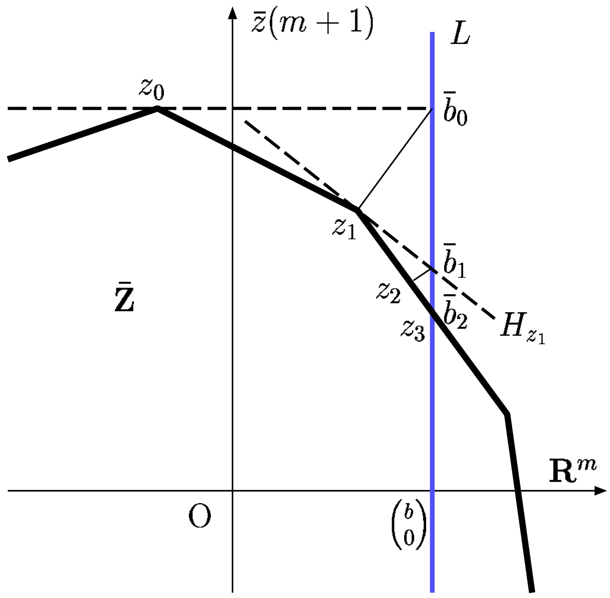
$\bar{z}(m+1)$
L
$\bar{\mathbf{Z}}$
$\mathbf{R}^m$
O
$\binom{b}{0}$



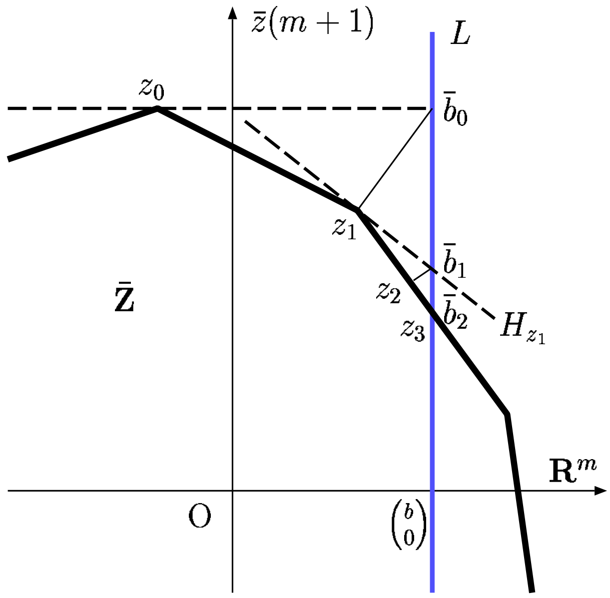
$\bar{z}(m+1)$
L
$\bar{\mathbf{Z}}$
$\mathbf{R}^m$
O
$\binom{b}{0}$



$\bar{z}(m+1)$
L
z_0
$\bar{b}_0$
z_1
$\bar{b}_1$
$\bar{\mathbf{Z}}$
z_2
$\bar{b}_2$
z_3
H_{z_1}
$\mathbf{R}^m$
O
$\binom{b}{0}$



LP ニュートン法 (の変種) は多項式時間アルゴリズムになるか？



LP ニュートン法 (の変種) は多項式時間アルゴリズムになるか？

線形計画問題は，強多項式時間で解けるか？

ネットワーク最適化

ネットワーク最適化

最短路問題

$G = (V, A)$: (有向) グラフ

ℓ (: $A \to \mathbf{R}$): 枝長関数

p (: $V \to \mathbf{R}$): ポテンシャル

枝長の変更

$$\ell_p(a) = \ell(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \qquad (a \in A)$$

実行可能ポテンシャル p

$$\forall a \in A: \quad \ell(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \geq 0$$

を見出せ.

ネットワーク最適化

最短路問題

$G = (V, A)$: (有向) グラフ

ℓ (: $A \to \mathbf{R}$): 枝長関数

p (: $V \to \mathbf{R}$): ポテンシャル

枝長の変更

$$\ell_p(a) = \ell(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \qquad (a \in A)$$

実行可能ポテンシャル p

$$\forall a \in A : \ \ \ell(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \geq 0$$

を見出せ.

計算複雑度は最短路問題と同じか？

最大フロー問題

最大隣接順序に基づく最大フローアルゴリズム (2002*)

計算複雑度 $\mathrm{O}(mn \log nU)$

$$m = |A|, \ \ n = |V|, \ \ U = \max\{c(a) \mid a \in A\}$$

強多項式な変種はあるか？

他の離散最適化問題への応用は？

最大フロー問題

最大隣接順序に基づく最大フローアルゴリズム (2002*)

計算複雑度 $\mathrm{O}(mn \log nU)$

$$m = |A|, \;\; n = |V|, \;\; U = \max\{c(a) \mid a \in A\}$$

強多項式な変種はあるか？

他の離散最適化問題への応用は？

最小カット問題の計算複雑度＝最大フロー問題の計算複雑度　（？）

一般化フロー

(通常のフロー・ネットワークに対して，各枝 a に非負ゲイン $\gamma(a)$)

　一般化最大フロー

　一般化最小費用フロー

強多項式時間アルゴリズムは構成できるか？

ゲーム理論と離散凸解析

安定マッチング，離散効用関数，

均衡解，非分割財の経済，······

ゲーム理論と離散凸解析

安定マッチング，離散効用関数，

均衡解，非分割財の経済，$\cdots\cdots$

双対貪欲アルゴリズム

双対貪欲多面体，凸幾何 (cg)-マトロイド，貪欲扇，$\cdots\cdots$

ゲーム理論と離散凸解析

安定マッチング，離散効用関数，

均衡解，非分割財の経済，⋯⋯

双対貪欲アルゴリズム

双対貪欲多面体，凸幾何 (cg)-マトロイド，貪欲扇，⋯⋯

劣モジュラ最適化

⋯⋯

ゲーム理論と離散凸解析

安定マッチング，離散効用関数，

均衡解，非分割財の経済，$\cdots\cdots$

双対貪欲アルゴリズム

双対貪欲多面体，凸幾何 (cg)-マトロイド，貪欲扇，$\cdots\cdots$

劣モジュラ最適化

$\cdots\cdots$

劣モジュラ関数錐の端射線の特徴づけ

ゲーム理論と離散凸解析

安定マッチング，離散効用関数，

均衡解，非分割財の経済，……

双対貪欲アルゴリズム

双対貪欲多面体，凸幾何 (cg)-マトロイド，貪欲扇，……

劣モジュラ最適化

……

劣モジュラ関数錐の端射線の特徴づけ

⋮
⋮

今日までお世話になりましたすべての方々に心より感謝申し上げます.

ありがとうございました.