Khovanov–Lauda–Rouquier代数とCategorification

柏原 正樹 述

穂坂 秀昭, 森 真樹 記

序

これは, 2011 年 12 月 5 日–9 日に東京大学数理科学研究科でおこなった集中講義の講義録である。この講義では, Khovanov–Lauda–Rouquier 代数について概説した。

最近、表現論の圏化の動きが盛んになりつつある。圏化には、幾何的方法などいくつかの方法があるが、Khovanov–Lauda–Rouquier 代数を用いる方法が比較的初等的に予備知識も少なくてすむことが、Khovanov–Lauda–Rouquier 代数の表現論をこの集中講義の題材に選んだ理由の一つである。

もう一つの理由は、もちろん私自身が最近この代数の研究を行っていることによる。Seok-Jin Kang, Shunsuke Tsuchioka, Myungho Kim, Se-jin Oh などがこの研究の共同研究者である。この機会にこの方々に感謝したい (何人かはこの文を読みそうにもないが)。

この講義録は、穂坂 秀昭さんと森 真樹 さんがまとめたものに若干私が手を入れたものです。両氏に深く感謝致します。

また、この集中講義の機会をつくってくださった斎藤 義久さんにもお礼申し上げます。

2013 年 12 月 京都にて

柏原 正樹

目 次

1章　Introduction

1.1　LLT–有木の定理と categorification

本レクチャーノートの主題である categorification (圏化) とは, 一言で言えば集合論の言葉を圏論の言葉に置き換える操作である. すなわち, 「集合」の代わりに「圏」を, 「写像」の代わりに「関手」を, 「等号」の代わりに「自然同値」を用いて, 元々の代数的構造をより深い構造を持つ圏の世界に持ち上げることを指す. この手法が有効に用いられた例として, Lascoux–Leclerc–Thibon [LLT96] により予想され有木 [Ari96] により解決された LLT–有木の定理についてここで紹介する.

$n \geq 0$ を非負整数とし, またパラメータ $\zeta \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を取る. n 次の Hecke 代数 $H_n(\zeta)$ は生成元 $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ と以下の関係式により定義される $\mathbb{C}$ 上の代数である:

$$
\begin{aligned}
(T_i - \zeta)(T_i + 1) &= 0, \\
T_i T_j &= T_j T_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \\
T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1}.
\end{aligned}
$$

$H_n(\zeta)$ は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ をパラメータ ζ で変形させた代数であり, $\zeta = 1$ のときに $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ と一致する. また, 素数 p に対し ζ が 1 の原始 p 乗根のときには, $H_n(\zeta)$ の表現論は標数 p における対称群のモジュラー表現論と深い関わりがあることが知られている.

さて, 代数が与えられたとき, 表現論的な観点からは次のような問題が基本的である.

(1) 既約表現を分類せよ.

(2) 既約表現を具体的に構成せよ.

(3) 様々な表現を既約分解せよ.

$H_n(\zeta)$ についてのこれらの問題は, 一般の $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ に対しては, 標数 0 における対称群の表現論と同様の命題が成立する. 具体的には, 大きさ n の Young 図形 $\lambda \in \mathscr{P}_n$ から Specht 加群と呼ばれる $H_n(\zeta)$ の表現 $S(\lambda)$ が構成でき, これがちょうど $H_n(\zeta)$ の既約表現の完全代表系を与える. しかし ζ が 1 の原始 r 乗根 $(r > 1)$ のときにはこのアナロジーは崩れ, Specht 加群 $S(\lambda)$ は一般に既約ではなくなってしまう. この場合の (1) と (2) に対する答えは以下で与えられる.

定理 1.1.1 (Dipper–James [DJ86]). $\zeta = \sqrt[r]{1}$ を 1 の原始 r 乗根とする.

(i) $\lambda \in \mathscr{P}_n$ が r-regular と呼ばれる条件を満たすとき, $S(\lambda)$ は唯一つの既約商加群 $D(\lambda)$ を持つ.

(ii) $\{D(\lambda) \mid \lambda \in \mathscr{P}_n,\ r\text{-regular}\}$ は既約 $H_n(\zeta)$ 加群の完全代表系である.

すると次に興味を引くのは, 既約でない Specht 加群 $S(\lambda)$ の中に既約表現 $D(\mu)$ がどのように現れているかである. すなわち, $S(\lambda)$ の組成列を求め, 既約表現の重複度を計算することが基本的な問題となる. そこで $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n$ を Young 図形, μ は r-regular とするとき, $d_{\lambda\mu}$ を $S(\lambda)$ における $D(\mu)$ の重複度と定め, これを $H_n(\zeta)$ の分解係数と呼ぶ.

LLT 予想は, この分解係数を計算する方法に関する主張である. そこに登場したのは, 量子群と呼ばれる $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ であった. これは $\mathsf{A}^{(1)}_{r-1}$ 型アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ の包絡代数 $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ の q 変形にあたる. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ は Lie 代数の表現論と同様の最高ウェイト表現の理論を持ち, 最高ウェイト Λ の既約最高ウェイト表現 $V(\Lambda)$ には大域基底と呼ばれるよい性質を満たす $\mathbb{Q}(q)$ 上の基底があることが柏原によって示されていた. また Λ が基本ウェイト Λ_0 のとき, $V(\Lambda_0)$ の大域基底の元は r-regular な Young 図形 μ によって $G(\mu)$ とパラメトライズされることも知られていた. つまり, 全ての次数 n における Hecke 代数の既約表現全体と, 量子群の既約表現の基底という, 一見関係のない二つの集合の間に奇妙な 1:1 対応があった.

