関係データベースにおける従属性検証システムの実装

本多 和正*

2003 年 2 月 24 日

概要

W.MacCaull [1] らによる関係データベースにおける従属性検証系は健全且つ完全であるが、適用可能な規則が複数存在するなどの理由により計算機上に実装するには不向きである。また、単に検証を目的とするのであれば特に必要のない規則も存在する。そこで、本研究では規則を計算機上での実装に向くように書き換えを行った。本論文では書き換えられた検証系もまた健全且つ完全であり、停止性を満たすことを示す。

1 準備

この節では本論文で用いる用語や数学構造等について述べる。

1.1 関係代数

本論文で用いる関係代数の体系は、pointwise で homogenous なものである。

集合 X 上の二項関係の集合を $(X \to X)$ と書く。二項関係 $\alpha, \beta \in (X \to X)$ に対し、二項演算 $\sqcup, \sqcap, \cdot$、単項演算 $^-$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (\alpha \sqcup \beta) &\overset{def}{\iff} (x, y) \in \alpha \vee (x, y) \in \beta, \\
(x, y) \in (\alpha \sqcap \beta) &\overset{def}{\iff} (x, y) \in \alpha \wedge (x, y) \in \beta, \\
(x, y) \in (\alpha \cdot \beta) &\overset{def}{\iff} \bigvee_{u \in X}((x, u) \in \alpha \wedge (u, y) \in \beta), \\
(x, y) \in \alpha^- &\overset{def}{\iff} (x, y) \notin \alpha.
\end{aligned}
$$

なお、演算子 $\cdot$ は通常省略する。全関係を ∇ と書く $(\forall x, y \in X.(x, y) \in \nabla)$。また、これらの定義より $\alpha \sqcup \alpha^- = \nabla$ が成り立つ。

1.2 context と相関関係

Definition 1.1. 集合 X, A **と、各** $a \in A$ **及び 各** $x \in X$ **に対し集合** $V(a)$, $f(x, a) \subseteq V(a)$ **が与えられたとき、その対** $\mathcal{S} = \langle X, A, \{V(a) : a \in A\}, f \rangle$ **を情報系** *(information system)* **と呼ぶ。このとき** $X, A, V(a)$ **の要素をそれぞれ、対象** *(object)***、属性** *(attribute)***、属性値** *(attribute value)* **と呼ぶ。**

また、任意の $a \in A$ **に対し** $V(a) = \{0, 1\}$ **であるような情報系を** *context* **と呼ぶ。対象** 1_A **を** $\forall a \in A. f(1_A, a) = 1$ **と定義し、**1_A **を持つような** *context* **を** *context with 1* **と呼ぶ。**

* Kazumasa HONDA, DOI, Kyushu University 九州大学大学院 システム情報科学府 情報理学専攻

Definition 1.2. **集合** A **の部分集合から集合** X **上の二項関係への写像** $R : \wp(A) \to (X \rightharpoonup X)$ **を** *(*A **から** X **上への***)* **フレーム** *(frame)* **と呼ぶ。フレーム** R **が以下の条件** *(S1),(S2)* **を満たすとき** *standard***、条件** *(S1),(S2),(S3)* **を満たすとき** *strong***、条件** *(S1),(S2'),(S3)* **を満たすとき** *semistrong* **であるという。**

(S1) **任意の** $P \subseteq A$ **に対し、**$R(P)$ **は同値関係、**

(S2) **任意の** $P, Q \subseteq A$ **に対し、**$R(P) \sqcap R(Q) = R(P \cup Q)$**、**

(S2') **任意の** $P, Q \subseteq A$ **に対し、**$R(P) \sqcap R(Q) \sqsubseteq R(P \cup Q)$**、**

(S3) $R(\emptyset) = \nabla$**。**

Definition 1.3. **情報系において、フレーム** $R^i : \wp(A) \to (X \rightharpoonup X)$ **を** $(x, y) \in R^i(P) \overset{def}{\iff} \forall a \in P. f(x, a) = f(y, a)$ **で定義し、**$R^i(P)$ **を識別不能関係** *(indiscernibility relation)* **と呼ぶ。**

Lemma 1.4. **情報系において、フレーム** R^i **は** *strong* **である。**

Definition 1.5. *context with 1* **において、フレーム** $R^{as} : \wp(A) \to (X \rightharpoonup X)$ **を** $(x, y) \in R^{as}(P) \overset{def}{\iff} (\forall a \in P. f(x, a) = 1 \iff \forall a \in P. f(y, a) = 1)$ **と定義し、**$R^{as}(P)$ **を相関関係** *(association relation)* **と呼ぶ。**

