平成２３年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある．５題 とも解答せよ．

◎　解答時間は　３時間　である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は，指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと．

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．

3　解答は，問題１は小問ごと，問題２，３，４，５は問題ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．一問を二枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．

4　提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，下書き用紙をその下に揃え，記入した面を外にして，一括して二つ折りにして提出すること．

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい．

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は，それぞれ，整数，有理数，実数，複素数の集合を表す．

$\boxed{1}$ 次の (i), (ii) の問に答えよ．(解答は小問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号欄に 1(i), 1(ii) と記入せよ.)

(i) n 次実正方行列 A が $A^2+I=0$ を満たすとする．(ただし，I は単位行列を表す.) このとき，n は偶数であることを示せ．

(ii) 正の整数 m に対して，次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2m}}.$$

$\boxed{2}$ 整数 $n \geq 2$ に対して，実 $(2n-1)$ 次元線形空間 V およびその 2 次元線形部分空間の列 $W_1, \ldots, W_n$ を考える．このとき，次の条件 $(*)$ を満たす V の $(n-1)$ 次元線形部分空間 U が存在することを示せ．

$(*)$ すべての $i=1,\ldots,n$ に対して $W_i \cap U \neq \{0\}$.

$\boxed{3}$ 実数 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ に対して，(i,j) 成分が

$$a_{ij} = \begin{cases} \rho_i & (i>j \text{ のとき}) \\ \rho_j & (i \leq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる n 次対称行列 $A=(a_{ij})$ を考える．条件 $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n > 0$ が成り立つとき，A は正定値であることを示せ．

$\boxed{4}$ 次の条件 (a), (b) を満たす $\mathbf{R}$ 上の実数値 C^∞ 級関数 $f(x)$ を考える．

(a) $f(0) = \dfrac{df}{dx}(0) = 0, \quad \dfrac{d^2 f}{dx^2}(0) \neq 0.$

(b) $x \neq 0$ に対しては $f(x) > 0$.

このとき，次の積分 (i), (ii) それぞれについて収束するか発散するかを判定し，その理由を述べよ．

(i)

$$\iint_{|x_1|^2+|x_2|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2}{f(x_1)+f(x_2)}.$$

(ii)

$$\iiint_{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}.$$

$\boxed{5}$ 次の条件 $(*)$ を満たす連続写像 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ は存在しないことを示せ．

$(*)$ すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi(\varphi(x)) = -x$.