一方, 全ての Young 図形を基底とする $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間 $\mathcal{F} := \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}(q)\lambda$ 上には $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ の Fock 表現と呼ばれる作用が定まる. $V(\Lambda_0)$ の最高ウェイトベクトル $G(\varnothing)$ を $\varnothing \in \mathcal{F}$ に送ることにより, $V(\Lambda_0)$ は Fock 表現 $\mathcal{F}$ に埋め込むことができる. このとき $V(\Lambda_0)$ の大域基底 $\{G(\mu) \mid \mu \in \mathscr{P},\ r\text{-regular}\}$ がこの埋め込みのもとで Fock 表現の自然な基底 $\{\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}\}$ でどのように展開されるかが問題となる. そこで

$$G(\mu) = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}} d_{\lambda\mu}(q)\lambda$$

で展開係数 $d_{\lambda\mu}(q) \in \mathbb{Q}(q)$ 定義する. Lascoux–Leclerc–Thibon 予想は, $d_{\lambda\mu}(q)$ は 1 の原始 r 乗根 $\zeta = \sqrt[r]{1}$ における Hecke 代数 $H_n(\sqrt[r]{1})$ の分解係数の q-analog になっているという主張である.

予想 1.1.2 (Lascoux–Leclerc–Thibon [LLT96, Conjecture 6.9 (2)]). $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n$ とし, さらに μ は r-regular であるとする. すると $d_{\lambda\mu}(q)$ に $q = 1$ を代入した $d_{\lambda\mu}(1)$ は, $H_n(\sqrt[r]{1})$ の分解係数 $d_{\lambda\mu}$ と一致する.

論文 [LLT96] の中では, この LLT 予想と共に展開係数 $d_{\lambda\mu}(q)$ を計算する実践的なアルゴリズムが述べられている. そして LLT 予想は, 有木が [Ari96] において肯定的に解決した. かくして, 今や LLT–有木の定理と呼ばれるようになったこの主張は, 対称群と Hecke 代数のモジュラー表現論にブレークスルーをもたらしたのである.

以下有木による証明[1]を概説する. 以下 $H_n = H_n(\zeta)$ と略記する. まず上の予想は $q=1$ の場合についての予想なので, 量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ の Fock 表現 $\mathcal{F}$ と既約表現 $V(\Lambda_0)$ を $q=1$ に特殊化したものを考えればよい. するとこれらにはアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ の表現が定まり, 大域基底 $G(\mu) \in V(\Lambda_0)$ の埋め込みを $\lambda \in \mathscr{F}$ で展開した係数は $d_{\lambda\mu}(1)$ となる.

この証明の鍵となったのは, 各 $0 \le i < r$ について定義される i-制限と i-誘導と呼ばれる関手である. これは自然な埋め込み $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$ による加群の制限と誘導を精密化したもので, Jucys–Murphy 元と呼ばれる H_n の元の固有値を利用して定義される. H_n の有限次元表現の圏の Grothendieck 群を $K(H_n\text{-}\mathsf{mod})$, その $\mathbb{Q}$ 上の双対を $K(H_n\text{-}\mathsf{mod})^*$ と書く. i-制限関手と i-誘導関手がこの空間に誘導する準同型を

$$f_i\colon K(H_n\text{-}\mathsf{mod})^* \to K(H_{n+1}\text{-}\mathsf{mod})^*, \quad e_i\colon K(H_n\text{-}\mathsf{mod})^* \to K(H_{n-1}\text{-}\mathsf{mod})^*$$

とする. 実はこれらの作用素により, 全ての次数 $n \ge 0$ にわたり Hecke 代数 H_n の表現圏の Grothendieck 群の双対を直和した空間 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_n\text{-}\mathsf{mod})^*$ の上に $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ の表現が定まる. これにより Hecke 代数の表現圏と Lie 代数の表現が結びつけられるのである.

ここで $\mathbb{S}$ を離散付値環 (DVR) とし, $\mathbb{K}$ を $\mathbb{S}$ の商体, $\mathbb{F}$ を $\mathbb{S}$ の剰余体とする. このような $(\mathbb{K}, \mathbb{S}, \mathbb{F})$ の組をモジュラー系と呼ぶ. $\zeta \in \mathbb{S}$ とし, それを自然な準同型で送った $\mathbb{K}$ と $\mathbb{F}$ の元も同じ記号 ζ で表す. 以下ではこれらの係数環上定義された Hecke 代数も考えるので, 係数環 $\Bbbk$ を右下に添えて $H_{n,\Bbbk} = H_{n,\Bbbk}(\zeta)$ などと書く. すると次の命題が成立する.

補題 1.1.3. V を $H_{n,\mathbb{K}}$ 加群とする. このとき部分 $H_{n,\mathbb{S}}$ 加群 $L \subset V$ であって, $\mathbb{S}$ 加群としてフルランク格子であるものがとれる. また V に対し L の係数拡大 $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{S}} L$ を対応させる Grothendieck 群の間の写像

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{K},\mathbb{F}}\colon K(H_{n,\mathbb{K}}\text{-}\mathsf{mod}) &\to K(H_{n,\mathbb{F}}\text{-}\mathsf{mod}) \\ [V] &\mapsto [\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{S}} L] \end{aligned}$$

[1]有木自身による講究録 [Ari00] に証明の細部にわたる解説があるので, 詳しくはこちらを参照されたい.

