再帰的プログラムの意味論と絡み目の不変量

Models of Recursive Programs and Invariants of Links

長谷川 真人
Masahito Hasegawa

京都大学 数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

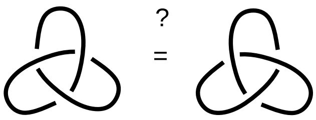
概 要

再帰的プログラムの表示的および操作的意味論は、プログラミング言語の理論において古典的な話題である。一方、絡み目の理論は、二十世紀の数学を通じて基本的な分野の一つであった。本稿では、近年発展した絡み目の不変量のためのカテゴリ論的な枠組みを応用することにより、再帰プログラムの意味論を統一的に扱うことができることを紹介する。特に、領域理論に基づく表示的意味論および、グラフ書き換えシステムにおける巡回的共有グラフによる表現は、この枠組みの具体例として説明することができる。

1 はじめに

1.1 絡み目の不変量

巡回的な構造は、数学および計算機科学において特別な関心を集めてきた。数学では、絡み目の分類問題 [Ada94]がその代表といえるだろう。たとえば、次のような問題が考えられる：「以下の絡み目の図が、同一の絡み目をあらわしているかどうかを判定せよ」。



一般に、このような問いに答えることは難しい — 絡み目の同一性の決定手続きは、いまだに知られていない。このようなグラフィカルな（すなわち構文的な）巡回的構造について直接考察することが大変困難であるため、数学者は、絡み目の図に、絡み目の同一性に関して不変な適当な代数的構造（特に多項式）を対応させる数々の手法を考案した。たとえば、これらふたつの図には異なる Jones-Conway 多項式が対応することが知られており、このことからこれらが異なる絡み目を表現していることがわかる。このように絡み目不変量は、絡み目の理論において、後述するプログラミング言語の理論での表示的意味論と同様の役割を果たしている。

1.2 再帰的プログラムの意味論

プログラミング言語の理論においては、再帰的プログラム、すなわち自分自身を呼び出すように書かれたプログラムの数学的基礎の確立が、古くから大きなテーマの一つであり続けている。この問題に関しては、７０年代までに、すでにふたつの本質的なアイデアが提案され、それぞれに大きな成果をあげている。一つは、 Scott らにより創始された、プログラミング言語の表示的意味論およびその数学的基盤である領域理論で、この枠組みでは、再帰的プログラムの意味は「もっとも良い性質を持つ」不動点、すなわち最小不動点として特徴づけられる [Sco69]。 最小不動点モデルは再帰的プログラムについて論ずるための強力な基礎となり、現在に至るまで活発に研究・応用されている。もう一つは、再帰的プログラムを巡回的なグラフ構造として解釈する方法で、 Turner らによりかなり早くから関数型プログラミング言語の有効な実装方法として用いられ [Tur79]、後にグラフ書き換えに基づく計算の理論と

して定式化されて、さかんに研究されている。

しかしながら、これらふたつのアプローチを結び付ける理論的枠組みは、これまで知られていなかった。これは、それぞれの方法論がまるで違うためにあまり丁寧な考察がなされてこなかったことも一因であるが、最大の理由は、これらの方法に共通する数学構造がよくわかっていなかったことだと思われる。なぜこれらのアプローチが再帰的プログラムの良いモデルを与えるのか、他の方法では駄目なのかどうか、という基本的な疑問に答えるためにも、再帰的計算の解釈に不可欠な数学構造を特定する必要がある。

1.3　絡み目から再帰プログラムへ

この問題を考えるためのヒントが、近年発展した絡み目不変量のためのカテゴリ論的枠組みから得られた。この理論では、準三角 Hopf 代数（量子群）から Jones-Conway 多項式のような絡み目不変量が得られる仕組みは、準三角 Hopf 代数の表現のなすカテゴリが、ブレイド付きモノイダルカテゴリ [JS93] と呼ばれる構造を持ちしかも一種の双対性をみたすこと、およびそのようなカテゴリが絡み目のモデルを与えること、の二点に基づいて理解することができる [RT90]。Joyal、Street と Verity は、トレース付きモノイダルカテゴリという構造がこの目的に必要かつ十分であることを示した [JSV96]。おおざっぱにいって、トレース付きモノイダルカテゴリとは、必ずしも自明でない交差（ブレイド）と、トレースと呼ばれる巡回的な構造を作り出す演算を持つモノイダルカテゴリである。

本稿では、このトレース付きモノイダルカテゴリの枠組みが、再帰プログラムの統一的な意味論を与えるのに有効であることを示した、筆者らの最近の結果 [Has97a] [Has97b] を紹介する。

