入学試験問題

専門科目

◎　問題は １１題 ある。
そのうち 2題 を解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ $f(x)$ を $\mathbf{Q}$ 上の奇数次既約多項式とする．今，方程式 $f(x)=0$ の $\mathbf{C}$ における根 α を1つとったとき，$\mathbf{Q}(\alpha)$ が $\mathbf{Q}$ 上の Galois 拡大になったとする．このとき，$f(x)=0$ のすべての根は実根であることを示せ．

$\boxed{2}$ $n,d\geq 1$ とする．変数 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ についての実係数の d 次多項式 $f(x)$ が与えられたとし，変数 $y_i=(y_{i1},\ldots,y_{in})$ $(i=1,\ldots,d)$ を導入する．$x,y_1,\ldots,y_d$ についての多項式

$$F(x,y_1,\ldots,y_d)=\sum_{a_1=0}^{1}\cdots\sum_{a_d=0}^{1}(-1)^{d-(a_1+\cdots+a_d)}f(x+a_1y_1+\cdots+a_dy_d)$$

を定義する．例えば，$d=1,2$ の場合には，

$$F=f(x+y_1)-f(x) \qquad (d=1)$$
$$F=f(x+y_1+y_2)-f(x+y_1)-f(x+y_2)+f(x) \qquad (d=2)$$

である．

以下を示せ．

(i) $F(x,y_1,\ldots,y_d)$ は (0 でない) d 次斉次式である．

(ii) $F(x,y_1,\ldots,y_d)$ は x によらない．

(iii) $F(x,y_1,\ldots,y_d)$ は各 i に対して他の変数をパラメータと見て $y_i=(y_{i1},\ldots,y_{in})$ だけの多項式と考えると，(0 でない) 1 次斉次式である．

$\boxed{3}$ 次の (A)，(B) のうちいずれか一方を選んで解答せよ．(解答用紙には，問題番号欄に 3A あるいは 3B と記入せよ．)

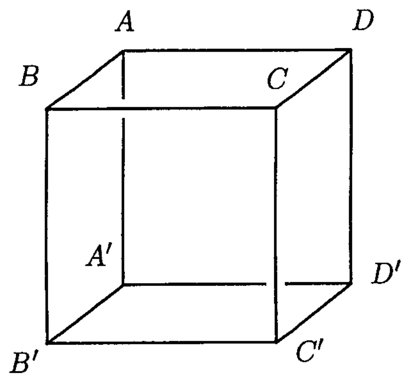
(A) 複素 $2n-1$ 次元射影空間 $\mathbf{P}^{2n-1}$ とその斉次座標 $(x_0:\cdots:x_{2n-1})$ を考える．今，2つの $n-1$ 次元線形部分空間 $L_1,L_2\subseteq\mathbf{P}^{2n-1}$ が交わらない $(L_1\cap L_2=\emptyset)$ と仮定する．このとき，ある正則対称行列 $B\in GL(2n,\mathbf{C})$，${}^tB=B$ が存在して

$$\left\{(x_0:\cdots:x_{2n-1})\in\mathbf{P}^{2n-1}\ ;\ (x_0,\ldots,x_{2n-1})\,B\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_{2n-1}\end{pmatrix}=0\right\}$$

が $L_1\cup L_2$ を含むことを示せ．

(B) 複素 n 変数形式的べき級数環 $R=\mathbf{C}[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$ 上の有限生成加群 M,N を考える．もし $M\otimes_R N$ が R 加群として R と同型ならば，M および N も R と同型になることを示せ．

4



図の様に頂点 $A, B, C, D, A', B', C', D'$ を持つ正立方体を考える．その (下面を除く) 5 つの面，$ABCD$ (上面)，$AA'B'B$ (左面)，$BB'C'C$ (正面)，$CC'D'D$ (右面)，$ADD'A'$ (後面) の中点をそれぞれ a, b, c, d, e と名付ける．立方体の外接球を K とし，3 つの線分 $\overline{ea}, \overline{bc}, \overline{dc}$ をそれぞれ (a および c 方向に) 延長して K と交わる点をそれぞれ P, Q, R とおく．