は well-defined な全射である．

この写像 $d_{\mathbb{K},\mathbb{F}}$ を分解写像という．これを $\mathbb{Q}$ 係数に拡大して双対を取り，全ての n について直和をとることで，埋め込み

$$
{}^t d_{\mathbb{K},\mathbb{F}} \colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_{n,\mathbb{F}}\text{-}\mathsf{mod})^* \hookrightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_{n,\mathbb{K}}\text{-}\mathsf{mod})^*
$$

が得られる．この両辺にも上と同様にして関手が誘導する $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ の作用が入り，${}^t d_{\mathbb{K},\mathbb{F}}$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ 準同型となる．これを基に，有木は次のようにして LLT 予想を証明した．

定理 1.1.4 (有木 [Ari96])**.** $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ となるモジュラー系 $(\mathbb{K}, \mathbb{S}, \mathbb{C})$ をとり，パラメータ $\zeta \in \mathbb{S}$ を，$\mathbb{C}$ では 1 の原始 r 乗根だが $\mathbb{K}$ では 1 の累乗根にならないようにとる．すると以下が成立する．

(1) $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ 加群の同型

$$
V(\Lambda_0) \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_{n,\mathbb{C}}\text{-}\mathsf{mod})^*
$$

と

$$
\mathcal{F} \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} K(H_{n,\mathbb{K}}\text{-}\mathsf{mod})^*
$$

が成り立つ．また分解写像の転置 ${}^t d_{\mathbb{K},\mathbb{C}}$ は自然な埋め込みに対応する．

(2) この同型の下で，$V(\Lambda_0)$ の大域基底 $\{G(\mu)\}$ と $\mathcal{F}$ の基底 $\{\lambda\}$ は，それぞれの Hecke 代数の既約表現を集めた基底の双対基底 $\{[D_{\mathbb{C}}(\mu)]^*\}$ と $\{[S_{\mathbb{K}}(\lambda)]^*\}$ に一致する．

(3) ${}^t d_{\mathbb{K},\mathbb{C}}([D_{\mathbb{C}}(\mu)]^*) = \sum_{\lambda} d_{\lambda\mu}[S_{\mathbb{K}}(\lambda)]^*$ である．ここで $d_{\lambda\mu}$ は $H_{n,\mathbb{C}}(\sqrt[r]{1})$ の分解係数である．

LLT 予想はこの定理の (1), (2), (3) を全て合わせた結果に他ならない．Hecke 代数の分解係数を標準基底の展開係数で計算できるという LLT 予想は，最高ウェイト加群を Hecke 代数の表現の圏の Grothendieck 群で実現することによって解かれたのである．このように，集合と写像の世界における代数的構造を圏と関手の世界に持ち上げることを categorification という．

1.2 全体の流れ

さて, categorification という視点からすると, 有木によるアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ の表現の categorification は, 量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_r)$ の表現がパラメータ $q = 1$ に特殊化されてしまい, 情報が失われているという不満がある. [LLT96] では上の予想に加え $d_{\lambda\mu}(q)$ が非負整数係数の多項式であることも予想しており, この係数にも表現論的な意味付けがあると期待される. そこでこの講義で目標とするのは, Khovanov–Lauda–Rouquier 代数[2](KLR 代数) による量子群自体の categorification である. この代数は Khovanov–Lauda [KL09, KL11] と Rouquier [Rou] によりほぼ同時期に発見された. ここでの重要なアイディアは, 通常の代数とその表現の代わりに次数付きの代数とその次数を保つ表現を考えることにある. このとき係数環の q は表現の次数をずらす作用として実現される. $q = 1$ というパラメータの特殊化はこの次数付けを無視することに他ならない.

細かい記号の説明は抜きにして, まず主張を述べる.

定理. $\mathfrak{g}$ を対称化可能な Kac–Moody Lie 代数, Q を対応するルート格子とする. このとき正ルート格子の各元 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し次数付き代数 $R(\beta)$ が定義され, $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群として

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}, \qquad \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}^*$$

という同型がある. ここで $R(\beta)$-gmod (resp. $R(\beta)$-gproj) はそれぞれ次数付きの有限次元 (resp. 有限生成射影的) 加群の圏を表す.

以上の流れを踏まえた上で各章の役割を説明すると, 次のようになる.

- KLR 代数の構成 (第 2 章)
- アフィン Hecke 代数と KLR 代数との関係について (第 3 章)
- ルート系に付随する KLR 代数の構成 (第 4 章)
- 次数付き代数の表現圏の構造に関する一般論 (第 5 章)
- 量子群の解説 (第 6 章)
- $\mathfrak{sl}_2$-case の KLR 代数を調べる (第 7 章)

[2] 箙 Hecke 代数 (quiver Hecke algebra) と呼ばれることもある.

- KLR 代数を用いて, 実際に量子群を圏化する (第 8 章)

定理の証明全体はとても長いものであるが, 全体の流れを意識して議論に迷わないようにして欲しい. 各章の相関図は次の通りである.

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\text{章} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
3\text{章} & 4\text{章} \arrow[d] & 5\text{章} \arrow[dl] \\
6\text{章} \arrow[dr] & 7\text{章} \arrow[d] & \\
 & 8\text{章} &
\end{tikzcd}
$$

記法

(i) 環は, 単位元をもつものとする.

