平成１７年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １４題 ある。
そのうち 2題 を解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは　禁止　する。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。
5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ この問題では，環は単位元 1 を含む可換環で零環でないものを指す．また，環 A, B に対して，環準同型 $A \to B$ が与えられているとき，B を A 代数と呼ぶ．

環 A に対して，圏 $\mathcal{C}(A)$ を次のように定める．

・$\mathcal{C}(A)$ の対象は，A 代数，

・$\mathcal{C}(A)$ の対象 B, C に対し，射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(B, C)$ は，A 代数の準同型写像 $B \to C$ 全体．

今，2つの環 A_1，A_2 と圏同値 $\Phi : \mathcal{C}(A_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(A_2)$ が与えられたとする．(ただし，「圏同値」は「圏の同型」と考えてもよい．) B, C を $\mathcal{C}(A_1)$ の対象，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A_1)}(B, C)$ とするとき，次を示せ．

(i) f が 1 対 1 写像 (injection) ならば $\Phi(f)$ も 1 対 1 写像である．

(ii) f が上への写像 (surjection) ならば $\Phi(f)$ も上への写像である．

(iii) B が体ならば $\Phi(B)$ も体である．

(iv) B が整域ならば $\Phi(B)$ も整域である．

$\boxed{2}$ p を素数とするとき，アーベル群 $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ の自己同型群の位数を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

(i) R を整域とし，K をその商体とする．f を R の 0 でない元とし，K の部分環で R と $\frac{1}{f}$ で生成されるものを $R[\frac{1}{f}]$ とかく．R 代数の同型

$$R\left[\frac{1}{f}\right] \cong R[x]/(xf-1)$$

を示せ．

(ii) 複素数係数の，0 でない一変数多項式 $f(t)$ に対して，$\mathbf{C}$ 代数 $\mathbf{C}[t][\frac{1}{f}]$ の可逆元全体のなす群の構造を求めよ．

(iii) $\mathbf{C}$ 代数の同型

$$\mathbf{C}[x]\left[\frac{1}{x(x-1)}\right] \simeq \mathbf{C}[y]\left[\frac{1}{f(y)}\right]$$

が存在するような y の 0 でない多項式 $f(y)$ を全て求めよ．

$\boxed{4}$ 写像 $f : \mathbf{R}^3 \to M(2, \mathbf{C})$ を

$$f(x, y, z) = \exp \begin{pmatrix} iz & x + iy \\ -x + iy & -iz \end{pmatrix}$$

によって定める.

(i) f の像は 3 次元球面 S^3 と同相であることを示せ.

(ii) f が点 (x, y, z) で正則となるための必要十分条件は

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\pi^2} \notin \{1^2, 2^2, 3^2, \cdots\}$$

であることを示せ.

$\boxed{5}$ 位相空間 U, V, W を

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z^2 \leq 1\}, \\ V &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z^2 = 1\}\ (\subset U), \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z^2 \leq 1\}\ (\subset U) \end{aligned}$$

で定める. W の各点 (x, y, z) を $(-x, -y, -z)$ と同一視することにより, U から得られる位相空間を X とおく. また, U から X への射影による V の像を Y とおく.

(i) 境界つき多様体の構造が X に入ることを示せ.

(ii) ホモロジー群 $H_*(X; \mathbf{Z})$ を求めよ.

(iii) ホモロジー群 $H_*(X, Y; \mathbf{Z})$ を求めよ.

$\boxed{6}$ $f \in L^1(0,\infty)$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy$$

とおく.

(i) $F(x)$ は任意の $x > 0$ に対して意味をもち,

$$F(x) = x\int_0^\infty e^{-xy} g(y)dy$$

が成り立つことを示せ. ただし, $g(y) = \displaystyle\int_0^y f(t)dt$.

(ii) ある $a > 0$ が存在して任意の正整数 $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $F(ma) = 0$ が成り立つならば, $F \equiv 0$ であることを証明せよ.

$\boxed{7}$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

(i) $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \mu(A_n) < \infty$ を満たすとき,

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ は無限個の } A_i \text{ に含まれる }\}) = 0$$

であることを示せ.

(ii) $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ は可測関数列で, 任意の実数 $a \leq b$ に対して

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid a \leq \xi_i(\omega) \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすものとする. このとき, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ について

$$\sum_{i=0}^\infty \mu(\{\omega \in \Omega \mid |\xi_i(\omega)| \leq (1-\varepsilon)^i\}) < \infty$$

となることを示せ.

(iii) z を複素数とする. (ii) の $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ を係数とするべき級数

$$f_\omega(z) = \sum_{k=0}^\infty \xi_k(\omega) z^k$$

の収束半径は, ほとんどすべての ω に対して 1 以下であることを示せ.

8 　2次元渦なし流れの解析はラプラス方程式の境界値問題に帰着される場合がある．ここでは楕円内部の流れで中央に板がある場合を考える（図１）．このような流れを表す流れ関数を次の手順に従って求めよ．

$\mathbf{R}^2$ 上の点 P の座標 (x,y) に対し，$r=\overline{OP}$, $s=\overline{AP}$ とおく（図２）．ここで O は座標原点，A は点 $(a,0)$ を表す $(a>0)$.

