平成１９年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

# 入学試験問題

# 基礎科目

◎　問題は ５題 ある。５題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　３時間　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　問題 1、2 は小問ごと、問題 3、4 および 5A または 5B は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。一問を二枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ 次の (i), (ii) の問に答えよ. (解答は小問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号欄に 1(i), 1(ii) と記入せよ.)

(i) $\alpha, \beta$ は正の実数とする. 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\beta}}$$

の各々に対して, それが収束する $\alpha, \beta$ の範囲を求め, その理由を述べよ.

(ii) 定積分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$$

を計算せよ.

$\boxed{2}$ 次の (i), (ii) の問に答えよ. (解答は小問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号欄に 2(i), 2(ii) と記入せよ.)

(i) 実 2 次正方行列 $A, B$ が $AB = -BA$ をみたしているとする. このとき, 実数 $r$ が存在して, $(AB)^2 = rI$ が成り立つことを示せ. ただし, $I$ は 2 次単位行列を表す.

(ii) $n$ 次以下の 1 変数実係数多項式 $f(x)$ 全体のなす実線形空間を $V_n$ とする. このとき, $f(x)$ に対して $f(x) + f'(x)$ を対応させる $V_n$ の線形変換は可逆であることを示せ. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

$\boxed{3}$ $f(x)$ は区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする. 有限な極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するとき,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{y-x} f(y) dy = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

であることを示せ.

$\boxed{4}$ $V$ は実 $2n$ 次元線形空間, $W_1, W_2, W_3$ は $V$ の実 $n$ 次元線形部分空間とし,

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$$

と仮定する. このとき, 次の条件ア), イ), ウ) をみたす $V$ の基底 $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ.

ア) $e_1, \ldots, e_n$ は $W_1$ の基底.

イ) $f_1, \ldots, f_n$ は $W_2$ の基底.

ウ) $e_1 + f_1, \ldots, e_n + f_n$ は $W_3$ の基底.

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一題を選んで解答せよ.(解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ.)

[A] $f(x,y) = (x+y)^2 + x$ として，以下の問に答えよ.

(i) $f$ は $\mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ への単射を与えることを示せ.

(ii) $f$ は $\mathbf{Q}_{\geq 0} \times \mathbf{Q}_{\geq 0}$ から $\mathbf{Q}_{\geq 0}$ への写像として単射でないことを示せ.

ただし，$\mathbf{Z}_{\geq 0}$ は非負整数の集合を，また $\mathbf{Q}_{\geq 0}$ は非負有理数の集合を表す.

[B] $a_1, \ldots, a_n$ は正の実数とする．このとき，$\mathbf{R}^n$ 内の単位球面 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ における，関数 $a_1 x_1^6 + \cdots + a_n x_n^6$ の最大値と最小値を求めよ.