Proposition 1.6. $a \in A, P, Q \subseteq A$ **に対し次が成り立つ。**

- $(x, 1_A) \in R^{as}(\{a\}) \iff f(x, a) = 1.$
- $(x, 1_A) \in R^{as}(P) \iff \forall a \in P.(x, 1_A) \in R^{as}(\{a\}).$
- $(x, 1_A) \in R^{as}(P \cup Q) \iff (x, 1_A) \in R^{as}(P) \wedge (x, 1_A) \in R^{as}(Q).$
- $(x, y) \in R^{as}(\{a\}) \iff (f(x, a) = 1 \wedge f(y, a) = 1) \vee (f(x, a) \neq 1 \wedge f(y, a) \neq 1).$
- $(x, y) \in R^{as}(P) \iff ((x, 1_A) \in R^{as}(P) \wedge (y, 1_A) \in R^{as}(P)) \vee ((x, 1_A) \in R^{as}(P)^- \wedge (y, 1_A) \in R^{as}(P)^-).$

Lemma 1.7. *context with 1* **において、フレーム** R^{as} **は** *semistrong* **である。**

Definition 1.8. *context with 1* **において、任意の** $P, Q \subseteq A$ **に対し** $R^{as}(P) = R^{as}(P \cup Q)$ **が成り立つとき、**P **から** Q **への相関規則** $P \Rightarrow Q$ **があるという。**

1.3 情報構造

Definition 1.9. **集合** X**、***(***有限***)* **集合** Par**、**Par **から** X **上へのフレーム** $R : \wp(Par) \to (X \rightharpoonup X)$ **の対** $\mathcal{K} = \langle X, Par, R \rangle$ **を情報構造** *(information frame)* **と呼ぶ。**

フレーム R **が** *standard***、***strong***、***semistrong* **のとき、情報構造は** *standard***、***strong***、***semistrong* **であるという。**

以上の定義及び補題から、任意の情報系 $\mathcal{S}$ に対し $\langle X, A, R^i \rangle$ は strong な情報構造であり、任意の context with 1 に対して $\langle X, A, R^{as} \rangle$ が semistrong な情報構造であることがいえる。では、逆に semistrong な情報構造から context with 1 が作れるだろうか？それに答えるのが次の表現定理である。

Theorem 1.10 (Information representability of contexts with 1). $1_A \in X$ **であるような** *semistrong* **な情報構造** $\mathcal{K} = \langle X, Par, R, 1_A \rangle$ **が次の公理** *(As1),(As2)* **を満たすなら、**$R^{as}(P) = R(P)$ **を満たす** *context with 1* **を構成できる。**

(As1) $\forall P \subseteq Par.((x, y) \in R(P) \iff ((x, 1_A) \in R(P) \wedge (y, 1_A) \in R(P)) \vee ((x, 1_A) \in R(P)^- \wedge (y, 1_A) \in R(P)^-))$**、**

(As2) $\forall a \in Par.\forall P \subseteq Par.((x, 1_A) \in R(\{a\})^- \implies (x, 1_A) \in R(P \cup \{a\})^-)$。

以降、*(As1),(As2)* を満たす *semistrong* な情報構造 $\langle X, Par, R, 1_A\rangle$ のクラスを Ω^{as} と表記する。

この定理の証明の準備として以下の補題を証明する。

Lemma 1.11. $\langle X, Par, R, 1_A\rangle \in \Omega^{as}$ **において、**$\forall P \subseteq Par, \forall x \in X$ **に対し、**

$$(x, 1_A) \in R(P) \iff \forall a \in P.(x, 1_A) \in R(\{a\}).$$

Proof. $(As2)$ を同値変形して、$(As2')$ $\forall a \in Par.\forall P \subseteq Par.((x, 1_A) \in R(P \cup \{a\}) \implies (x, 1_A) \in R(\{a\}))$ とすると、$\forall a \in P$ に対し、$(x, 1_A) \in R(P) = R(P \cup \{a\}) \overset{(As2')}{\implies} (x, 1_A) \in R(\{a\})$ となり、更に semistrong 性 $(S2')$ により

$$\begin{aligned}(x, 1_A) \in R(P) &\implies \textstyle\bigwedge_{a\in P}(x, 1_A) \in R(\{a\}) && (As2')\\ &\implies (x, 1_A) \in R(\textstyle\bigcup_{a\in P}\{a\}) = R(P), && (S2')\end{aligned}$$

つまり、$(x, 1_A) \in R(P) \iff \bigwedge_{a\in P}(x, 1_A) \in R(\{a\}) \iff \forall a \in P.(x, 1_A) \in R(\{a\})$。 □