(ii) 環上の加群は, 特に断らない限り左加群を意味する.

(iii) P を命題とするとき,

$$\delta(P) = \begin{cases} 1 & P\text{が真のとき}, \\ 0 & P\text{が偽のとき} \end{cases}$$

と定義する.

(iv) 環 A に対して, A^{op} を A の逆環とする. すなわち $A^{\mathrm{op}} = \{a^{\mathrm{op}} \mid a \in A\}$ で $a^{\mathrm{op}} + b^{\mathrm{op}} = (a+b)^{\mathrm{op}}$, $a^{\mathrm{op}} \cdot b^{\mathrm{op}} = (b \cdot a)^{\mathrm{op}}$ の環構造をもつ.

(v) 圏 $\mathscr{C}$ に対して, その双対圏を $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ であらわす.

(vi) 環 A に対して, $A^{\times}$ を A の可逆な元からなる群とする.

(vii) $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群 M に対して, M を $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の自己同型 $q \mapsto q^{-1}$ でひねって得られた $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群を $\overline{M}$ と記す. 即ち, $\overline{M} = \{\overline{u} \mid u \in M\}$ で, その $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群構造は $a(q)\overline{u} = \overline{a(q^{-1})u}$ $(a(q) \in \mathbb{Z}[q,q^{-1}])$ で与えられる.

2章　Khovanov-Lauda–Rouquier 代数

この章の目的は, これからの話の主役である Khovanov–Lauda–Rouquier 代数 (以下 KLR 代数と略す) を定義し, その代数としての性質を調べることである. この章を通じて, 可換環 $\Bbbk$ と有限集合 I を固定する[3]. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は I^n に作用することに注意しよう. 具体的には, その作用は $w \in \mathfrak{S}_n$ と $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in I^n$ に対して

$$(w\nu)_k = \nu_{w^{-1}(k)}$$

となる.

2.1　KLR 代数の定義と基本的性質

各 $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し 2 変数多項式 $Q_{ij}(u, v) \in \Bbbk[u, v]$ が与えられ,

$$Q_{ij}(u, v) = Q_{ji}(v, u)$$

を満たしたとする. これに付随する 3 変数多項式 $\overline{Q}_{ij}(u, v, w) \in \Bbbk[u, v, w]$ を

$$\overline{Q}_{ij}(u, v, w) = \frac{Q_{ij}(u, v) - Q_{ij}(w, v)}{u - w}$$

で定義する. 一見すると右辺は有理式だが, 分子に $u = w$ を代入すると $Q_{ij}(u, v) - Q_{ij}(u, v) = 0$ となるので, 分母 $u - w$ で割り切れることに注意せよ.

この多項式の族 $Q := \big(Q_{ij}(u, v)\big)_{i,j \in I}$ をもとに, 次のように KLR 代数を定義する.

定義 2.1.1. n を非負整数とする. n 次の KLR 代数 $R_n = R_n(Q)$ は, 以下の生成元と関係式で定義される $\Bbbk$ 上の代数である. 生成元は

$$\begin{aligned} e(\nu) &\quad \big(\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in I^n\big), \\ x_k &\quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \tau_k &\quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \end{aligned}$$

[3]後にルート系に付随する KLR 代数を考える際は, I として単純ルートの集合をとる.

であり, その間の関係式は

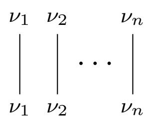
$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{\nu \in I^n} e(\nu), \\
e(\nu)e(\nu') &= \delta_{\nu\nu'} e(\nu), \\
x_k x_{k'} &= x_{k'} x_k, \\
x_k e(\nu) &= e(\nu) x_k, \\
\tau_k e(\nu) &= e(s_k \nu) \tau_k, \\
(\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\nu) &= \begin{cases} e(\nu) & \text{if } l = k+1,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ -e(\nu) & \text{if } l = k,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\tau_k \tau_{k'} &= \tau_{k'} \tau_k \quad \text{if } |k - k'| > 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k) e(\nu) \\
&\qquad = \begin{cases} \overline{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \\
&\tau_k^2 e(\nu) = \begin{cases} Q_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu) & \text{if } \nu_k \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

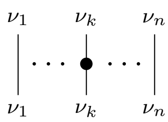
で与えられる. ただし, $s_k = (k, k+1)$ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の隣接互換である. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は可換なので, これらを多項式に代入した値は well-defined である.

ここでは Rouquier [Rou] の定義に従った. [KL09, KL11] の定義とは, $\tau_k \leftrightarrow -\tau_k$ で移りあう.

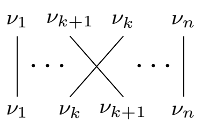
注意 2.1.2. [KL09, KL11] では生成元を以下のような図で表している. 各々の紐が I の元により色付けられていると思えばよい.

$e(\nu) =$ 

,

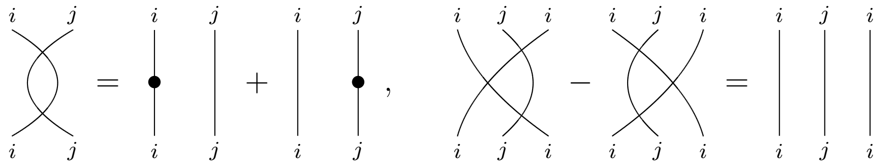
$x_k e(\nu) = e(\nu) x_k =$ 

,

$\tau_k e(\nu) = e(s_k \nu) \tau_k =$ 

.