2　トレース付きモノイダルカテゴリ

モノイダルカテゴリ $\mathbf{C} = (\mathbf{C}, \otimes, I, a, l, r)$ とは、カテゴリ $\mathbf{C}$ と、それに付随するテンソル積またはモノイダル積と呼ばれる関手 $\otimes : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$、単位対象と呼ばれる $\mathbf{C}$ の対象 I、テンソル積と単位対象の結合律・単位律に相当し適当な公理をみたす可逆な自然変換 $a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$、$l_A : I \otimes A \xrightarrow{\sim} A$ および $r_A : A \otimes I \xrightarrow{\sim} A$ の組のことをいう。モノイダルカテゴリで、Yang-Baxter 方程式に相当する公理と $c^{-1}_{A,B} = c_{B,A}$（対称性）を満たす可逆な自然変換 $c_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ を持つものを、**シンメトリックモノイダルカテゴリ**と呼ぶ。なお、この定義から対称性を除いたものがブレイド付きモノイダルカテゴリ（c はブレイドと呼ばれる）であり、絡み目の不変量の議論において重要であるが、本稿では深く立ち入らないことにする。

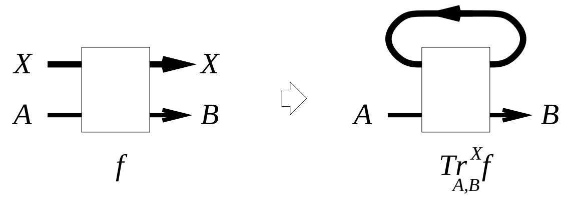
いま、シンメトリックモノイダルカテゴリ $\mathbf{C}$ が与えられているものとする。このとき、$\mathbf{C}$ 上の**トレース** [JSV96] とは、$\mathbf{C}$ の対象 A、B、X で添字付けられた関数の族

$$Tr^X_{A,B} : \mathbf{C}(A \otimes X, B \otimes X) \to \mathbf{C}(A, B)$$

で、以下の条件を満たすものである。

- (Left/Right Tightening, Sliding) Tr はパラメータ A、B に関して natural であり、また X に関して dinatural である。
- (Vanishing) $Tr^I_{A,B}(-) = r_B \circ (-) \circ r^{-1}_A$、また $Tr^{X \otimes Y}_{A,B}(-) = Tr^X_{A,B}(Tr^Y_{A \otimes X, B \otimes X}(a^{-1}_{B,X,Y} \circ (-) \circ a_{A,X,Y}))$。
- (Superposing) $Tr^X_{C \otimes A, C \otimes B}(a^{-1}_{C,B,X} \circ (id_C \otimes -) \circ a_{C,A,X}) = id_C \otimes Tr^X_{A,B}(-)$。
- (Yanking) $Tr^X_{X,X} c_{X,X} = id_X$。