Corollary 1.12. $\langle X, Par, R, 1_A\rangle \in \Omega^{as}$ **において、**$\forall P, Q \subseteq Par, \forall x \in X$ **に対し、**

$$(x, 1_A) \in R(P \cup Q) \iff (x, 1_A) \in R(P) \wedge (x, 1_A) \in R(Q).$$

Proof.

$$\begin{aligned}(x, 1_A) \in R(P \cup Q) &\iff \textstyle\bigwedge_{a\in P\cup Q}(x, 1_A) \in R(\{a\})\\ &\iff \textstyle\bigwedge_{a\in P}(x, 1_A) \in R(\{a\}) \wedge \bigwedge_{a\in Q}(x, 1_A) \in R(\{a\})\\ &\iff (x, 1_A) \in R(P) \wedge (x, 1_A) \in R(Q).\end{aligned}$$

□

Proof of Thm.1.10. まず $A = Par$ とし、$f : X \times A \to \{0, 1\}$ を次のように定義する。

$$f(x, a) = 1 \overset{def}{\iff} (x, 1_A) \in R(\{a\}).$$

$\mathcal{K}$ の semistrong 性 $(S1)$ より、任意の $a \in A$ に対し $R(\{a\})$ は同値関係。よって $(1_A, 1_A) \in R(\{a\})$、つまり $\forall a \in A. f(1_A, a) = 1$。故に対 $\mathcal{S} = \langle X, A, \{0, 1\}, f, 1_A\rangle$ は context with 1 である。

あとは $R = R^{as}$ を示せばよいわけだが、Lemma 1.11 と f の定義、Prop.1.6 により、

$$\begin{aligned}(x, 1_A) \in R(P) &\iff \forall a \in P.(x, 1_A) \in R(\{a\}) && (Lemma 1.11)\\ &\iff \forall a \in P. f(x, a) = 1 && (f \text{ の定義})\\ &\iff \forall a \in P.(x, 1_A) \in R^{as}(\{a\}) && (Prop.1.6)\\ &\iff (x, 1_A) \in R^{as}(P). && (Prop.1.6)\end{aligned}$$

この結果と Prop.1.6、$(As1)$ により

$$\begin{aligned}(x, y) \in R^{as}(P) &\iff ((x, 1_A) \in R^{as}(P) \wedge (y, 1_A) \in R^{as}(P)) && (Prop.1.6)\\ &\qquad \vee((x, 1_A) \in R^{as}(P)^- \wedge (y, 1_A) \in R^{as}(P)^-)\\ &\iff ((x, 1_A) \in R(P) \wedge (y, 1_A) \in R(P))\\ &\qquad \vee((x, 1_A) \in R(P)^- \wedge (y, 1_A) \in R(P)^-)\\ &\iff (x, y) \in R(P). && (As1)\end{aligned}$$

□

1.4 LIS 式と RLIS 式

Definition 1.13. **原始パラメータの有限集合** $\mathcal{A}$ **に対し、***LIS (language for information system)* **式の集合** $\mathcal{L}$ **を次の** *BNF* **で定義する。**

$$\begin{aligned} C &::= \mathcal{A} \mid C\,C, \\ \mathcal{L} &::= \; ! \mid C \mid \neg\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \cup \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \cap \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \to \mathcal{L} \mid \mathcal{L}; \mathcal{L}. \end{aligned}$$

また、$\mathcal{L}$ **と** *2* **個以上の変数記号の** *(***有限***)* **集合** $\mathcal{V}$ **に対し、**$\mathcal{R} = \{xFy \mid F \in \mathcal{L}, x, y \in \mathcal{V}\}$ **を** *RLIS* **式の集合と定義する。**

なお、$\mathcal{A}$ **から構成されたことを強調する場合にはそれぞれ** $C_{\mathcal{A}}, \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ **と表記する。**

Definition 1.14. **情報構造** $\mathcal{K} = \langle X, Par, R\rangle$ **と原始意味** $m : \mathcal{A} \to Par$ **が与えられたときに、その対** $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \mathcal{A}, m\rangle$ **を** $\mathcal{K}$ **上のモデルと呼び、意味関数** $\mathcal{M}[] : \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \to (X \to X)$ **を次のように定義する。**

$$m' : C_{\mathcal{A}} \to \wp(Par) \overset{def}{\iff} \begin{cases} m'(P) = \{m(P)\}, & P \in \mathcal{A}, \\ m'(PQ) = m'(P) \cup m'(Q), & P, Q \in C_{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

