平成２５年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

# 入学試験問題

# 専門科目

◎　問題は １１題 ある. そのうち 2題 を選択して解答せよ.

◎　解答時間は　 2時間３０分　 である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 選択表を上に置き, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$　$p$ と $\ell$ を相異なる素数とする．複素数体 $\mathbf{C}$ 内の部分体 $F$, $K$, $L$ を次式で定義する．

$$F = \mathbf{Q}(p^{1/\ell}), \quad K = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/\ell}), \quad L = F \cdot K = \mathbf{Q}(p^{1/\ell}, e^{2\pi i/\ell}).$$

このとき，部分体の拡大次数について，$[F : \mathbf{Q}] = [L : K] = \ell$ を証明せよ．

$\boxed{2}$　環 $R = \mathbf{C}[x, y, z]/(x^2 - yz)$ とそのイデアル $I = (x, y)$ を考える．このとき，次の (i), (ii), (iii) を証明せよ．

(i) $R$ は整域である．

(ii) $I$ は単項イデアルではない．

(iii) $I$ と $\mathrm{Hom}_R(I, R)$ は $R$ 加群として同型である．

$\boxed{3}$　$p$ を素数とする．有限群 $G$ に対して，その位数が $p^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ となるとき，$G$ を $p$ 群という．また，$\mathrm{Aut}(G)$ を $G$ の自己同型写像全体のなす群とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) に解答せよ．

(i) 位数が 1 より大きい $p$ 群は位数が $p$ の元を持つことを証明せよ．

(ii) 位数が $p$ より大きい可換な $p$ 群 $G$ に対して，$\mathrm{Aut}(G)$ は位数が $p$ の元を持つことを証明せよ．

(iii) $p$ 群 $G$ であって，$\mathrm{Aut}(G)$ が位数 $p$ の元を持たないもの (の同型類) をすべて求めよ．

$\boxed{4}$　$\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le z \le 1 \right\}$$

の商空間 $X_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を $X_i = X/\sim_i$ により定める．ただし，$\sim_1$, $\sim_2$, $\sim_3$ はそれぞれ次の関係で生成される $X$ 上の同値関係とする．

$$\begin{aligned}
&(x, y, 0) \sim_1 (0, 1 - x, y) && (0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1),\\
&(x, y, 0) \sim_2 (0, 1 - y, 1 - x) && (0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1),\\
&(x, y, 0) \sim_3 (0, 1 - y, x) && (0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1).
\end{aligned}$$

このとき，$X_1$, $X_2$, $X_3$ の整係数ホモロジー群 $H_*(X_i, \mathbf{Z})$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ $\mathbf{R}^2$ 内の部分集合

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y^3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \right\}$$

を考える．ただし，$n$ は正整数，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は相異なる $n$ 個の実数である．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) $C$ は $\mathbf{R}^2$ の滑らかな部分多様体である．

(ii) $\dfrac{dx}{y}$ は $C$ 上の $C^\infty$ 級 1 次微分形式を与える．

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ を満たす測度空間とする．$u\colon X \to \mathbf{R}$ を有界な非負可測関数で $\|u\|_\infty > 0$ を満たすものとする．ただし，

$$\|u\|_\infty = \inf \left\{ \lambda \in \mathbf{R} \,\middle|\, |u(x)| < \lambda \ (\mu\text{-a.e. } x \in X) \right\}$$

と定義する．正整数 $n$ に対して，

$$I_n = \int_X u(x)^n d\mu(x)$$

とおくとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) すべての正整数 $n$ に対して，$I_n^{1/n} \leq I_{n+1}^{1/(n+1)}$ が成立する．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \|u\|_\infty$.

$\boxed{7}$ 次の (i)，(ii)，(iii) に解答せよ．

(i)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

とおく．コーシーの積分公式を用いて次を証明せよ．

$\theta > 0$ を十分小さく取れば，任意の非負整数 $n$ と任意の $t > 0$ に対して，

$$|f^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)}$$

が成り立つ．ただし，$f^{(n)}(t) = \dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}(t)$ $(n \geq 1)$，$f^{(0)}(t) = f(t)$ とする．

(ii) (i) の $f(t)$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

は，$\left\{ (t,x) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq t < +\infty,\, -\infty < x < +\infty \right\}$ において広義一様収束することを証明せよ．

(iii) 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) & (t > 0,\, x \in \mathbf{R}) \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

