平成１６年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １３題 ある。
そのうち ２題 を解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ G は群とし，H はその真部分群とする．このとき，G の部分集合

$$X_H = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

について，次の (i), (ii) に答えよ．

(i) G が有限群のとき，X_H は G 全体にならないことを証明せよ．

(ii) G が複素 2 次正則行列全体のなす群 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ のとき，$X_H = G$ となる真部分群 H を一つ求めよ．

$\boxed{2}$ p は素数とし，$\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ 係数の 1 変数多項式環 $A = (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})[T]$ に対して，写像 $\delta : A \longrightarrow A$ を

$$\delta\left(\sum_{j \geq 0} c_j T^j\right) = \sum_{j \geq 0} j c_j T^{j-1}$$

で定める．

(i) $f, g \in A$ に対して

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

が成立することを示せ．

(ii) $B = \mathrm{Ker}\,\delta$ が A の部分環であることを示し，剰余環 A/pA における B の像を求めよ．

(iii) B のイデアル $I = (pA) \cap B$ の極小生成系を一つ求めよ．

$\boxed{3}$ 整数 $n \geq 2$ に対して $e_n = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n})$ とおき，複素 2 次元空間 $\mathbf{C}^2$ の自己同型 φ, ψ を以下の式で定める．

$$\varphi : \quad (a, b) \longmapsto (e_n a, e_n^{-1} b)$$
$$\psi : \quad (a, b) \longmapsto (b, a).$$

また，$\mathbf{C}^2$ 上の複素数値多項式関数 $f = f(x, y) : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ 全体のなす $\mathbf{C}$ 上の環を $\mathbf{C}[x, y]$ で表す．このとき，φ と ψ が生成する $\mathbf{C}^2$ の自己同型群 G の元 γ に対して，

$$R_\gamma = \{f \in \mathbf{C}[x, y] \mid f \circ \gamma = f\}$$

とおき，この部分環の $\mathbf{C}$ 上の生成元について考える．

(i) R_φ は 3 つの元で生成されることを示し，そのような 3 つの元の組を一つ求めよ．

(ii) 共通部分 $R_\varphi \cap R_\psi$ は 2 つの元で生成されることを示し，そのような元の対 $g(x, y)$，$h(x, y)$ を一つ求めよ．

(iii) (ii) で求めた $g(x, y)$，$h(x, y)$ は次の性質 $(*)$ をみたすことを示せ．

$(*)$ $\mathbf{C}^2$ の点の対 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ で $g(a_1, b_1) = g(a_2, b_2), h(a_1, b_1) = h(a_2, b_2)$ をみたすものに対して $(a_1, b_1) = \gamma(a_2, b_2)$ となるような G の元 γ が存在する．

4 n 次複素正方行列の全体 $M_n(\mathbf{C})$ の部分集合 S を

$$S = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^2 = I\}$$

で定める．ただし，I は n 次単位行列を表す．このとき，S の連結成分の個数を求めよ．また，各連結成分は $M_n(\mathbf{C})$ の部分可微分多様体になることを示し，その次元を求めよ．

5 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は整数を成分とする 2 次正方行列で，その行列式は 1 に等しい．$\mathbf{R}^3$ のアフィン変換 f, g, h_A を

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+1, y, z) \\ g(x,y,z) &= (x, y+1, z) \\ h_A(x,y,z) &= (ax+by, cx+dy, z+1) \end{aligned}$$

$(x, y, z \in \mathbf{R})$ により定義する．$\mathbf{R}^3$ のアフィン変換群の部分群で，f, g, h_A によって生成されるものを G_A で表し，$X_A = \mathbf{R}^3/G_A$ をその作用による商空間とする．X_A の 1 次元ベッチ数が互いに異なるような A の例を 3 つ挙げ，それらの A のそれぞれについて整係数ホモロジー群 $H_*(X_A; \mathbf{Z})$ を求めよ．

6 A を $\mathbf{C}$ 上の Hilbert 空間 $(X, (\ ,\ ))$ における自己共役作用素とする．さらに，定数 $\alpha > 0$ が存在してすべての $u \in X$ に対して $(Au, u) \geq \alpha(u, u)$ が成立するものとする．このとき，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 + A^2\right)^{-1} dx$$

が X 上の作用素として意味があることを示し，その具体形を求めよ．

7 N を自然数とし，N 次多項式 $p(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ の係数は $c_k = \pm 1$ $(k = 0, \ldots, N)$ をみたすものとする．実数 $\alpha \in [1, \infty)$ に対し，

$$\|p\|_\alpha = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|p\left(e^{i\theta}\right)\right|^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}$$