$$\mathcal{M}[] : \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \to (X \to X) \overset{def}{\iff} \begin{cases} \mathcal{M}[F] = R(m'(F)), & F \in C_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{M}[!] = R(\emptyset), & \\ \mathcal{M}[\neg F] = \mathcal{M}[F]^{-}, & F \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{M}[F \cup G] = \mathcal{M}[F] \sqcup \mathcal{M}[G], & F, G \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{M}[F \cap G] = \mathcal{M}[F] \sqcap \mathcal{M}[G], & F, G \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{M}[F \to G] = \mathcal{M}[\neg F] \sqcup \mathcal{M}[G], & F, G \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{M}[F; G] = \mathcal{M}[F]\mathcal{M}[G], & F, G \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

モデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \mathcal{A}, m\rangle$ **において** *LIS* **式** $F \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ **が** $\mathcal{M}[F] = \nabla$ **を満たすとき、**F **は** $\mathcal{M}$ **で充足可能といい、任意の原始意味** $m : \mathcal{A} \to Par$ **に対しモデル** $\langle \mathcal{K}, \mathcal{A}, m\rangle$ **で充足可能のときに** F **は** $\mathcal{K}$ **において妥当であるという。**

また、$\mathcal{M}$ **に対し** $v : \mathcal{V} \to X$ **を** $\mathcal{M}$ **上の評価関数と呼ぶ。***RLIS* **式** $xFy \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ **が** $(v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F]$ **を満たすとき** v **で充足可能といい、**xFy **が任意のモデル** $\langle \mathcal{K}, \mathcal{A}, \forall m\rangle$ **上の任意の評価関数で充足可能のときに** $\mathcal{K}$ **において** xFy **は妥当であるという。さらに、情報構造のクラス** Ω **に属する任意の情報構造で妥当であるとき、**Ω **で妥当であるという。**

$\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$、$x \in \mathcal{V}$ に対し、$\{v(x) \mid v : \mathcal{M}$ 上の評価関数 $\} = X$ であるので次が成り立つ。

Theorem 1.15. **情報構造** $\mathcal{K}$ **において、***LIS* **式** F **が妥当であることと** *RLIS* **式** xFy $(x \neq y)$ **が妥当であることは同値。**

Definition 1.16. *LIS* **式のマクロとして** D **式** *(***の集合** $\mathcal{D}$*)* **及びその解釈** $[] : \mathcal{D} \to \mathcal{L}$ **を以下のように定義する。**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &::= C \Rightarrow C, \\ \mathcal{D}_1 &::= \mathcal{D}_0 \mid \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{D} &::= \mathcal{D}_1 \mid \mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P \Rightarrow Q] &= (P \to PQ) \cap (PQ \to P), \\ [F \cap G] &= [F] \cap [G], \\ [F \supset G] &= (!; \neg[F]; !) \cup [G]. \end{aligned}$$

D **式の解釈後の** *LIS* **式を** *LIS-D* **式と呼び、その集合** $[\mathcal{D}]$ **を** $\mathcal{L}_D$ **と書く。同様に** *RLIS-D* **式、**$\mathcal{R}_D$ **を定義する。**

以降、D 式と LIS-D 式を同一視して議論する。

2 証明系

本研究で提案する証明系は LIS-D 式が情報構造のクラス Ω^{as} で妥当であることの検証を目的としている。証明系が処理する言語は RLIS 式の列を拡張した次のような言語 $\mathcal{S}$ である。

$$\mathcal{S} = \{\top\} \cup (\mathcal{R} \cup \{\langle x(F;G)y, U\rangle \mid x(F;G)y \in \mathcal{R},\ U \subseteq \mathcal{V}\})^*.$$

モデル $\mathcal{M}$ と評価関数 v に対し、$\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![]\!] : \mathcal{S} \to \mathbf{Boolean}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\top]\!] &= \ \mathbf{true}, \\
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\varepsilon]\!] &= \ \mathbf{false}, \\
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] &= \ (v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F], \\
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\langle x(F;G)y, U\rangle]\!] &= \ \bigvee_{u \in \mathcal{V}-U}(\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFu]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![uGy]\!]) \\
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\Delta, \Gamma]\!] &= \ \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\Delta]\!] \vee \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\Gamma]\!].
\end{aligned}$$