(i) 5 点 P, Q, R, B, C は平面正 5 角形の頂点となることを示せ．

(ii) 立方体の対頂点を結ぶ 4 本の対角線を軸に $2\pi/3$ 回転する 4 つの変換で生成される群を Γ とする．Γ で上記の正 5 角形を運動させてできる図形は何か？ また，群 Γ の位数を求めよ．

5 $\nu \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ として，微分方程式

$$\left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)\right] f(z) = 0$$

を満たす (多価) 解析関数 $f(z)$ に対し $g(z) = f(z)/z^\nu$ とおく．

(i) $g(z)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(ii) 次の (a), (b) を仮定する．

(a) $g(z)$ は整関数．

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して定数 C_ϵ が存在し，次の評価式が成り立つ:

$$|g(z)| \le C_\epsilon \exp\left(\epsilon|z| + |\mathrm{Im}\, z|\right).$$

このとき，

$$g(z) = \int \exp(iz\zeta)\varphi(\zeta)\, d\zeta$$

となる (超) 関数 $\varphi(\zeta)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ $n \geq 0$ を整数とし，次の 2 つの微分方程式

(a) $$\frac{d^2u}{dt^2} = u + t^n$$

(b) $$\frac{d^2u}{dt^2} = u^2 + t^n$$

を $t \geq 0$ で考える.

(i) 方程式 (a) を初期条件 $u(0) = \alpha$, $\frac{du}{dt}(0) = \beta$ (α, β は任意の実数) で解くとき，解はすべての $0 \leq t < \infty$ で存在することを示せ.

(ii) 方程式 (b) を (i) と同じ初期条件で解く．このとき，(解が存在するとして) 十分大きな t について $u(t)$ は単調増大であることを示せ．さらに，これを用いて α, β が何であっても解は必ず爆発すること，すなわち，$\lim_{t\to t_0}|u(t)| = \infty$ となる $t_0 < \infty$ が存在することを示せ.

$\boxed{7}$ Hilbert 空間 H 上の強連続ユニタリ群 U_t, $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$Q(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} U_t \, dt$$

とする.

(i) $H = \mathbf{C}$, $U_t = e^{it}$ の場合に，$Q(x)$ の値を求めよ.

(ii) $H = \mathbf{C}^n$, $U_t = e^{itA}$ の場合に，次の関係式を示せ．ただし，A は実対称行列とする.

(*) $$Q(x)Q(y) = Q(y)Q(x) = Q(x) \qquad (0 \leq x < y)$$

(iii) 一般の場合に，関係式 (*) を示せ.

$\boxed{8}$ 有限集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合全体を 2^V で表わす．関数 $f : 2^V \to \mathbf{R}$ が次の条件

(a) $$f(\emptyset) = 0$$

(b) $$\forall X, Y \subseteq V : f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

を満たすとする．与えられた非負ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ に対して最適化問題

$$[P] \qquad \begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{i\in V} w_i x_i \\ \text{制約} & \sum_{i\in X} x_i \leq f(X) \qquad (\forall X \subseteq V) \end{array}$$

を考える.

(i) 問題 [P] の双対問題を記せ.

(ii) $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ のとき

$$\hat{x}_i = f(V_i) - f(V_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と定めた $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ が [P] の最適解であることを示せ．ただし，$V_i = \{1, \ldots, i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $V_0 = \emptyset$ とする.

(iii) 双対問題の最適解を求めよ.

$\boxed{9}$ 次の(A), (B)のうちいずれか一方を選んで解答せよ.(解答用紙には, 問題番号欄に9Aあるいは9Bと記入せよ.)

(A)

(i) 非粘性流体に対する運動方程式(3次元Euler方程式)を用いてポテンシャル流に対するBernoulliの定理を導け. ただし、流体の密度ρは一定とし, 外力はポテンシャルΦを用いて$-\nabla\Phi$と与えられているものとせよ. ただし, $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$とする.

