平成２２年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある. ５題 とも解答せよ.

◎　解答時間は　３時間　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$ 関数 $f:\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{C}$ に対して $\delta f:\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{C}$ を

$$\delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

と定義する. ある整数 $n\geq 1$ に対して

$$\delta^n f=\underbrace{\delta\circ\cdots\circ\delta}_{n\text{ 個}}f=0$$

が成り立つとき, 極限

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}$$

が存在することを示せ.

$\boxed{2}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内に, 原点を端点とする 5 本の半直線が与えられているとする. このうちの 2 本を選び, それらが原点において成す角が高々90° になるようにできることを示せ.

$\boxed{3}$ $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ で定義された関数

$$\frac{\sin x}{x}$$

について次の問に答えよ.

(i) 次の関係を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$$\frac{\sin x}{x}=\int_0^1 f(sx)\,ds$$

(ii) x_0 を 0 でない実数とし, $\dfrac{\sin x}{x}$ の $x=x_0$ における Taylor 展開を

$$\frac{\sin x}{x}=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

とするとき

$$|a_n|\leq\frac{1}{(n+1)!}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

を示せ.

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{\cosh(\pi x)}e^{-x^2}dx$$

$\boxed{5}$ 次の [A], [B] のうちいずれか一題を選んで解答せよ．（解答用紙には，問題番号欄に 5A あるいは 5B と記入せよ.）

[A] $\theta \in \mathbf{R}$ を定数として，

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおき，帰納的に

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n \cos\theta & -A_n \sin\theta \\ A_n \sin\theta & A_n \cos\theta \end{pmatrix}$$

により 2^n 次正方行列 A_n を定める．このとき A_n の固有値を重複度も込めて求めよ．ただし，$\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$ と仮定する．

[B] 集合 X, Y と二つの単射 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ が与えられたとき，次の条件を満たす全単射 $h : X \longrightarrow Y$ が存在することを証明せよ．

$h(x) = y$ ならば，$f(x) = y$ または $g(y) = x$ となる．