このとき $F, G \in \mathcal{L}$ に対し以下が成り立つ。

- $\forall \mathcal{M}, \forall v. \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] = \mathbf{true} \iff xFy$ が妥当。
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x!y]\!] = (v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[!] = (v(x), v(y)) \in \nabla = \mathbf{true} = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\top]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy, x\neg Fy]\!] = ((v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F]) \vee ((v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F]^-) = \mathbf{true} = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\top]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x(F \cup G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy, xGy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg(F \cup G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Fy]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Gy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x(F \cap G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xGy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg(F \cap G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Fy, x\neg Gy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x(F \to G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Fy, xGy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg(F \to G)y]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Gy]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\langle x(F;G)y, \mathcal{V}\rangle]\!] = \mathbf{false} = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\varepsilon]\!]$.
- $$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x(F;G)y]\!] &= (v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F;G] \\
&= (v(x), v(y)) \in \mathcal{M}[F]\mathcal{M}[G] \\
&= \bigvee_{z \in X}((v(x), z) \in \mathcal{M}[F] \wedge (z, v(y)) \in \mathcal{M}[G]) \\
&\geq \bigvee_{u \in \mathcal{V}}((v(x), v(u)) \in \mathcal{M}[F] \wedge (v(u), v(y)) \in \mathcal{M}[G]) \\
&= \bigvee_{u \in \mathcal{V}}(\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFu]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![uGy]\!]) \\
&= \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\langle x(F;G)y, \emptyset\rangle]\!].
\end{aligned}$$

  なお、v が全射であれば等号が成り立つ。

また、Ω^{as} においてはさらに以下が成り立つ。ただし、$P, Q \in C$、$1 \in \mathcal{V}$ とし、任意の評価関数 v に対し $v(1) = 1_A$ とする。つまり、$\mathcal{V}$ は 3 点以上の有限集合である。

- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xPx]\!] = (v(x), v(x)) \in \mathcal{M}[P] = (v(x), v(x)) \in R(P) = \mathbf{true} = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\top]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Px]\!] = (v(x), v(x)) \in \mathcal{M}[P]^- = (v(x), v(x)) \in R(P)^- = \mathbf{false} = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\varepsilon]\!]$.

- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xPy]\!] = (v(x), v(y)) \in R(P)$
$$\begin{aligned} &= ((v(x), 1_A) \in R(P) \wedge (v(y), 1_A) \in R(P)) \\ &\quad \vee((v(x), 1_A) \in R(P)^- \wedge (v(y), 1_A) \in R(P)^-) \\ &= ((v(x), v(1)) \in R(P) \wedge (v(y), v(1)) \in R(P)) \\ &\quad \vee((v(x), v(1)) \in R(P)^- \wedge (v(y), v(1)) \in R(P)^-) \\ &= (\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xP1]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![yP1]\!]) \vee (\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg P1]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![y\neg P1]\!]) \\ &= (\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xP1]\!] \vee \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![y\neg P1]\!]) \wedge (\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg P1]\!] \vee \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![yP1]\!]) \\ &= \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xP1, y\neg P1]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg P1, yP1]\!]. \end{aligned}$$
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg Py]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg P1, y\neg P1]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xP1, yP1]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xPQ1]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xP1]\!] \wedge \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xQ1]\!]$.
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg PQ1]\!] = \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![x\neg P1, x\neg Q1]\!]$.

これらの式は $\mathcal{M}, v$ の取り方に依らないことは明らかである。そこで $\langle \mathcal{M}, v\rangle$ を省略して表記することで次の定理を得る。

Theorem 2.1. $F, G \in \mathcal{L}$, $P, Q \in \mathcal{C}$, $\Delta, \Gamma \in \mathcal{S}$, $x, y \in \mathcal{V}$ **に対して以下の等式たちが成り立ち、それらを用いて** $[\![xFy]\!] \geq [\![\top]\!]$ **となるならば** xFy **は妥当である。**

- $[\![\Delta, \Gamma]\!] = [\![\Delta]\!] \vee [\![\Gamma]\!]$.
- $[\![x!y]\!] = [\![\top]\!]$.
- $[\![xFy, x\neg Fy]\!] = [\![\top]\!]$.
- $[\![x(F \cup G)y]\!] = [\![xFy, xGy]\!]$.
- $[\![x\neg(F \cup G)y]\!] = [\![x\neg Fy]\!] \wedge [\![x\neg Gy]\!]$.
- $[\![x(F \cap G)y]\!] = [\![xFy]\!] \wedge [\![xGy]\!]$.
- $[\![x\neg(F \cap G)y]\!] = [\![x\neg Fy, x\neg Gy]\!]$.
- $[\![x(F \to G)y]\!] = [\![x\neg Fy, xGy]\!]$.
- $[\![x\neg(F \to G)y]\!] = [\![xFy]\!] \wedge [\![x\neg Gy]\!]$.
- $[\![x(F; G)y]\!] \geq [\![\langle x(F; G)y, \emptyset\rangle]\!]$.
- $[\![\langle x(F; G)y, \mathcal{V}\rangle]\!] = [\![\varepsilon]\!]$.
- $[\![\langle x(F; G)y, U\rangle]\!] = \bigvee_{u \in \mathcal{V} - U}([\![xFu]\!] \wedge [\![uGy]\!])$
- $[\![xPx]\!] = [\![\top]\!]$.
- $[\![x\neg Px]\!] = [\![\varepsilon]\!]$.
- $[\![xPy]\!] = [\![xP1, y\neg P1]\!] \wedge [\![x\neg P1, yP1]\!]$.
- $[\![x\neg Py]\!] = [\![x\neg P1, y\neg P1]\!] \wedge [\![xP1, yP1]\!]$.
- $[\![xPQ1]\!] = [\![xP1]\!] \wedge [\![xQ1]\!]$.
- $[\![x\neg PQ1]\!] = [\![x\neg P1, x\neg Q1]\!]$.