と定義する（多項式を複素平面で定義された関数とみなしている）．このとき次の問に答えよ．

(i) $\|p\|_2 = \sqrt{N+1}$ を証明せよ．

(ii) $2 < \alpha$ のとき，

$$\sqrt{N+1} \leq \|p\|_\alpha \leq N+1$$

を証明せよ．

(iii) $1 \leq \alpha < 2$ のとき，

$$1 \leq \|p\|_\alpha \leq \sqrt{N+1}$$

を証明せよ．

$\boxed{8}$ k を正の整数とする．正の実数 x に対して

$$u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{t^{k-1}}{t+1}dt$$

で定義される $(0,\infty)$ 上の関数 $u(x)$ について次の問に答えよ．

(i) $-\frac{du}{dx}+u$ を求めよ．

(ii) $u(x)$ は $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ に多価解析関数として解析接続されることを示せ．さらに，原点の回りを正の方向に一回り解析接続して得られる $(0,\infty)$ 上の関数を $u_1(x)$ で表すとき $u_1(x)-u(x)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の単連結領域 D の内部にある２次元非粘性非圧縮流体の運動を考える．流体の速度場を $(u,v)=(u(x,y,t),v(x,y,t))$，流れ関数を $\psi=\psi(x,y,t)$ とするとき，次の問に答えよ．ただし $(x,y)\in D$，t は時間，$u=\partial\psi/\partial y$，$v=-\partial\psi/\partial x$ とし，領域 D はなめらかな境界 ∂D を持つものとする．

(i) 領域 D の位置が時間的に一定である場合の定常流を考える．

(a) 境界 ∂D における速度場の境界条件を述べよ．

(b) 境界 ∂D に沿って流れ関数 $\psi(x,y)$ は定数であることを示せ．

(c) 速度場が渦なしのとき，$\Delta\psi=0$ となることを示せ．
ただし $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ とする．

(ii) 領域 D が原点の回りに一定角速度 ω で回転している場合を考える．

(a) 時刻 t における境界の形を $F(x,y,t)=0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にとどまることを用いて，境界 ∂D 上で

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

が成り立つことを示せ．さらに，境界が角速度 ω で回転していることから

$$\frac{\partial F}{\partial t}-\omega y\frac{\partial F}{\partial x}+\omega x\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

も成り立つことを示せ．

(b) 流れ関数を

$$\psi(x,y,t)=-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\Psi(x,y,t)\quad((x,y)\in D)$$

とおくと，境界 ∂D 上では $\Psi(x,y,t)=C(t)$ となることを示せ．ここで $C(t)$ は時間 t のみの関数を表す．

(c) $t=0$ における境界 ∂D が楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a,b:$ 正定数$)$ であるとき，D における渦なし速度場の流れ関数 $\psi(x,y,0)$ を求めよ．

$\boxed{10}$ 「量子系の基底状態に縮退がないとき，物理量の表現は既約になる」ことを，以下の問題設定で証明しよう．通常，物理量は非有界作用素で表されるが，(Dirac の observable の定義に従い) スペクトル分解できる自己共役作用素のみに意味があるとすれば，本質的な情報はすべてスペクトル射影子で表すことができ，有界作用素の取り扱いに帰着する．そこで，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の全体を $B(\mathfrak{H})$ とし，その適当な部分代数 $\mathcal{A}$ によって系の物理量が表現されるとしよう．また系の時間発展は，下に有界なスペクトルを持つ $\mathfrak{H}$ 上の 1 つの自己共役作用素 H を Hamiltonian として記述され，その最小固有値 $E_0(=\min(\mathrm{Spec}(H)))$ に対応する固有状態 $\Psi\in\mathfrak{H}, H\Psi=E_0\Psi$ が存在するとき，Ψ を基底状態と呼ぶ．このとき以下の問に答えよ．

(i) $\mathcal{Q}\subset B(\mathfrak{H})$ に対して，$\mathcal{Q}$ の可換子環を $\mathcal{Q}'=\{B\in B(\mathfrak{H})\,|\,QB=BQ,\ \forall Q\in\mathcal{Q}\}$ と定義する．このとき，等式 $\mathcal{Q}'''=\mathcal{Q}'$ を証明せよ．

(ii) $\xi\in\mathfrak{H}$ に $\mathcal{A}$ の元を作用させてできる部分空間 $\mathcal{A}\xi=\{A\xi\,|\,A\in\mathcal{A}\}$ が $\mathfrak{H}$ の中で稠密，すなわち $\mathfrak{H}=\overline{\mathcal{A}\xi}$ のとき，ξ を巡回ベクトルという．基底状態 Ψ が巡回ベクトルであるとき，次が成り立つことを証明せよ：

$$e^{iHt}\in\mathcal{A}'' \qquad (\forall t\in\mathbf{R}).$$

(iii) 「基底状態に縮退がない」とは，E_0 に対応する H の固有空間が 1 次元であることである．このとき，Ψ が巡回ベクトルならば $\mathcal{A}$ は既約，すなわち，$\mathcal{A}'=\mathbf{C}1_{\mathfrak{H}}$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{11}$ 非負の実数を成分とする n 次正方行列 $M=(m_{ij})$ は，その各行の和および各列の和が 1 に等しい，すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}=1 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=1 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

