平成１８年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある。５題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　３時間　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　問題 1、3、4 および 5A または 5B は問題ごと、問題 2 は小問ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ 次の定積分 (1), (2), (3) を求めよ．ただし $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする．なお $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ax}\, dx$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\, dx$$

(3)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx$$

$\boxed{2}$ 次の (i), (ii) の問に答えよ．(解答は小問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号欄に 2(i), 2(ii) と記入せよ．)

(i) V, W を有限次元実線形空間，v, w をそれぞれ V, W の元とし，$v \neq 0$ と仮定する．このとき，線形写像 $f : V \to W$ で $f(v) = w$ となるものが存在することを示せ．

(ii) 2 行 2 列複素行列 A で，$A = B^2$ となる 2 行 2 列複素行列 B が存在しない例を 1 つあげよ．その例についてこのような B が存在しないことを証明せよ．

$\boxed{3}$ t を正の実数，a_0, a_1, a_2, a_3 を実数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 t^n + a_2 \left(\dfrac{t^2}{2!}\right)^n + a_3 \left(\dfrac{t^3}{3!}\right)^n}{1 + t^n + \left(\dfrac{t^2}{2!}\right)^n + \left(\dfrac{t^3}{3!}\right)^n}$$

を求めよ．

$\boxed{4}$ a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を複素数とし，等式

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n (1-z)^{2n}$$

が $z = 0$ の複素近傍で成り立つとする．

(i) $f(z) = z(1-z)^2$ として，a_n が $\dfrac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}$ の $z = 0$ における留数と等しいことを証明せよ．

(ii) a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一題を選んで解答せよ．(解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ.)

[A] n を自然数，k を正の奇数とし，A を n 次実対称行列とする．n 次実正方行列 X に対して同値関係

$$XA = AX \iff XA^k = A^k X$$

が成り立つことを証明せよ．

[B] $\mathbf{R}^4$ における 4 点 P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ と 2 点 Q_j $(j = 1, 2)$ が次のように与えられているとする．

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

このとき領域

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i P_i \;\middle|\; \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) \right\}$$

と線分 $\overline{Q_1 Q_2}$ は点を共有するか？　点を共有するとすれば，D と $\overline{Q_1 Q_2}$ の交わりの端点を求めよ．