Proof. (不) 等式たちの証明については既に述べたので省略。

$[\![xFy]\!] \geq [\![\top]\!]$ とは省略なしに書くと、任意の $\mathcal{M}, v$ に対し $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] \geq \langle \mathcal{M}, v\rangle[\![\top]\!] = \mathbf{true}$ が成り立つことである。そして、**true** の最大性から実際には $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] = \mathbf{true}$ となる。また、既に述べたように、任意の $\mathcal{M}, v$ に対し $\langle \mathcal{M}, v\rangle[\![xFy]\!] = \mathbf{true}$ が成り立つことは xFy が妥当であることと同値であったので、$[\![xFy]\!] \geq [\![\top]\!]$ ならば xFy は妥当である。 □

定理 2.1 を用いると RLIS-D 式は次のように分解される。

- $F \supset G \in \mathcal{D}$ に対して、
$$\begin{aligned} [\![x[F \supset G]y]\!] &= [\![x((!; \neg[F]; !) \cup [G])y]\!] = [\![x(!; \neg[F]; !)y, x[G]y]\!] \\ &\geq \textstyle\bigvee_{a \in \mathcal{V}}([\![x!a, x[G]y]\!] \wedge [\![a(\neg[F]; !)y, x[G]y]\!]) \\ &= \textstyle\bigvee_{a \in \mathcal{V}}[\![a(\neg[F]; !)y, x[G]y]\!] \\ &\geq \textstyle\bigvee_{a,b \in \mathcal{V}}([\![a\neg[F]b, x[G]y]\!] \wedge [\![b!y, x[G]y]\!]) \\ &= \textstyle\bigvee_{a,b \in \mathcal{V}}[\![a\neg[F]b, x[G]y]\!]. \end{aligned}$$
ここで、$\mathcal{V}$ は有限集合であるので、$[\![a\neg[F]b, x[G]y]\!]$ たちはは有限個 ($|\mathcal{V}|^2$ 個) である。

- $F \cap G \in \mathcal{D}_1$ に対して、$[\![x[F \cap G]y]\!] = [\![x[F]y]\!] \wedge [\![x[G]y]\!]$.
- $F \cap G \in \mathcal{D}_1$ に対して、$[\![x\neg[F \cap G]y]\!] = [\![x\neg[F]y, x\neg[G]y]\!]$.
- $P \Rightarrow Q \in \mathcal{D}_0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
[\![x[P \Rightarrow Q]y]\!] &= [\![x((P \to PQ) \cap (PQ \to P))y]\!] \\
&= [\![x(P \to PQ)y]\!] \wedge [\![x(PQ \to P)y]\!] \\
&= [\![x\neg Py, xPQy]\!] \wedge [\![x\neg PQy, xPy]\!] \\
&= [\![x\neg Py, xPQy]\!] \wedge [\![x\neg PQy, xPy]\!] \\
&= \quad [\![x\neg P1, y\neg P1, xPQy]\!] \wedge [\![xP1, yP1, xPQy]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![x\neg PQ1, y\neg PQ1, xPy]\!] \wedge [\![xPQ1, yPQ1, xPy]\!] \\
&= \cdots \\
&= \quad [\![x\neg P1, y\neg P1, yQ1]\!] \wedge [\![xP1, yP1, y\neg Q1]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![xP1, y\neg P1, yQ1]\!] \wedge [\![x\neg P1, yP1, xQ1]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![xP1, y\neg P1, xQ1, yQ1]\!] \wedge [\![x\neg P1, yP1, xQ1, yQ1]\!].
\end{aligned}
$$

