平成１４年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎ 問題は １１題 ある。
そのうち <u>２題</u> を解答せよ。

◎ 解答時間は　<u>２時間３０分</u>　である。

◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　<u>禁止</u>　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ 整数 $n \geq 1$ に対して，1 の原始 n 乗根を

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} \in \mathbf{C}$$

と書く．このとき，

(i) ζ_n を有理数体 $\mathbf{Q}$ に添加して得られる体 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ が，$\mathbf{Q}$ の有限次アーベル拡大になることを示せ．

(ii) 体 $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ の元 x で $x^3 = 5$ を満たすものがないことを示せ．

$\boxed{2}$ 素数 $p > 2$ に対して，p 個の元からなる有限体を，$\mathbf{F}_p$ と書く．なお，$\mathbf{F}_p$ の元を成分とする，行列式が 1 となる 2×2 行列全体が，(掛け算に関して) 成す行列群を

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;\, a, b, c, d \in \mathbf{F}_p,\, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

と表す．以下では，位数 2 の巡回群への準同型

$$\varphi\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

が与えられたとして，その核 $K = \mathrm{Ker}(\varphi)$ について考える．

(i) K は必ず部分群

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p) ;\, a = d = 1,\, c = 0 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$$

とそのすべての $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ 共役を含むことを示せ．

(ii) 任意の $(x, y) \in \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$ （ただし，$(x, y) \neq (0, 0)$ とする）に対して，

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす $T \in K$ が存在することを示せ．

(iii) K は必ず $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ 全体となることを示せ．

$\boxed{3}$ 方程式 $y^2 = x^2 - x^3$ に関連する，次の各問に答えよ．

(i) 多項式 $f, g \in \mathbf{R}[t]$ であって，写像

$$\alpha(t) = (f(t), g(t))\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$$

が次の 3 条件を全て満たす f, g を 1 組求めよ．

(1) $\alpha(1) = \alpha(-1) = (0, 0)$,

(2) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して，$g(t)^2 = f(t)^2 - f(t)^3$,

(3) $x \neq 0, y^2 = x^2 - x^3$ を満たす任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して $\alpha^{-1}(x, y)$ がちょうど 1 点からなる．

(ii) 一変数多項式環の部分環 $A = \{h \in \mathbf{R}[t] ;\, h(1) = h(-1)\}$ に対して，環としての同型写像

$$\mathbf{R}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \to A$$

を 1 つ求めよ．

$\boxed{4}$ $n\times n$ 行列 $A(x,t), B(x,t)$ の各成分は，実変数 (x,t) の C^∞ 級関数であって，x に関しては周期 π をもつ周期関数とする．このとき，$n\times n$ 行列 $U(x,t)$ を未知関数とする連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}U &= A(x,t)U \qquad \cdots ① \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U &= B(x,t)U \qquad \cdots ② \end{cases}$$

を考える．この連立微分方程式が至る所 $\det V \neq 0$ を満たす C^∞ 級の解 $V(x,t)$ を持つと仮定して，以下の問に答えよ．

(i) 等式

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + AB - BA = 0$$

が成り立つことを示せ．また，$M(t) = V(0,t)^{-1}V(\pi,t)$ とおくとき，M は t によらないことを示せ．

(ii) 次に，至る所 $\det W \neq 0$ を満たす，①の C^∞ 級の解 $W(x,t)$ が与えられたとする．(ただし，$W(x,t)$ が②を満たすとは仮定しない．) このとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) - B(x,t)W(x,t)$$

も①を満たすことを示せ．さらに，$N(t) = W(0,t)^{-1}W(\pi,t)$ とおくとき，

$$\frac{d}{dt}N(t) = N(t)\Lambda(t) - \Lambda(t)N(t)$$

を満たす行列 $\Lambda(t)$ が存在することを示せ．

(iii) $N(t)$ の固有値は t によらないことを示せ．

$\boxed{5}$ 区間 $[0,1)$ 上の関数 $X_n(\omega)$ ($\omega\in[0,1)$，$n=1,2,\dots$) を，2 進法による ω の小数展開

$$\omega = 0\,.\,a_1(\omega)a_2(\omega)\cdots \qquad (a_n(\omega)\in\{0,1\})$$

を利用して，

$$X_n(\omega) = 1 - 2a_n(\omega)$$

で定義する．さらに，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ を満たす実数列 $\{c_n\}$ を 1 つ与えて，

