平成１４年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある。５題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$　$n \geq 1$ は整数とし，A は $A^2 = 0$ を満たす n 次複素正方行列とする．このとき，条件

$$PAP^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{a} & \overbrace{\quad}^{a} & \overbrace{\quad}^{b} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & E_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}a \\ \}a \\ \}b \end{array}$$

を満たす可逆な n 次正方行列 P と，$2a + b = n$ なる整数 $a, b \geq 0$ が存在することを示せ．ただし，E_a は a 次単位行列を表す．

$\boxed{2}$　$m \geq 1$，$n \geq 1$ は整数，A は $m \times n$ 実行列とする．A を線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ と考え，その像を V（$\subseteq \mathbf{R}^m$）とする．このとき，行列の積 $A{}^t\!A$ を線形写像 $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ と考えれば，V の $A{}^t\!A$ による像は V 全体に等しいことを示せ．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列を表す．

$\boxed{3}$　複素数 z，整数 $n \geq 1$ に対して 2×2 行列

$$A_n(z) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} z & 1 - z + \dfrac{1}{z} \\ 0 & 1 + \dfrac{1}{z} \end{pmatrix}^n$$

を考える．このとき単位円 $\Gamma = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$ に沿う（反時計回りの）線積分

$$\int_\Gamma A_n(z)dz \tag{1}$$

は n によらないことを証明せよ．ただし，(1) は成分ごとに積分を行って得られる行列とする．

$\boxed{4}$　$\mathbf{N}$ を非負整数全体からなる集合，$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ とし，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}^*$ への関数全体からなる集合を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ からそれ自身への写像 φ を次で定義する：任意の $f \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\varphi(f)(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ f([n/2]) + 1 & (n \neq 1). \end{cases}$$

このとき，φ の不動点（すなわち，$\varphi(f) = f$ を満たす $f \in \mathcal{F}$）をすべて求めよ．ただし，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\infty + n = n + \infty = \infty + \infty = \infty$ とし，Gauss 記号 $[n/2]$ は $n/2$ を越えない最大の整数とする．

$\boxed{5}$ 正の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が収束しているとする．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ．

(ii) 任意の $x>0$ に対して，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)$$

が収束することを示せ．

(iii)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)\right\}=0$$

が成り立つことを示せ．