(i) (r,s) を新しい座標系と考えて，ラプラシアン $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ が次のように表されることを示せ．

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}$$

(ii) k は $k>1$ を満たす定数とし，楕円 $r+s=ka$ を C，線分 OA を L とおく．C の内側で，L 上を除き，ラプラス方程式 $\Delta\psi=0$ を満たす関数 ψ で次の３条件を満たすものを求めよ．

(a) C 上で $\psi=0$.

(b) L 上で $\psi=1$.

(c) ψ は $z=r+s$ のみに依存する関数．

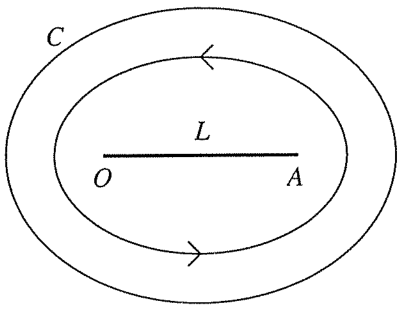

図１

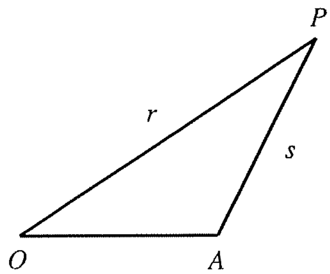

図２

9 　質量 m，角振動数 ω の一次元調和振動子の量子力学を考え，時刻 t における Heisenberg 表示での位置演算子を $q(t)$ で表す．

任意の整数 $n\geq 2$ に対して互いに異なる時刻の列 $t_0,\cdots,t_{n-1}$ で各々が区間 $[0,\pi/\omega)$ に属するものを適当に選ぶことにより，演算子

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(s)q(t+s)^2ds$$

が時刻 t に依らないようにできることを示せ．ここに

$$\rho(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\delta(s-t_k)$$

であり，$\delta(\,)$ は Dirac の δ 関数を表すものとする．

$\boxed{10}$ 周期 2π の連続な周期関数 $f(x)$ に対する次の積分方程式を考える.

$$\lambda f(x) = \int_0^{2\pi} K(x,y) f(y) dy.$$

ここで，$K(x,y)$ は十分なめらかな関数であり，それぞれの変数について周期的（周期 2π）とする．このとき，次の (i), (ii) に答えよ．

(i) 固有値 λ と固有関数 $f(x)$ を数値的に求めるために適当と考えられる方法を述べよ．またその方法が適当である理由を説明せよ．

(ii) (i) で述べた方法に基づくプログラムの概略を示せ．なお一般的な数値計算ライブラリの存在は仮定してよい．

$\boxed{11}$ 区間 $[-1,1]$ 上に標本点 x_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, N)$ を選ぶ．これらの標本点で

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

と一致する N 次ラグランジュ補間多項式 $P_N(x)$ について次の (i)，(ii) に答えよ．ここで N は正整数とする．

(i) 大きな N に対し，$\max\limits_{-1\le x\le 1} |P_N(x) - f(x)|$ が小さくなるようにするために，標本点の選択について注意すべき点を述べよ．

(ii) 適当と思われる標本点の例を一つ挙げよ．またそれを用いて $P_N(x)$ の値を求めるプログラムの概略を示せ．

$\boxed{12}$ k, n を正整数とし，各 $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して m_i を正整数とする．n 次元の実横ベクトル c と，各 $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して，$m_i \times n$ 次の実行列 $A^{(i)}$ と m_i 次元の実縦ベクトル $b^{(i)}$ が与えられているとする．このとき，x を n 次元の実変数縦ベクトルとする次の線形計画問題 (P) を考える．

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Maximize} & cx \\
 & \text{subject to} & A^{(i)}x \leq b^{(i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, k)
\end{array}
$$

以下の (i), (ii) を示せ．

(i) 目的関数の係数ベクトル c が

$$c = \sum_{i=1}^{k} c^{(i)}$$

と表現され，$\hat{x}$ がすべての $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して，線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & c^{(i)}x \\
\text{subject to} & A^{(i)}x \leq b^{(i)}
\end{array}
$$

の最適解であるならば，$\hat{x}$ は元の線形計画問題 (P) の最適解でもある．

(ii) 線形計画問題 (P) の最適解 $\hat{x}$ が与えられたとき，

$$c = \sum_{i=1}^{k} \hat{c}^{(i)}$$

を満たす $\hat{c}^{(i)} (i = 1, 2, \cdots, k)$ が存在して，すべての $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して $\hat{x}$ が線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \hat{c}^{(i)}x \\
\text{subject to} & A^{(i)}x \leq b^{(i)}
\end{array}
$$

の最適解となる．

$\boxed{13}$ a は非負整数とし，以下のプログラムを考える．

```
x := 0;
y := 1;
z := 1;
while z ≤ a
  do
{ x := x + 1;
  y := y + 2;
  z := z + y };
return x
```

このプログラムの実行は必ず停止することを示せ．また，出力される結果を与え，その理由を説明せよ．

$\boxed{14}$ 0 と 1 とからなる文字列で，2 進数としてみたとき素数を表すもの全体の集合は正則言語でないこと，すなわちこの集合を受理する有限オートマトンが存在しないことを示せ．ただし，以下の結果 (∗) は証明なしに用いてもよい:

(∗) 2 より大きい素数 p について $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$.