二つの元の積 ab は a の図を上に, b の図を下にして上下に繋げた図で描かれる. ただし, 繋げた部分の文字列が一致しなければ (違う色の紐を繋ごうとすれば) 積は 0 になる. これを用いると, たとえば $Q_{ij}(u,v)=u+v$ のとき上の関係式の一部は



のように表せる. KLR 代数にあらわれる等式を適宜このような図をもちいて描くことは, (特に第 8 章で) 計算のよい助けになる.

簡単な例を挙げる.

例 2.1.3. (i) $R_0 \simeq \Bbbk$, $R_1 \simeq \Bbbk[x]^{\oplus I}$.

(ii) $I=\{i\}$ がただ一つの元 i からなるとき, KLR 代数 R_n は nilHecke 代数と呼ばれる代数と同型である. これについては第 7 章で詳しく考察する.

関係式から簡単に分かる事項として, KLR 代数上の anti-involution の存在がある. これは上記の注意 2.1.2 のように図で描けば上下を反転させる操作である.

補題 2.1.4. 生成元 $e(\nu)$, x_k, τ_k を固定する R_n 上の anti-involution

$$\psi\colon R_n \to R_n$$

が存在する.

Proof. 上の生成元が積を逆にした定義関係式を再び満たすことを示せばよい. 以下そのうちの 2 つを実際に計算で確認する. 他のものは自明である.

$$
\begin{aligned}
e(\nu)(x_j\tau_k - \tau_k x_{s_k(j)}) &= -(\tau_k x_{s_k(j)} - x_j\tau_k)e(s_k\nu) \\
&= \begin{cases} -e(s_k\nu) & \text{if } s_k(j) = k+1,\ (s_k\nu)_k = (s_k\nu)_{k+1}, \\ e(s_k\nu) & \text{if } s_k(j) = k,\ (s_k\nu)_k = (s_k\nu)_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= \begin{cases} e(\nu) & \text{if } j = k+1,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ -e(\nu) & \text{if } j = k,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e(\nu)(\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k) \\
&\quad = (\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k)e(s_{k+1}s_k s_{k+1}\nu) \\
&\quad = \begin{cases} \overline{Q}_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})e(s_{k+1}s_k s_{k+1}\nu) & \text{if } \nu_{k+2} = \nu_k \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&\quad = \begin{cases} e(\nu)\overline{Q}_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

2.2 多項式環 P_n

前節で KLR 代数を生成元と関係式で定義したが, 一般に生成元と関係式で定義される代数というのは扱い辛いものがある. そこで KLR 代数 R_n のもっと具体的な表示を与えるべく, PBW 型の定理を導こう. そこでまず, 生成元 x_k と $e(\nu)$ で生成される部分を記述する代数 P_n を導入する. これは多項式環の一般化である.

定義 2.2.1. 可換 $\Bbbk$ 代数 P_n を

$$P_n := \left(\Bbbk[x]^{\oplus I}\right)^{\otimes n}$$

で定義する.

手始めに $n=1$ とし, P_1 の構造を調べよう．各 $i \in I$ に対し, 第 i 成分だけが 1 で他の成分が 0 であるような元 $(0,\dots,1,\dots,0) \in \Bbbk[x]^{\oplus I}$ を $e(i)$ と書くことにする．また多項式 $f(x) \in \Bbbk[x]$ と, これを I の元の分だけ直和した元 $\bigl(f(x),\dots,f(x)\bigr) \in \Bbbk[x]^{\oplus I}$ を同一視する．すると $e(i)$ たちは互いに直交する冪等元であり,

$$P_1 = \Bbbk[x]^{\oplus I} \simeq \bigoplus_{i\in I} \Bbbk[x]e(i)$$

と直和分解できる．一般の n についても同様に, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n) \in I^n$ に対し $e(\nu) := e(\nu_1)\otimes\cdots\otimes e(\nu_n)$ とおき, $\Bbbk$ 代数の同型 $\Bbbk[x]^{\otimes n} \simeq \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ を用いることで, P_n は

$$P_n \simeq \bigoplus_{\nu\in I^n} \bigl(\Bbbk[x]e(\nu_1)\otimes\cdots\otimes\Bbbk[x]e(\nu_n)\bigr) \simeq \bigoplus_{\nu\in I^n} \Bbbk[x_1,\dots,x_n]e(\nu)$$

と書ける．

P_n には, テンソル成分の入れ替えによって自然に n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する．上の同一視のもとで, $f(x_1,\dots,x_n)e(\nu_1,\dots,\nu_n)$ に対する $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の作用は

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \Bigl(f(x_1,\dots,x_n)e(\nu_1,\dots,\nu_n)\Bigr) \\ = f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})e\bigl(\nu_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\nu_{\sigma^{-1}(n)}\bigr)\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

となる．

多項式環 P_n のこれらの元を KLR 代数 R_n にそのまま写すことにより, P_n から R_n への $\Bbbk$ 代数の準同型が得られる．これが単射であることは自明ではないが, 定理 2.3.1 において証明する．

補題 2.2.2. $P_n \ni f(x_1,\dots,x_n)e(\nu) \mapsto f(x_1,\dots,x_n)e(\nu) \in R_n$ は $\Bbbk$ 代数の準同型を与える．

Proof. R_n 内で $fe(\nu)\cdot f'e(\nu') = \delta_{\nu\nu'}ff'e(\nu)$ が成り立つことを示せばよいが, これは関係式から明らか． □