- $P \Rightarrow Q \in \mathcal{D}_0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
[\![x\neg[P \Rightarrow Q]y]\!] &= [\![x\neg((P \to PQ) \cap (PQ \to P))y]\!] \\
&= [\![x\neg(P \to PQ)y, x\neg(PQ \to P)y]\!] \\
&= [\![xPy, x\neg(PQ \to P)y]\!] \wedge [\![x\neg PQy, x\neg(PQ \to P)y]\!] \\
&= \quad [\![xPy, xPQy]\!] \wedge [\![xPy, x\neg Py]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![x\neg PQy, xPQy]\!] \wedge [\![x\neg PQy, x\neg Py]\!] \\
&= [\![xPy, xPQy]\!] \wedge [\![x\neg PQy, x\neg Py]\!] \\
&= \cdots \\
&= \quad [\![xP1, y\neg P1, y\neg Q1]\!] \wedge [\![x\neg P1, yP1, x\neg Q1]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![x\neg P1, y\neg P1, x\neg Q1, y\neg Q1]\!] \wedge [\![x\neg P1, y\neg P1, xQ1, yQ1]\!] \\
&\quad\ \wedge [\![xP1, yP1]\!].
\end{aligned}
$$

以上から $[\![\top]\!], [\![xP1, y\neg Q1, \cdots]\!](P, Q \in \mathcal{A})$ たちの論理積が下界となることがわかる。

また、この分解は RLIS-D 式と $\mathcal{V}$ の有限性から有限回で終了する。よって、この分解による LIS-D 式 F の妥当性判定は健全であり決定可能である。

そして、さらに次が成り立つ。

Theorem 2.2 (Completeness). *RLIS-D* **式** xFy **が** $[\![xFy]\!] \geq [\![\top]\!]$ **でない場合、**$\langle \mathcal{M}_{\prime}, v_0\rangle[\![xFy]\!] =$ **false となるような** $\mathcal{M}_0, v_0$ **が存在する。**

Proof. $X = \mathcal{V}, 1_A = 1, Par = \mathcal{A}$ とし、$v_0 = id_{\mathcal{V}}, m = id_{\mathcal{A}}$ とする。v_0 の全射性から、Ω^{as} の情報構造 $\mathcal{K} = \langle X, Par, R\rangle$ たちに対し、モデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, m\rangle$ は $\langle \mathcal{M}, v_0\rangle[\![xFy]\!] = \bigwedge_{i \in I} \langle \mathcal{M}, v_0\rangle[\![\Gamma_i]\!]$ を満たす。よって、ある $j \in I$ に対し、$\langle \mathcal{M}_{\prime}, v_0\rangle[\![\Gamma_j]\!] =$ **false** となるような $\mathcal{M}_{\prime}$、正確には R_0 が存在すれば $\langle \mathcal{M}_{\prime}, v_0\rangle[\![xFy]\!] =$ **false** となる。そこで、そのような R_0 が作れることを示す。

既に述べたように、Γ_j は $xP1, y\neg Q1, \cdots (P, Q \in \mathcal{A})$ の形をしているので、Γ_j に $xP1$ が含まれていれば $(x, 1) \notin R_0(\{P\})$ とし、$y\neg Q1$ が含まれていれば $(y, 1) \in R_0(\{Q\})$ としてやれば R_0 は $\langle \mathcal{M}_{\prime}, v_0\rangle[\![\Gamma_j]\!] =$ **false** を満たす。しかし、このままでは R_0 は Ω_{as} のフレームではないので、さらに (As1),(As2),semistrong 性の閉包をとってやるとよい。なお、Γ_j には $xP1$ や $y\neg Q1$ といった本体が $\mathcal{A}$ もしくはそれに $\neg$ が付いたもので右端が 1 となる *RLIS* 式しか含まれないのでこの閉包は矛盾なく行うことができる。 □

Definition 2.3. **言語** $\mathcal{S}$ **の構成要素** $\top \neq \forall \Gamma \in \mathcal{S}, \forall F, G \in \mathcal{L}, \forall P, Q \in C, \forall x, y \in \mathcal{V}$ **に対し、** $\dfrac{\textbf{分解後の列}}{\textbf{列}}$ **(規則名) という形式で以下の分解規則を定め、その集合をもって証明系** $\mathfrak{P}^{as}$ **とする。表記の都合上、列の並びは考慮しない** *(i.e.* $C, B, A, \cdots = A, B, C, \cdots$*)*。