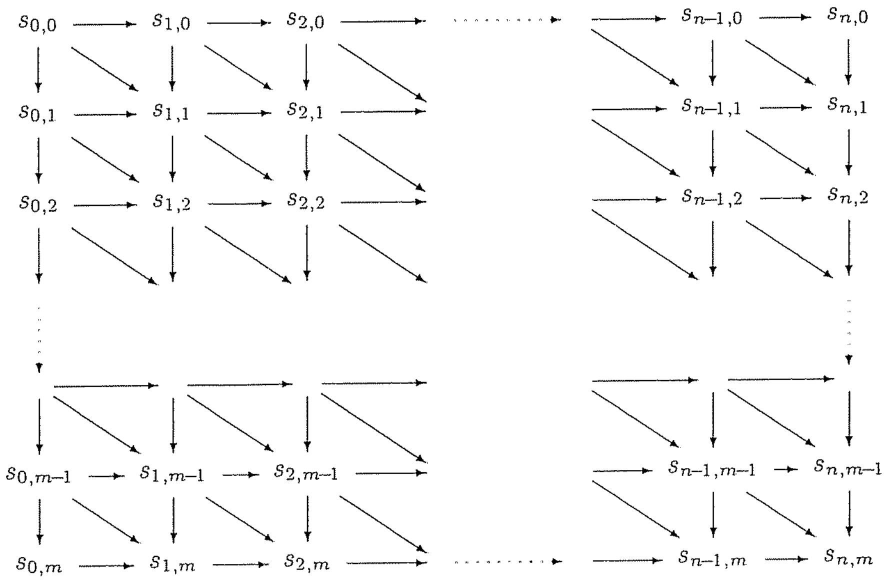
であるとき，2 重確率行列という．n 次の 2 重確率行列の全体からなる $M_n(\mathbf{R})=\mathbf{R}^{n^2}$ 内の多面体を P とする．このとき，P の任意の端点は，各行，各列にちょうど一つだけ非零成分（すなわち 1）をもつ n 次正方行列であることを示せ．

$\boxed{12}$ 有限個の文字からなる集合を一つ固定し，これらの文字からなる有限の長さの文字列について考える．長さ 0 の文字列を ε であらわす．また，文字 a と長さ n の文字列 $u=b_1b_2\ldots b_n$ に対して，これらを並べて得られる長さ $n+1$ の文字列 $ab_1b_2\ldots b_n$ を $a\cdot u$ とあらわす（とくに，$a\cdot\varepsilon=a$ である）．このとき，以下のような文字列上の操作を考える．

$$\begin{aligned}
\mathsf{rev_append}(u,v) &= \begin{cases} v & u=\varepsilon\text{のとき} \\ \mathsf{rev_append}(u',a\cdot v) & u=a\cdot u'\text{のとき}\end{cases} \\
\mathsf{reverse}(u) &= \mathsf{rev_append}(u,\varepsilon) \\
\mathsf{mirror}(u) &= \mathsf{rev_append}(u,u) \\
\mathsf{rev_mirror}(u) &= \mathsf{reverse}(\mathsf{mirror}(u))
\end{aligned}$$

任意の文字列 u に対して，$\mathsf{rev\_mirror}(u)$ の結果と $\mathsf{mirror}(u)$ の結果が一致することを示せ．

$\boxed{13}$ 自然数 $a_0, \ldots, a_n$ および $b_0, \ldots, b_m$ $(n, m \geq 1)$ が与えられているとする．下図のような $(n+1) \times (m+1)$ 個の節点 $\{s_{i,j} \mid 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m\}$ からなる有向グラフを考える．



グラフの各辺 (s, t) に対し，重み $w(s, t)$ を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
w(s_{i,j},\ s_{i+1,j}) &= 1 \\
w(s_{i,j},\ s_{i,j+1}) &= 1 \\
w(s_{i,j},\ s_{i+1,j+1}) &= \begin{cases} 0 & (a_i = b_j) \\ 1 & (a_i \neq b_j) \end{cases}
\end{aligned}
$$

このとき，$s_{0,0}$ から $s_{n,m}$ に至る最短距離（$s_{0,0}$ から $s_{n,m}$ に至る経路における辺の重みの総和のうち最小のもの）を求めるアルゴリズムで，計算量が $O(n \times m)$ であるものを与えよ．なお，アルゴリズムを記述する言語は任意とするが，そのアルゴリズムの正しさと，計算量が $O(n \times m)$ である理由を，簡潔に説明すること．