(ii) 断面積Aの鉛直に置かれた円柱容器に液体が高さhまで満されている. 下面に小さな断面積$a(<< A)$を持つ長さlの細い管を水平に取り付ける. 管の先端を突然開くと液体が流れはじめ, やがて定常的に流れるようになる. 管内流速を$v(t)$とするとき, この細い管の中のポテンシャルは近似的に$\Phi = xv(t)$ (+定数)と書けることを説明せよ. ただし, x座標系は管の先端を原点に持ち, 管に平行にとるものとする. また, 液面の降下および粘性による散逸の効果は無視せよ.

(iii) $v(t)$の満たす微分方程式を導き,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{2gh}$$

となることを証明せよ. ただし, gは重力加速度である.

(B) $\omega = e^{2\pi i/3}$とおき, 領域

$$D = \{x + y\omega\,;\, 0 < y < x,\ 0 < x < 2\pi/3\}$$

を考える. このDの座標付けで

$$\varphi_1 = 2x - y, \quad \varphi_2 = 2y - x, \quad \varphi_3 = -x - y$$

とおいたとき, 任意の整数a, bに対し

$$\psi_{a,b} = C\begin{vmatrix} e^{ia\varphi_1} & e^{ib\varphi_1} & e^{i(a+b)\varphi_1} \\ e^{ia\varphi_2} & e^{ib\varphi_2} & e^{i(a+b)\varphi_2} \\ e^{ia\varphi_3} & e^{ib\varphi_3} & e^{i(a+b)\varphi_3} \end{vmatrix} \qquad (C\text{は規格化定数})$$

は, D内に閉じ込められた自由粒子に対する非相対論的量子力学の定常状態を記述することを示せ. また, 対応するエネルギー固有値を求めよ. ただし, 粒子の質量をmとし, プランク定数を$2\pi\hbar$とおく.

10 可算無限個の定数記号 c_i ($i \in \mathbf{N}$), 1 変数の関数記号 s および 2 変数の述語記号 P をもち, 非論理公理 (nonlogical axiom) として

$$
\begin{aligned}
&\neg\exists x.P(x,x)\\
&\forall x.\forall y.\forall z.P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)\\
&\forall y.\exists x.P(x,y)\\
&\forall x.P(x,s(x))\\
&\forall x.P(x,c_i) \to P(s(x),c_i) \quad (i \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

をもつ一階述語論理の理論を T とする. このとき, T は無矛盾 (consistent) であることを証明せよ.

11 基底型 b を持つ型付きラムダ計算の型と項を次のとおり定義する.

$$
\begin{array}{llll}
\text{型} & \tau & ::= & b \mid \tau \to \tau \\
\text{項} & M & ::= & x \mid \lambda x:\tau.M \mid (MM)
\end{array}
$$

型環境 Γ は変数の有限集合から型の集合への関数とし, 型判定を $\Gamma \rhd M : \tau$ と書く. その型判定の導出規則は下記の 3 つである.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(var)} & \Gamma \rhd x : \tau \qquad \text{if } \Gamma(x) = \tau \\[2ex]
\text{(abs)} & \dfrac{\Gamma\{x:\tau_1\} \rhd M : \tau_2}{\Gamma \rhd \lambda x:\tau_1.M : \tau_1 \to \tau_2} \\[3ex]
\text{(app)} & \dfrac{\Gamma \rhd M_1 : \tau_2 \to \tau_1 \qquad \Gamma \rhd M_2 : \tau_2}{\Gamma \rhd (M_1\ M_2) : \tau_1}
\end{array}
$$

ただし, 記法 $\Gamma\{x:\tau\}$ は, $\Gamma\{x:\tau\}(x) = \tau$ かつ, $x \neq y$ なる y に対して $\Gamma\{x:\tau\}(y) = \Gamma(y)$ となる型環境を表す.

(i) 任意の項 M に対して, 空の型環境 $\emptyset$ のもとで型判定 $\emptyset \rhd M : \tau$ が導出できるとき, M は自由変数を含まないことを示せ.

(ii) 任意の項 M に対して, 型判定 $\emptyset \rhd M : \tau$ が導出できるとき, τ は唯一に定まることを示せ. すなわち $\emptyset \rhd M : \tau$ と $\emptyset \rhd M : \tau'$ が導出できれば, 必ず $\tau = \tau'$.