2.3 KLR 代数の P_n 加群構造 (1)

我々の目標は次の定理である．

定理 2.3.1. 各々の $w \in \mathfrak{S}_n$ に対しその最短表示 $w = s_{k_1}s_{k_2}\cdots s_{k_l}$ を 1 つ固定し, R_n の元 τ_w を

$$\tau_w := \tau_{k_1}\tau_{k_2}\cdots\tau_{k_l}$$

で与える．すると KLR 代数 R_n は, $\{\tau_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ を基底とする自由 P_n 加群となる．すなわち

$$R_n = \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n} P_n\tau_w.$$

この定理を証明するには, P_n 上で

- τ_w たちが R_n を生成すること
- τ_w たちが一次独立であること

の二つを示せば良い．この節では前半を示す．そのために必要となる道具は次のフィルトレーションである．

定義 2.3.2. KLR 代数のフィルトレーション F を

$$F_l(R_n) := \sum_{\substack{l'\le l,\\ 1\le k_1,\dots,k_{l'}\le n-1}} P_n\tau_{k_1}\cdots\tau_{k_{l'}}$$

で与える．このフィルトレーションによる R_n の次数化を $\mathrm{gr}^F(R_n)$ と表す．

$F_l(R_n)\cdot F_{l'}(R_n) \subset F_{l+l'}(R_n)$ を満たすので, $\mathrm{gr}^F(R_n)$ は $\Bbbk$ 代数の構造をもつ．

KLR 代数の定義を見れば分かる通り, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ たちは完全には組紐関係式を満たさない．したがって $\tau_w \in R_n$ は $w \in \mathfrak{S}_n$ の最短表示の取り方に依存している．しかしこのフィルトレーションで見ると, 関係式

$$\begin{aligned}&(\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k)e(\nu)\\ &\qquad= \begin{cases}\overline{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1},\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

の右辺は左辺に比べて次数が低い．故に $\mathrm{gr}^F(R_n)$ における τ_k の像 $\overline{\tau_k} \in \mathrm{gr}^F(R_n)$ たちは組紐関係式を満たし, τ_w の像 $\overline{\tau_w} \in \mathrm{gr}^F(R_n)$ は w の最短表示の取り方に依存しない．また, 同様に次数を比べると $\overline{\tau_k}^2 = 0$ となることが分かる．これを用いると, $\overline{\tau_w}$ たちの積の計算規則を得られる．

補題 2.3.3. ℓ を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の生成元 $s_1, \ldots, s_{n-1}$ に関する長さ関数とする．このとき

$$\overline{\tau_w}\,\overline{\tau_{w'}} = \begin{cases} \overline{\tau_{ww'}} & \bigl(\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')\bigr) \\ 0 & \bigl(\ell(ww') < \ell(w) + \ell(w')\bigr) \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof. $w = s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_l}$, $w' = s_{k'_1} s_{k'_2} \cdots s_{k'_{l'}}$ を共に最短表示とする．もし $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$ なら $ww' = s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_l}\, s_{k'_1} s_{k'_2} \cdots s_{k'_{l'}}$ が再び最短表示になるので $\overline{\tau_w}\,\overline{\tau_{w'}} = \tau_{ww'}$ が成り立つ．そうでなければこの表示を組紐関係式で上手く取りかえて s_k^2 が途中に現れるようにできる．すると

$$\overline{\tau_w}\,\overline{\tau_{w'}} = (\cdots)\overline{\tau_k}^2(\cdots) = 0$$

となる． □

補題 2.3.4. KLR 代数 R_n は P_n 上 $\{\tau_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ で生成される．すなわち

$$R_n = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n \tau_w$$

である．

Proof. まず $\mathrm{gr}^F(R_n)$ について類似の結果を示す．$x_k, e(\nu)$ と $\overline{\tau}_{k'}$ の積があった場合, 交換関係 $\overline{\tau_k} e(\nu) = e(s_k \nu)\overline{\tau}_k$, $(\overline{\tau_k} x_l - x_{s_k(l)} \overline{\tau}_k) e(\nu) = 0$ を繰り返し使えば, $\overline{\tau}_k$ を右側に持って行くことができる．さらに上の補題 2.3.3 から, $\mathrm{gr}^F(R_n)$ において $\overline{\tau}_k$ たちをかけて得られる元は $\overline{\tau}_w$ $(w \in \mathfrak{S}_n)$ で全て尽くされる．よって

$$\mathrm{gr}^F(R_n) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n \overline{\tau}_w$$

が得られる．従って

$$F_l(R_n) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \ell(w) \leq l}} P_n \tau_w$$

が成り立つ． □

2.4 KLR 代数の多項式表現

続いて $\{\tau_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ の一次独立性を示そう．そのためには多項式環 P_n の上に R_n の τ_w の作用をうまく定め, これらの作用素が P_n 上一次独立であることを示せばよい.

P_n を拡大して,

$$K_n = Q_n[(x_i - x_j)^{-1}\ ;\ i < j]$$

と定義する．これも環となっている．既にみたように P_n には対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用しているが, K_n にも $\mathfrak{S}_n$ が作用している.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群環 $\Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ の $w \in \mathfrak{S}_n$ に対応する元を r_w と書こう．従って, $r_w \circ r_{w'} = r_{ww'}$ が成り立つ．そこで, $K_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ に

$$(f \otimes r_w) \circ (f' \otimes r_{w'}) = \big(fw(f')\big) \otimes r_{ww'} \tag{2.4.1}$$

と積を定義すると, $K_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ は環となる．但し, $w(f') \in K_n$ は, f' に w が作用して得られた元をあらわす．さらに, $K_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ は K_n に

$$(f \otimes r_w) \cdot g = fw(g)$$

で, 左から作用する．従って, 環の準同型 $\Bbbk[\mathfrak{S}_n] \otimes K_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(K_n)$ が得られる．次の補題の証明は, 演習として読者に譲る.

