平成１５年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎ 問題は １０題 ある。
そのうち 2題 を解答せよ。

◎ 解答時間は　2時間３０分　である。

◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

［注意］
1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

［記号について］
設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ $\mathbf{C}$ の元 $i=\sqrt{-1}$ と $\sqrt{3}$ を $\mathbf{Q}$ に添加して得られる体 $K=\mathbf{Q}(i,\sqrt{3})$ を考える．K の元 α で，$\alpha^4=-3$ を満たすものは存在しないことを示せ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{C}[x]$ は複素 1 変数多項式環とする．この環の中で $\mathbf{C}$ 上 x^2 と x^3 で生成される部分環を R とする．また，R に属さない多項式 $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ をとり，$f(x)$ で生成される $\mathbf{C}[x]$ のイデアルを I とする．このとき，共通部分 $I\cap R$ は R のイデアルとして 2 個の元で生成されることを示せ．また，1 個の元では生成されないことを証明せよ．

$\boxed{3}$ 2 次元球面 S^2 にリー群の構造を入れることができるか？ また，その証明を述べよ．

$\boxed{4}$ K を実直線 $\mathbf{R}$ に含まれる閉区間 $[-1,1]$ とし，$\mathbf{C}$ 内の開集合 U が K を含むとする．以下 $\mathcal{O}(U)$ および $\mathcal{O}(U\backslash K)$ は各々 U および $U\backslash K$ で正則な関数全体のなす $\mathbf{C}$-ベクトル空間を表わすものとし，$\mathcal{O}(K)$ は K のある複素連結近傍で正則な関数全体のなす $\mathbf{C}$-ベクトル空間を表わすものとする．この時，商ベクトル空間 $\mathcal{O}(U\backslash K)/\mathcal{O}(U)$ の元 $[f]$ および $\mathcal{O}(K)$ の元 g に対し，$[f]$ の代表元 $f\in\mathcal{O}(U\backslash K)$ を一つ取り，積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma f(z)g(z)dz$$

を考える．ただし γ は K のまわりを（正の向きに）一周し，かつ $U\backslash K$ および g の定義域に含まれる滑らかな閉曲線とする．この時以下の (i)，(ii) を示し，さらに (iii) に答えよ．

(i) 積分値は代表元 f および積分路 γ の取り方によらずに定まる．

(ii) 上の積分により定められる双線形写像

$$F:(\mathcal{O}(U\backslash K)/\mathcal{O}(U))\times\mathcal{O}(K)\to\mathbf{C}$$

は非退化である．ただし双線形写像 $F:A\times B\to C$ が非退化であるとは F が次の 2 つの条件 (A)，(B) を満たすことを意味する．

(A) $F(a,b)=0$ が任意の $b(\in B)$ に対して成り立つならば $a=0$.

(B) $F(a,b)=0$ が任意の $a(\in A)$ に対して成り立つならば $b=0$.

(iii) 次の性質 (P) を持つ $\mathcal{O}(U\backslash K)$ の元の列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ は存在するか．

(P) すべての n に対し $F([f_n],g)=0$ が成り立つような g は 0 のみである．

$\boxed{5}$ (a) $\mathbf{C}$ 上の Hilbert 空間 X における有界線形作用素 T が

$$\|I+T\| \le 1 \text{ と } \|I-T\| \le 1 \text{ を満たすならば } T=0 \text{ である} \quad (\sharp)$$

(ただし I は恒等作用素である). これを証明せよ.

(b) 同じ命題 $(\sharp)$ が Banach 空間の場合にも成立することを次の要領で証明せよ.

(i) レゾルベント $R(z)=(zI-T)^{-1}$ ($z \in \mathbf{C}$) は $|z+1|>1$ において正則であることを証明せよ.

(ii) $R(z)$ は実は $z \neq 0$ で正則で, かつ, $z=0$ で高々 2 位の極を持つことを示せ.

(iii) 任意の自然数 n に対して $(I+T)^n = I+nT$ が成り立つことをを示せ.

(iv) $T=0$ であることを示せ.

$\boxed{6}$ $\mathbf{R}^1$ 上でルベーグ積分可能な関数 f で, 2条件

$$f(x) \ge 0 \text{ a.e.}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を満たすものの全体を $\mathcal{P}$ で表し, $f \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\begin{aligned} \check{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}x\xi} f(x)dx \qquad (\xi \in \mathbf{R}^1), \\ \nu_f(M) &= \int_{|x|>M} f(x)dx \qquad (M>0) \end{aligned}$$

とおく.