トレースは、下図のように巡回構造をつくり出す演算ととらえるとわかりやすい。

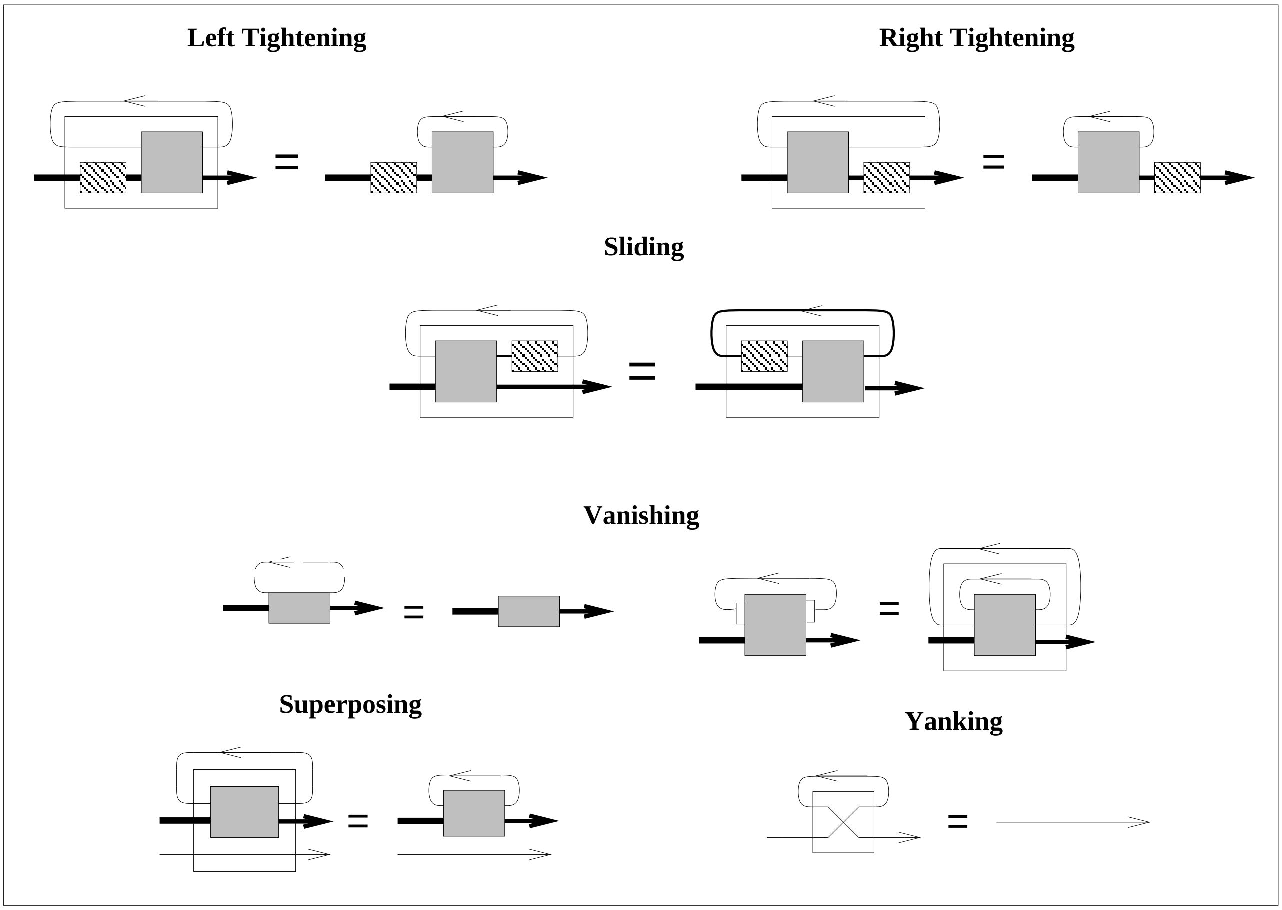


上記の条件は、図を使って簡潔に表現することができる（図 1）。

トレースをもつシンメトリックモノイダルカテゴリを、**トレース付きモノイダルカテゴリ**と呼ぶ。代表的な例として、任意の体の上の有限次元線型空間と線型写像のなすカテゴリは、トレース付きモノイダルカテゴリになっている（トレースは行列の対角和として与えられる）。その他の例については [JSV96] [Has97b] などを参照されたい。

実は、トレースの概念はより一般にブレイド付きモノイダルカテゴリに対して定義でき、絡み目の不変量を議論するのに重要な役割を果たす（絡み目の健全かつ完全なモデルのクラスになる）のだが、本稿では、再帰的プログラムの解釈に必要かつ十分な、シンメトリックな場合に限定して話を進める。

図1　トレースの公理



3　トレースと不動点

はじめに述べた再帰的プログラムへのふたつのアプローチを、トレース付きモノイダルカテゴリの枠組みによって、絡み目不変量の場合と本質的に同様の方法で、一様に理解することが可能である。

3.1　表示的意味論

通常の表示的意味論において用いられているのは、テンソル積が直積になっているような場合である。そのような状況では、再帰的プログラムの解釈に用いる不動点演算子が存在することと、トレースが存在することがまったく同値であることが、Hyland と筆者によって独立に証明された [Has97a]：

定理 3.1　(Hyland/ 長谷川) テンソル積が直積であるようなモノイダルカテゴリ **C** においては、以下の条件は同値である。

1. **C** はトレースをもつ。
2. **C** は dinaturality と diagonal property をみたす不動点演算子をもつ。
3. **C** は naturality と Bekic property をみたす不動点演算子をもつ。

□

条件 2、3 の詳細は省略する ([Has97a]を参照のこと)。ここでは、これらの条件は、従来の再帰的プログラムのモデルのほとんどすべてについて成立しているということを指摘するにとどめておく。たとえば、領域理論の知られているすべてのモデルはトレースを持つ。このことは、最小不動点演算子がこの定理の条件 2 および 3 を満たすことからわかる。また、必ずしも最小不動点によらないモデル（たとえば長谷川立の研究 [Has98]を参照）であっても、ほとんどの場合トレースが再帰プログラムの解釈を特徴づけていることがわかっている。