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(\omega)$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 e^{\sqrt{-1}\,x\,Y_n(\omega)}d\omega \qquad (x\in\mathbf{R})$$

とおく．次の問に答えよ．

(i) $\varphi_n(x)$ を具体的に求めよ．それを利用して，$n\to\infty$ のとき，$\varphi_n(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で各点収束することを，次の (A)，(B) の場合に分けて証明せよ．

$$\text{(A)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \qquad\qquad \text{(B)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty.$$

(ii) (A) の場合 $Y_n(\omega)$ は $[0,1)$ 上 L^2 収束するが，(B) の場合には L^2 収束しないことを示せ．

$\boxed{6}$ C^∞ 級実数値関数の空間 X を

$$X = \{f\,;\, f(x) \text{ は } 0 \le x \le 1 \text{ で } C^\infty \text{ 級かつ } f(0)=0,\ f(1)=1\}$$

で定義する.

(i) 次で定義される X 上の汎関数 J, K について, 最大値・最小値のそれぞれが存在するかどうか, 理由とともに答えよ. 存在する場合にはそれを達成する関数 $f \in X$ を全て求めよ.

$$J(f) = \int_0^1 \left[(f(x))^2 + (f'(x))^2\right] dx, \qquad K(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+(f'(x))^2}.$$

(ii) 汎関数

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

の X における最小値が $\sqrt{2}$ であることを証明せよ.

$\boxed{7}$ 平面極座標 (r, θ) で, r 方向の速度がゼロで θ 方向の速度 $v(r)$ が

$$v(r) = \frac{A}{r} \qquad (r \neq 0)$$

である流れを考える. ここで A は正定数とする.

(i) この流れが $r \neq 0$ において非圧縮性条件を満足し, かつ, 渦なしであることを確認せよ.

(ii) 時刻 $t=0$ において, $\theta=$ 一定, $r_1 \le r \le r_2$ により定まる線分をなす流体要素にインクでしるしをつける $(r_2 > r_1 > 0)$. 時間が経つにつれ, この線分は流れによって引き伸ばされていく. 時刻 t における, インクのついた流体からなる曲線の長さ $L(t)$ を具体的に計算し, $t \to \infty$ における漸近的な振舞いを求めよ.

(iii) 同様に, 微小な長さをもつ流体線要素の引き伸ばしを考える. $t=0$ で r 方向から角度 α $(-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2)$ だけ傾けて原点以外に微小な線要素を置く. このとき微小時間に最も長く引き伸ばされる角度 α を答えよ.

$\boxed{8}$ 複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を考え，その上の内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す．$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $\mathcal{F}$ と書き，$1_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の恒等写像とする．線形写像 $\gamma\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ で $\gamma(FF') = \gamma(F)\gamma(F')$ $(\forall F, F' \in \mathcal{F})$，$\gamma(F^*) = \gamma(F)^*$ $(\forall F \in \mathcal{F})$，かつ $\gamma^2 = 1_{\mathcal{F}}$ を満たすものが存在し，$\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-,$$
$$\mathcal{F}_\pm = \{F_\pm \in \mathcal{F};\, \gamma(F_\pm) = \pm F_\pm\} \qquad \text{(複号同順)}$$

と分解できているものとする．$\mathcal{F}_+$ の元を Bose 場，$\mathcal{F}_-$ の元を Fermi 場と呼ぶ．

$\mathcal{F}\Omega$ が $\mathcal{H}$ で稠密，すなわち $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}\Omega}$ となる $\Omega \in \mathcal{H}$ が与えられているとし，状態 $\omega\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ を $F \mapsto \langle\Omega|F\Omega\rangle$ $(F \in \mathcal{F})$ で定義する．状態 ω が γ で不変なとき，ω は「Bose-Fermi 超選択則を満たす」という．