(i) 任意の正数 M に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\nu_f(2M) \le M \int_{-\frac{1}{M}}^{\frac{1}{M}} (1-\check{f}(\xi))d\xi.$$

(ii) $\mathcal{P}$ 内の関数列 $\{f_n\}_{n\ge 1}$ に対して, 各点 ξ で極限

$$g(\xi) = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n(\xi)$$

が存在し, しかも, 関数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ は原点において連続とする.
このとき, 任意の正数 ε に対して, 正数 M が存在して, 次の性質が成り立つことを示せ.

$$\text{任意の } n \ge 1 \text{ に対して, } \nu_{f_n}(2M) < \varepsilon. \qquad (*)$$

(iii) 上の (ii) において, 極限 g が原点で不連続ならば, 一般に $(*)$ は成立しない. このことを反例によって示せ.

$\boxed{7}$ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で正準交換関係 $[X,P]=iI$ を満たす自己共役作用素 X,P が与えられたとする．ただし，$i=\sqrt{-1}$，I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素．X,P の定義域などに関する技術的詳細は無視してよい．

量子－古典対応を考えるため，上の X,P で記述される量子系に対応する古典系が，直交座標 (x,p) を持つ相空間 $\mathbf{R}^2$ 上で与えられたとしよう．古典的物理量 $f(x,p)$ が与えられたとき，対応する量子的作用素

$$F_\alpha := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\xi X+\mu P)}e^{i\alpha\xi\mu}\hat{f}(\xi,\mu)d\xi d\mu$$

を考える．ただし α は実数の定数で，$\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi,\mu) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-i(\xi x+\mu p)}f(x,p)dxdp$$

である．

(i) t,s を実定数として，$f(x,p)=e^{i(tx+sp)}$ に対する F_α を計算せよ．

(ii) $f(x,p)=x^m p^n$（m,n は非負整数）のとき，$\alpha=\pm\frac{1}{2},0$ における F_α の具体形を求めよ．

$\boxed{8}$ 次の Euler 方程式に従う 3 次元非粘性非圧縮性流体 $(\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0)$ の定常運動を考える．

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p.$$

ここで $\boldsymbol{u}=(u_1(x_1,x_2,x_3),u_2(x_1,x_2,x_3),u_3(x_1,x_2,x_3))$，$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$，$p$ は圧力，ρ_0 は流体密度（定数）とする．

(i)

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$$

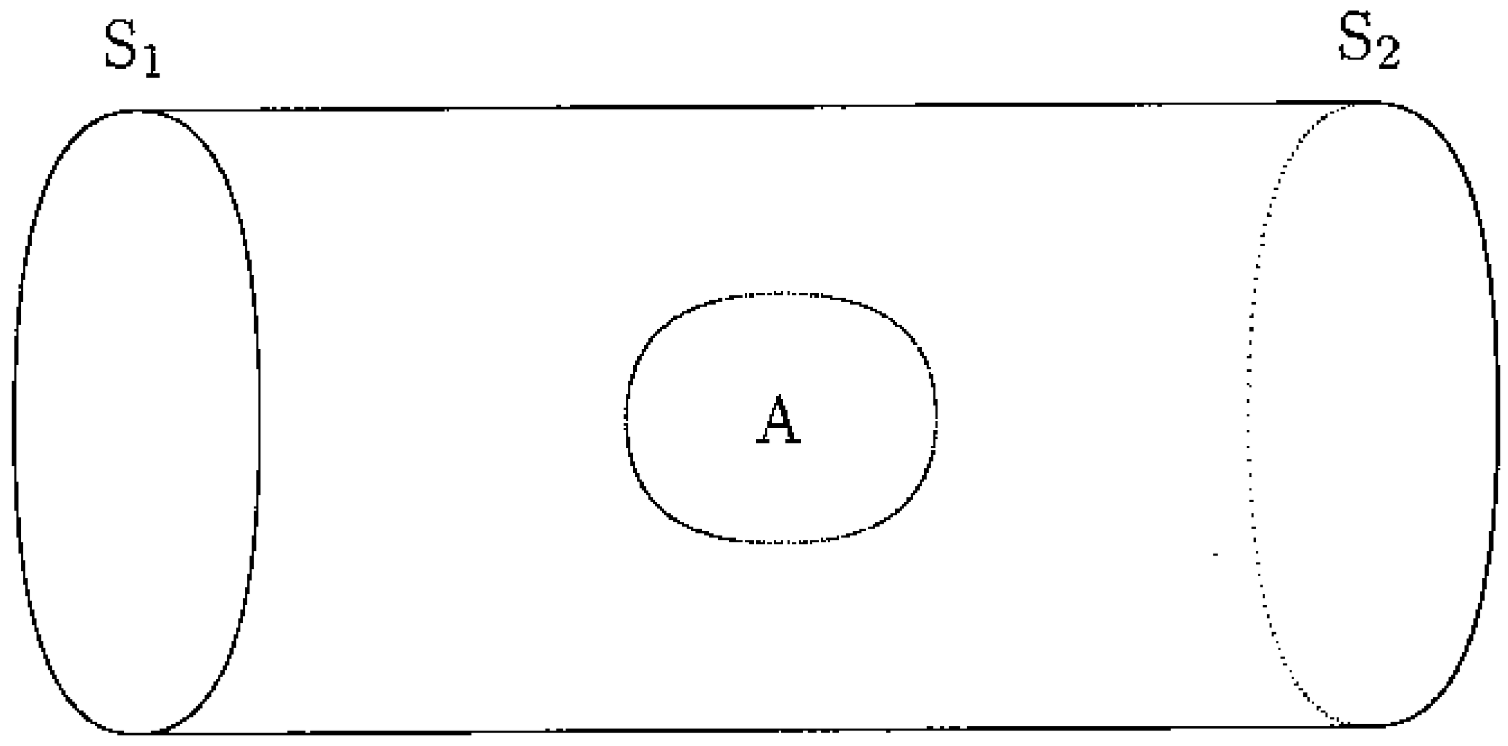
であることを示し，渦なし場（$\nabla\times\boldsymbol{u}=0$）のとき，流体中では $H\equiv\dfrac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}+\dfrac{p}{\rho_0}$ が定数であることを示せ．