$$\frac{xFy, \Gamma \quad xGy, \Gamma}{x(F \cap G)y, \Gamma}\ (\cap) \qquad \frac{x\neg Fy, x\neg Gy, \Gamma}{x\neg(F \cap G)y, \Gamma}\ (\neg\cap) \qquad \frac{xFy, xGy, \Gamma}{x(F \cup G)y, \Gamma}\ (\cup) \qquad \frac{x\neg Fy, \Gamma \quad x\neg Gy, \Gamma}{x\neg(F \cup G)y, \Gamma}\ (\neg\cup)$$

$$\frac{x\neg Fy, xGy, \Gamma}{x(F \to G)y, \Gamma}\ (\to) \qquad \frac{xFy, \Gamma \quad x\neg Gy, \Gamma}{x\neg(F \to G)y, \Gamma}\ (\neg \to) \qquad \frac{\top}{x!y, \Gamma}\ (!) \qquad \frac{\top}{xFy, x\neg Fy, \Gamma}\ (FND)$$

$$\frac{xFu, \Gamma, \langle x(F;G)y, \{u\}\rangle \quad uGy, \Gamma, \langle x(F;G)y, \{u\}\rangle}{x(F;G)y, \Gamma}\ (;)\ \ u \in \mathcal{V} \qquad \frac{\Gamma}{\langle x(F;G)y, \mathcal{V}\rangle, \Gamma}\ (;)$$

$$\frac{xFu, \Gamma, \langle x(F;G)y, U \cup \{u\}\rangle \quad uGy, \Gamma, \langle x(F;G)y, U \cup \{u\}\rangle}{\langle x(F;G)y, U\rangle, \Gamma \quad (\text{if}\ \ U \neq \mathcal{V})}\ (;)\ \ u \in \mathcal{V} - U$$

$$\frac{\top}{xPx, \Gamma}\ (ref) \qquad \frac{\Gamma}{x\neg Px, \Gamma}\ (\neg ref)$$

$$\frac{xP1, y\neg P1, \Gamma \quad x\neg P1, yP1, \Gamma}{xPy, \Gamma \quad (\text{if}\ \ y \neq 1)}\ (as1) \qquad \frac{x\neg P1, y\neg P1, \Gamma \quad xP1, yP1, \Gamma}{x\neg Py, \Gamma \quad (\text{if}\ \ y \neq 1)}\ (\neg as1)$$

$$\frac{xP1, \Gamma \quad xQ1, \Gamma}{xPQ1, \Gamma}\ (as2) \qquad \frac{x\neg P1, x\neg Q1, \Gamma}{x\neg PQ1, \Gamma}\ (\neg as2)$$

$\mathfrak{P}^{as}$ の規則が適用できない列を閉列と呼び、列の長さが 1 以下の場合特に閉式と呼ぶ。逆に規則が適用可能な列・式を開列・開式と呼ぶ。定義から各 $P \in \mathcal{A}$、各 $x \in \mathcal{V} - \{1\}$ に対し $xP1$ 及び $x\neg P1$、$\top$、ε は閉式である。

また、規則の定義から次のことが成り立つ。

Theorem 2.4 (分解の一意性). $\mathcal{V}$ **の要素の並びを固定し、規則** $(;)$ **において** $\mathcal{V}$ **や** $\mathcal{V} - U$ **の先頭要素を** u **としてとると仮定すると、任意の開式には適用可能な規則がただ一つのみ存在する。**

また、定理 2.1・定理 2.2 により $\mathfrak{P}^{as}$ は停止性と健全性、及び完全性を満たす。

Theorem 2.5 (停止性と健全性、完全性). **任意の** *RLIS-D* **式** xFy **は** $\mathfrak{P}^{as}$ **により、有限ステップで閉式の列たちに分解される また、全ての閉列が** $\top$ **であるなら** xFy **は** Ω^{as} **において妥当であり、そうでない場合は** xFy **が妥当とならないような** Ω^{as} **の情報構造が存在する。**

ここまでの議論において変数記号の集合 $\mathcal{V}$ は 3 点以上の有限集合とだけ仮定していたが、実装する際には適当な個数に限定する必要がある。実験結果から言うと少なくとも Armstrong の公式 (D 式で書き表すと $PQ \Rightarrow Q$、$(P \Rightarrow Q) \supset (PS \Rightarrow QS)$、$((P \Rightarrow Q) \cap (Q \Rightarrow S)) \supset (P \Rightarrow S)$) の妥当性証明には $\mathcal{V}$ は 3 点集合で十分である。しかし、一般の D 式に対しても $\mathcal{V}$ を 3 点集合としても良いかどうかについては議論の余地がある。

参考文献

[1] W.MacCaull, A Proof System for Dependencies for Information Relations, Fundamenta Informaticae, 42, pp1-27, 2000