補題 2.4.1. 環の準同型 $\Bbbk[\mathfrak{S}_n] \otimes K_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(K_n)$ は, 単射である.

さて, $Q_{ij}(u,v) = Q_{ji}(v,u)$ の仮定を用いれば, 各 $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し 2 変数多項式 $P_{ij}(u,v) \in \Bbbk[u,v]$ を,

$$P_{ij}(u,v)P_{ji}(v,u) = Q_{ij}(u,v) \tag{2.4.2}$$

を満たすように取れる．たとえば I 上の全順序を一つとって,

$$P_{ij}(u,v) = \begin{cases} 1 & (i > j) \\ Q_{ij}(u,v) & (i < j) \end{cases} \tag{2.4.3}$$

とおけばよい．このような $\{P_{ij}(u,v)\}_{i,j}$ をとって, $K_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ の元 $\tilde{\tau}_k$ を

$$\tilde{\tau}_k = \sum_{\substack{\nu \in I^n \\ \nu_k \neq \nu_{k+1}}} P_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu) r_k + \sum_{\substack{\nu \in I^n \\ \nu_k = \nu_{k+1}}} (x_k - x_{k+1})^{-1}(r_k - 1)e(\nu)$$

と定義する．但し，$s_k=(k,k+1)\in\mathfrak{S}_n$ を互換として，$r_k:=r_{s_k}$．第 2 項に現れる元に対応する $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ の作用素

$$\partial_k:=(x_k-x_{k+1})^{-1}(s_k-1)$$

は差分商作用素と呼ばれる．以前と同様の注意から，$\partial_k e(\nu)$ $(\nu_k=\nu_{k+1})$ を P_n の元に作用させた結果は再び多項式になり P_n に入ることに注意しよう．作用素 $\tilde{\tau}_k$ と $e(\nu)$ の積は

$$\tilde{\tau}_k e(\nu)=e(s_k\nu)\tilde{\tau}_k=\begin{cases}P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_k,x_{k+1})r_k e(\nu) & \text{if } \nu_k\neq\nu_{k+1},\\ \partial_k e(\nu) & \text{if } \nu_k=\nu_{k+1}\end{cases}$$

を満たすことに注意せよ．

定理 2.4.2. 次の事実が成り立つ．

(i) $\tau_k\mapsto\tilde{\tau}_k$ は，R_n から $K_n\otimes\Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ への $\Bbbk$-代数の準同型を与える．

(ii) $R_n\longrightarrow K_n\otimes\Bbbk[\mathfrak{S}_n]\longrightarrow\mathrm{End}(K_n)$ の像は，P_n を不変とする．

特に，$x_k,e(\nu)\in R_n$ は左からの掛け算で，$\tau_k\in R_n$ は $\tilde{\tau}_k$ の作用で P_n に作用させることにより，P_n は R_n-加群となる．これを KLR 代数 R_n の多項式表現と呼ぶ．

定理の証明の前に，差分商作用素が以下のような性質を満たすことを注意しておく．

補題 2.4.3. 多項式 $f(x_1,\dots,x_n)\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ に対し，f を左から掛ける作用素と ∂_k の交換関係は

$$\partial_k f=s_k(f)\partial_k+\partial_k(f)$$

で与えられる．ここで $s_k(f)$ と $\partial_k(f)$ はそれぞれの作用素を f に作用させて得られた多項式を左から掛ける作用素を表す．また差分商作用素 $\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_{n-1}$ は $\partial_k^2=0$ と組紐関係式を満たす．

Proof. 互換に対応する r_k と多項式の交換関係 $r_k f=s_k(f)r_k$ を用いて計算すればよい．たとえば

$$\partial_k f-s_k(f)\partial_k=\frac{\bigl(r_k f-f\bigr)-\bigl(s_k(f)r_k-s_k(f)\bigr)}{x_k-x_{k+1}}=\frac{s_k(f)-f}{x_k-x_{k+1}}=\partial_k(f)$$

となる．あとの関係式については省略する．□

Proof of 定理 *2.4.2*. 補題 2.4.3 を用い, 自明なものを除いて実際に関係式を計算でチェックする.

(1) $(\tilde{\tau}_k x_j - x_{s_k(j)}\tilde{\tau}_k)e(\nu)$ を計算する. $\nu_k = \nu_{k+1}$ のときは,

$$\begin{aligned}(\tilde{\tau}_k x_j - x_{s_k(j)}\tilde{\tau}_k)e(\nu) &= \partial_k(x_j)e(\nu)\\ &= \begin{cases} e(\nu) & \text{if } j = k+1,\\ -e(\nu) & \text{if } j = k,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

また $\nu_k \neq \nu_{k+1}$ のときは,

$$\begin{aligned}(\tilde{\tau}_k x_j - x_{s_k(j)}\tilde{\tau}_k)e(\nu) &= \big(P_{\nu_{k+1}\nu_k} r_k x_j - x_{s_k(j)} P_{\nu_{k+1}\nu_k} r_k\big)e(\nu)\\ &= \big(P_{\nu_{k+1}\nu_k} x_{s_k(j)} - x_{s_k(j)} P_{\nu_{k+1}\nu_k}\big)r_k e(\nu)\\ &= 0\end{aligned}$$

である.