(ii) $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ のとき $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_i=\nabla\cdot(\boldsymbol{u}u_i)$, $i=1,2,3$ となることに注意して，流体中の領域 V において

$$-\int_{\mathrm{S}}\frac{p}{\rho_0}\boldsymbol{n}dS = \int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})dS$$

を示せ．ただし，S は V の境界面，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである．

(iii) x 軸に平行な直円筒内で，静止した物体 A のまわりの渦なし定常流を考える．断面 S_1，S_2 が十分遠くにあれば，S_1，S_2 上の流れは速度 $\boldsymbol{U}$（定ベクトル）の一様流と考えてよい．このとき，流体が物体 A に及ぼす力の x 方向成分はゼロであることを (i) と (ii) の結果を用いて示せ．



9 次に示すプログラムについて，以下の問に答えよ．

```
int a[1..N]   /* 整数の配列 a[1], a[2], .., a[N] */
function swap(i) =
    if a[i]≤a[i+1]
      then return(false)
      else tmp←a[i]; a[i]←a[i+1]; a[i+1]←tmp; return(true)
    endif
procedure bubblesort() =
    begin
      changed←true;
      while changed do
        changed←false;
        for i=1 to N-1 do
          if swap(i) then changed←true endif
        done
      done
    end
```

(i) 手続き *bubblesort* が配列 a を昇順に整列することを示せ．

(ii) *bubblesort* が *swap* を呼び出す回数は最悪の場合何回か．

(iii) *bubblesort* が *swap* を呼び出す最悪の回数を，*bubblesort* を改良することで半分に減らすことができる．このような改良された *bubblesort* を書け．

10 D を ω 完備半順序集合（ωCPO）とし，$\mathit{fix} : [D \to D] \to D$ を D 上の最小不動点演算子（すなわち，連続関数 $f : D \to D$ について $\mathit{fix}(f) = \bigsqcup_{n \geq 0} f^n(\bot)$ ）とする．

連続関数 $F : D \times D \to D$ が与えられたとき，連続関数 $G : D \to [D \to D]$ および $H : D \to D$ を

$$
\begin{array}{rcl}
G(x)(y) & = & F(x, y) \\
H(x) & = & F(x, x)
\end{array}
$$

と定めると，

$$\mathit{fix}(\mathit{fix} \circ G) = \mathit{fix}(H)$$

が成り立つことを示せ．

（注）D が ω 完備半順序集合であるとは，D が半順序集合で，かつ，以下の二つの条件を満たすことをいう．

(a) D は最小元 $\bot$ をもつ．

(b) D の可算単調列 $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots$ についてその最小上界 $\bigsqcup_{n \geq 0} d_n$ が存在する．

また，ω 完備半順序集合 D, E について，関数 $f : D \to E$ が連続であるとは，f が単調（すなわち，$d \sqsubseteq d'$ ならば $f(d) \sqsubseteq f(d')$ ）であり，かつ，D の任意の可算単調列 $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots$ について $f(\bigsqcup_{n \geq 0} d_n) = \bigsqcup_{n \geq 0} f(d_n)$ が成り立つことをいう．

注：専門科目 4 番の問題中の「一周し、かつ $U\backslash K$ および g の定義域に含まれる」は,「一周する K に十分近い」とした方がより親切で適切な表現でした。