平成２０年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある。５題 とも解答せよ。

◎　解答時間は　３時間　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。一問を二枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

1. 次の (i), (ii) の問に答えよ.

   (i) 次の実関数の $x=0$ におけるテイラー展開を x^3 の項まで計算せよ. (たとえば $\exp(x)$ ならば $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$.)

   $$(A)\ \sqrt{1+2x+3x^2} \qquad (B)\ (1+x)^{\frac{1}{x}}$$ (ただし $x=0$ での値は $\lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ で定義する.)

   (ii) 次の積分の値を求めよ.

   $$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

   ここで, $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1\}$.

2. $n\geq 2$ を自然数, x を実数とする. n 次正方行列 $A=(x^{ij}-1)_{1\leq i,j\leq n}$ の行列式 $\det A$ について

$$\det A=(x-1)(x^2-1)\cdots(x^n-1)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x^j-x^i)$$

を示せ.

3. 正の実数列 $\lambda_n (n=1,2,\cdots)$ に対して, 2つの級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(\lambda_n x), \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\exp(\lambda_n x)$$

を考える. 今, $a\in\mathbf{R}$ とし, $f(a)<\infty$ であると仮定する.

   (i) $x<a$ のとき, $f(x), g(x)$ ともに収束することを示せ.

   (ii) $x<a$ となる全ての x において $f(x)$ は微分可能であって, $f'(x)=g(x)$ となることを示せ.

4. V を n 次元実ベクトル空間とする ($n>0$). $f:V\to V$ は V 上の線形変換で, V の任意の $(n-1)$ 次元部分ベクトル空間 W に対し $f(W)\subseteq W$ をみたしているものとする.

   (i) $n=2$ のとき, f は恒等変換のスカラー倍であることを示せ.

   (ii) n が一般のときも, f は恒等変換のスカラー倍であることを示せ.

$\boxed{5}$ 空でない集合 X について，次の性質をみたす写像 $h: X \times X \to X$ を考える：

任意の写像 $f: X \to X$ と任意の $x, y \in X$ に対して

$$f(h(x,y)) = h(f(x), f(y))$$

が成り立つ.

以下の問に答えよ.

(i) 任意の $x \in X$ に対して $h(x,x) = x$ を示せ.

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) \in \{x, y\}$ を示せ.

(iii) 「任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) = x$」かまたは「任意の $x, y \in X$ に対して $h(x,y) = y$」のいずれかが成り立つことを示せ.