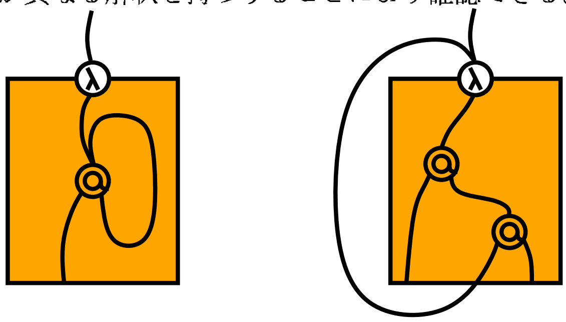
3.2　巡回的グラフ書き換え系

一方、再帰的プログラムの巡回的グラフ表現が絡み目の図に酷似していることから、この解釈がト

レース付きモノイダルカテゴリを与えていることは、直感的にも明らかである。巡回的グラフ書き換え系のモデルを与えるには、テンソル積が必ずしも直積になっていないような、表示的意味論よりももう少し一般化した場合を考える必要があるが [Has97b]、筆者は、そのような場合についても、トレースの存在が再帰的プログラムのモデルを与えることを示している：

定理 3.2 （長谷川） テンソル積が直積であるようなモノイダルカテゴリから、トレース付きモノイダルカテゴリへのシンメトリックモノイダル随伴が存在するとき、トレース付きモノイダルカテゴリは dinatural な不動点演算子を持つ。 □

術語の詳細およびこのような数学構造を用いたグラフ書き換え系の意味論については、[Has97b]を参照されたい。こうして得られた新しい再帰的プログラムのモデルでは、従来のモデルよりも精密に再帰的プログラムの分類を行うことができ、より緻密にプログラムの性質を調べる基礎となることが期待される。たとえば、巡回的ラムダ計算 [AB97]において、不動点演算子の以下のようなふたつの実装は異なるふるまいを示すことが経験的に知られているが、このことは、実際に我々の新しいモデルにおいてこれらが異なる解釈を持ちうることにより確認できる。



言い換えれば、我々のモデルは、巡回的グラフ書き換え系のための新しい「不変量」を与えているのである（本稿のはじめに紹介した絡み目の不変量の話と比較されたい）。

4 おわりに

本稿では、再帰的プログラムの意味論が、トレース付きモノイダルカテゴリという、絡み目のような巡回的数学構造のためのカテゴリ論的枠組みの中で展開できることを報告した。とくに強調しておきたいのは、このアイデアが、単に知られていた事柄を説明しなおすにとどまらず、新たな再帰的プログラムのためのモデルの発見につながっているということである。この研究に関連して、トレース付きモノイダルカテゴリを基礎に置いた、再帰的または巡回的なプログラムの構造とそのための数学理論の研究が、さまざまな側面から進められていることを記しておく [BCS98] [Has98] [Jef98]。

謝 辞

本研究に関して、 Martin Hyland、 John Power 両氏から有益なコメントと励ましを頂いた。

参考文献

[Ada94] Adams, C.C. (1994), "The Knot Book", W.H. Freeman. 邦訳：「結び目の数学」(金信泰造訳, 1998), 培風館.

[AB97] Ariola, Z.M., and Blom, S. (1997), Cyclic lambda calculi, *in* "Proceedings, Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'97)", *Lecture Notes in Comput. Sci.* 1281, pp. 77-106, Springer-Verlag.

[BCS98] Blute, R.F., Cockett, J.R.B. and Seely, R.A.G. (1998), Feedback for linearly distributive categories: traces and fixpoints, draft.

[Has97a] Hasegawa, M. (1997), Recursion from cyclic sharing: traced monoidal categories and models of cyclic lambda calculi, *in* "Proceedings, Typed Lambda Calculi and Applications (TLCA'97)", *Lecture Notes in Comput. Sci.* 1210, pp. 196–213, Springer-Verlag.

[Has97b] Hasegawa, M. (1997), "Models of Sharing Graphs (A Categorical Semantics of Let and Letrec)", PhD thesis, ECS-LFCS-97-360, University of Edinburgh.

[Has98] Hasegawa, R. (1998), Two applications of analytic functors, to appear.

[Jef98] Jeffrey, A. (1998), Premonoidal categories and a graphical view of programs, draft.

[JS93] Joyal, A., and Street, R. (1993), Braided tensor categories. *Adv. Math.* 102, 20–78.

[JSV96] Joyal, A., Street, R., and Verity, D. (1996), Traced monoidal categories, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **119** (3), 447–468.

[RT90] Reshetikhin, N.Yu. and Turaev, V.G. (1990), Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.* 127, 1–26.

[Sco69] Scott, D. (1969), A type-theoretical alternative to CUCH, ISWIM, OWHY, privately circulated memo, Oxford; published in *Theoret. Comput. Sci.* 121 (1993), 233–247.

[Tur79] Turner, D.A.(1979), A new implementation technique for applicative languages. *Software – Practice and Experience* 9, 31–49.