

入学試験問題

基礎科目

- ◎ 問題は 5 題 ある。5 題 とも解答せよ。
- ◎ 解答時間は 2 時間 30 分 である。
- ◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する。

[注意]

- 1 指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
- 2 解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
- 3 解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。
1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
- 4 提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
- 5 この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の Z, N, Q, R, C は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

- 1] 有限次元実線形空間 X, Y に対し, X から Y への線形写像全体を $\text{Hom}(X, Y)$ と記す. $\text{Hom}(X, Y)$ を, 写像の和とスカラー倍により線形空間とみなす. このとき, X の部分線形空間 V と Y の部分線形空間 W に対し,

$$\{f \in \text{Hom}(X, Y) \mid f(V) \subset W\}$$

の次元を, X, Y, V, W の次元を用いて表せ.

- 2] $A(x)$ は x の実係数多項式を要素とする n 次正方行列で,

$$\begin{aligned} A(0) &= I_n \text{ (単位行列)}, \\ A(x+y) &= A(x)A(y) \quad (x, y \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

を満たすとする. このような $A(x)$ をすべて求めよ.

- 3] M を 3 次実正則行列とする. M^n ($n \in \mathbf{Z}$) の各成分が有界ならば, $M\vec{x} = \vec{x}$ または $M\vec{x} = -\vec{x}$ を満たす $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ が存在することを示せ.

- 4] $S = (s_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ を正定値 n 次実対称行列とし,

$$Q(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n) S \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j, k \leq n} s_{jk} p_j p_k$$

とおくとき, 級数

$$\sum_{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}} \frac{1}{Q(p_1, \dots, p_n)^\lambda}$$

が収束するような実数 λ の範囲を求めよ.

- 5] 複素平面 \mathbf{C} 上の 4 点 $1, i, -1, -i$ にそれぞれ 1 匹ずつ蟻がおり, 各々を A, B, C, D と名づける. 今, 時刻 $t=0$ から, 4 匹の蟻が動き始め, 蟻 A は常に蟻 B に向かって, 蟻 B は蟻 C に, 蟻 C は蟻 D に, 蟻 D は蟻 A に向かって歩くものとする. (下図参照. この図の意味についての質問は受け付けない. 各自推測せよ.) さらに 4 匹の蟻の歩く速さは同一の定数 c であるものとする. このとき次の (i)(ii) に答えよ.

- (i) 蟻 A の動く曲線を求めよ.
(ii) 4 匹の蟻が衝突する時刻を求めよ.

ただし, 蟻の大きさは無視せよ.