(i) ω が Bose-Fermi 超選択則を満たすことと

$$\omega(F_-) = 0 \qquad \forall F_- \in \mathcal{F}_-$$

は同値であることを示せ．

(ii) 空間次元 s の平坦時空で，空間ベクトル $x \in \mathbf{R}^s$ による $F \in \mathcal{F}$ の空間並進を $F(x) \in \mathcal{F}$ と書く ($\mathbf{R}^s \ni x \mapsto F(x)$ は $\mathcal{F}$ の適当な位相で連続とする)．任意の Fermi 場 $F_-, F'_- \in \mathcal{F}_-$ に対して Euclid ノルム $|x|$ を十分大きくとれば $F_-(x)F'_- + F'_-F_-(x) = 0$ が成り立つものとする．このとき状態 ω が空間並進不変，すなわち $\omega(F(x)) = \omega(F)$ $(\forall F \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbf{R}^s)$，であれば ω が Bose-Fermi 超選択則を満たすことを証明せよ．なお，任意の空でない有界領域 $V \subset \mathbf{R}^s$ に対して

$$\omega(F) = \frac{1}{|V|}\int_V \omega(F(x))\,dx \quad (\forall F \in \mathcal{F}), \qquad \text{ただし} \quad |V| = \int_V dx$$

が成り立つことに注意せよ．

$\boxed{9}$ $x_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n)$ を変数とする線形計画問題

$$\text{(P)} \qquad \text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij}$$
$$\text{制約} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n)$$

を考える．

(i) 問題 (P) の双対問題 (D) を与えよ．

(ii) a_i $(i = 1, \ldots, m)$，b_j $(j = 1, \ldots, n)$ が整数ならば問題 (P) は整数値の最適解をもつことを証明せよ．

(iii) w_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n)$ が整数ならば双対問題 (D) は整数値の最適解をもつことを証明せよ．

(iv) $a_i = b_j = w_{ij} = 1$ $(i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n)$ の場合に，二つの問題 (P)，(D) の間に成り立つ強双対性の意味を，グラフ上のマッチング問題との関連で論ぜよ．

$\boxed{10}$ g を，2つの正の整数 x，y に対し，その最大公約数 $g(x,y)$ を与える関数とする．

(i) x, y と $g(x,y)$ の関係を一階述語の論理式で表せ．ただし，関数記号としては，g に加えて，加法，乗法（$+$，$*$），また述語記号としては等号と不等号（$=$，$<$，$\leq$）のみを用いよ．

(ii) g を計算するような再帰的プログラムを書き，その正しさを示せ．ただし，用いてよい基本演算は，整数の間の比較（≤，<，=），加法，乗法および減法（+，*，-）のみとする．(特定のプログラミング言語の細かい文法にこだわる必要はない．)

$\boxed{11}$ 型なしのラムダ式に関する以下の問に答えよ．ただし，$\rightarrow^*$ は β 変換の反射的推移的閉包を表すものとする．また，以下，$T = \lambda xy.y$，$F = \lambda xy.y$ とする．

(i) 次の条件を満たす閉じたラムダ式 M を与えよ：$P = \lambda v.vMT$，$Q = \lambda v.vMF$ としたとき，

$$\begin{array}{llll} PP \rightarrow^* P & \text{かつ} & PQ \rightarrow^* Q & \text{かつ} \\ QP \rightarrow^* Q & \text{かつ} & QQ \rightarrow^* Q & \end{array}$$

(ii) 次の条件を満たす閉じたラムダ式 L を与えよ：

$$\lambda zw.b_1 \cdots b_k \qquad (k \geq 1,\ \text{各 } b_i \text{ は } z \text{ か } w \text{ のいずれか})$$

の形をした任意のラムダ式 B について

$$LB \rightarrow^* \begin{cases} T & (b_1, \ldots, b_k \text{ が全て } z) \\ F & (\text{それ以外}). \end{cases}$$