は，恒等的にゼロではない解を持つことを証明せよ．

$\boxed{8}$ 1 次元熱伝導問題を考える．空間 $x$ 方向の熱伝導に支配される温度分布 $T(x,t)$ (ただし，$t \geq 0$ は時間を表す) は，定数 $\kappa > 0$ を熱伝導率とするとき，次の方程式に従う．

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

(i) 区間 $0 \leq x \leq 1$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$，$T(1,t) = 0$，初期条件 $T(x,0) = (x-1)^2$ を与える．

(i-1) $T(x,t) = 1 - x + \Theta(x,t)$ とおき，$\Theta(x,t)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(i-2) $\Theta(x,t)$ を

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin n\pi x$$

と展開することにより，微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

(ii) 区間 $0 \leq x < \infty$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$，$T(\infty,t) = 0$，初期条件 $T(x,0) = 0$ を与える．

(ii-1) 温度分布が $\xi = x/(2\sqrt{\kappa t})$ のみを用いて $T(x,t) = F(\xi)$ と表されると仮定するとき，$F(\xi)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(ii-2) (ii-1) で求めた微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ $\mathbf{R}^3$ の球座標を $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ で表し，ポテンシャル $V(r)$ の中心力場のもとで運動する粒子の量子力学を考える．軌道角運動量が $\ell = 0, 1, 2, \ldots$，磁気量子数が $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\ell$ である場合には，ハミルトニアンが

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)^2 + V(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2}$$

で与えられる．定常波動関数は $r$ のみの関数 $f(r)$ と球面調和関数 $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ を使って

$$\Psi(r,\theta,\phi) = f(r) Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

と書き表せることがわかっている．ただし，粒子は単位質量を持つものと仮定し，$\hbar = 1$ とした．ポテンシャルが $V(r) = -1/r$ で与えられる場合に，次の (i), (ii), (iii) に解答せよ．

(i) $f(r) = r^\ell e^{-r/(\ell+1)}$ とすれば，$\Psi$ は $H$ の固有波動関数となることを証明せよ．また，その固有値を求めよ．

(ii) (i) の固有波動関数 $\Psi$ に対して，$r^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ の期待値 $\langle r^n \rangle$ を求めよ．ただし，$\langle 1 \rangle = 1$ と規格化されているものとする．

(iii) (i), (ii) の設定を仮定する．各 $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ に対して正の実数 $\varepsilon$ をうまく選べば，次の (a), (b) が成り立つことを証明せよ．

(a) $\ell \to \infty$ のとき $\varepsilon \to 0$.

(b) $|1 - r/\langle r \rangle| \geq \varepsilon$ となる確率は $\varepsilon$ 以下.

$\boxed{10}$　$J$ を有限個の仕事からなる集合とする．各仕事 $j \in J$ の開始日 $s_j$，終了日 $f_j$ が定められている．また，各仕事 $j \in J$ には報酬 $w_j$ が支払われる．ただし，$s_j$，$f_j$，$w_j$ は非負整数とする．同じ日には１つの仕事しか実行できないとする．このとき，受け取る報酬の合計が最大となるように，実行する仕事を定める効率的なアルゴリズムを記述し，その正当性と計算量を示せ．

$\boxed{11}$　型のないラムダ計算のラムダ項全体の集合を $\Lambda$ とする．ただし，$\alpha$ 同値なラムダ項は同一視するものとする．写像 $[\![-]\!]\colon \Lambda \to \Lambda$ を

$$\begin{array}{lcl} [\![x]\!] & = & \lambda k.k\,x \\ [\![\lambda x.M]\!] & = & \lambda k.k\,(\lambda x.[\![M]\!]) \\ [\![M\,N]\!] & = & \lambda k.[\![M]\!]\,(\lambda m.[\![N]\!]\,(\lambda n.m\,n\,k)) \end{array}$$

により定める．以下では，$\beta$ 簡約関係の反射的推移的閉包を $\to_\beta^*$ で表す．このとき，次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) $N$ が変数か関数抽象 (ラムダ抽象) であるとき，$[\![(\lambda x.M)\,N]\!] \to_\beta^* [\![M[x := N]]\!]$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) $[\![(\lambda x.M)\,N]\!] \to_\beta^* [\![M[x := N]]\!]$ が成り立たない $M$ と $N$ の例を挙げよ．