(2) $|k-k'| > 1$ のとき, $\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k'} = \tilde{\tau}_{k'}\tilde{\tau}_k$ を確かめる. 各 $\nu \in I^n$ に対し $(\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k'} - \tilde{\tau}_{k'}\tilde{\tau}_k)e(\nu) = 0$ を示せばよいが, これは $\{x_k, x_{k+1}, r_k\}$ と $\{x_{k'}, x_{k'+1}, r_{k'}\}$ が互いに可換であることから従う.

(3) $(\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1} - \tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k)e(\nu)$ の計算. ν_k, ν_{k+1}, ν_{k+2} のうちどれが等しいかで場合分けをする.

<u>case. 1</u> $\nu_k = \nu_{k+1} = \nu_{k+2}$ のとき:

$$(\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1} - \tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k)e(\nu) = (\partial_{k+1}\partial_k\partial_{k+1} - \partial_k\partial_{k+1}\partial_k)e(\nu) = 0.$$

<u>case. 2</u> $\nu_k = \nu_{k+1} \neq \nu_{k+2}$ のとき. 第 1 項は

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}e(\nu) &= \partial_{k+1}(P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})r_k)(P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1})e(\nu)\\ &= \partial_{k+1}P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})r_k r_{k+1}e(\nu)\end{aligned}$$

ここで中の多項式は x_{k+1} と x_{k+2} に関し対称式なので ∂_{k+1} と交換でき,

$$\begin{aligned}&= P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})\partial_{k+1}r_k r_{k+1}e(\nu)\\ &= P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})r_k r_{k+1}\partial_k e(\nu)\end{aligned}$$

となる. また第 2 項は

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k e(\nu) &= P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})r_k \cdot P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \cdot \partial_k \cdot e(\nu)\\ &= P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})r_k r_{k+1}\partial_k e(\nu)\end{aligned}$$

となるので両者は等しい.

<u>case. 3</u> $\nu_k \neq \nu_{k+1} = \nu_{k+2}$ のとき. これは上の場合と同様.

<u>case. 4</u> ν_k, ν_{k+1}, ν_{k+2} がすべて異なるとき:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}e(\nu) \\
&\quad = P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \cdot P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+1})r_k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \cdot e(\nu) \\
&\quad = P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r_{k+1}r_kr_{k+1}e(\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_ke(\nu) \\
&\quad = P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})r_k \cdot P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_k, x_{k+1})r_k \cdot e(\nu) \\
&\quad = P_{\nu_{k+2}\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})P_{\nu_{k+2}\nu_k}(x_k, x_{k+2})P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r_kr_{k+1}r_ke(\nu)
\end{aligned}$$

であるので両者は等しい.

<u>case. 5</u> $\nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1}$ のとき.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}e(\nu) &= P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \\
&\qquad\qquad \cdot\partial_k \cdot P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_{k+1}, x_{k+2})r_{k+1} \cdot e(\nu) \\
&= P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2}) \\
&\qquad \cdot\frac{P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})r_{k+1}r_kr_{k+1} - P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_{k+2}, x_{k+1})}{x_k - x_{k+2}}e(\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_ke(\nu) &= P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})r_k \cdot \partial_{k+1} \cdot P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_k, x_{k+1})r_k \cdot e(\nu) \\
&= P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) \\
&\qquad \cdot\frac{P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_{k+2})r_kr_{k+1}r_k - P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1}, x_k)}{x_k - x_{k+2}}e(\nu)
\end{aligned}$$

となる. 両者の差をとると, 確かに

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1} - \tilde{\tau}_k\tilde{\tau}_{k+1}\tilde{\tau}_k)e(\nu) \\
&= \frac{P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k,x_{k+1})P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1},x_k) - P_{\nu_{k+1}\nu_k}(x_{k+1},x_{k+2})P_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_{k+2},x_{k+1})}{x_k - x_{k+2}}e(\nu) \\
&= \frac{Q_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) - Q_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_{k+2}, x_{k+1})}{x_k - x_{k+2}}e(\nu)
\end{aligned}$$

$$= \overline{Q}_{\nu_k \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) e(\nu)$$

となっている．これで全ての場合をチェックできた．

(4) $\tilde{\tau}_k^2 e(\nu) = Q_{\nu_k \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu)$ の確認．$\nu_k = \nu_{k+1}$ のときは，

$$\tilde{\tau}_k^2 e(\nu) = \partial_k^2 e(\nu) = 0$$

である．$\nu_k \neq \nu_{k+1}$ のときは，

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_k^2 e(\nu) &= P_{\nu_k \nu_{k+1}}(x_k, x_k + 1) r_k \cdot P_{\nu_{k+1} \nu_k}(x_k, x_k + 1) r_k \cdot e(\nu) \\
&= P_{\nu_k \nu_{k+1}}(x_k, x_k + 1) P_{\nu_{k+1} \nu_k}(x_{k+1}, x_k) e(\nu) \\
&= Q_{\nu_k \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu)
\end{aligned}$$

となるのでこの場合も関係式が成り立つ． □

2.5 KLR 代数の P_n 加群構造 (2)

さて τ_w $(w \in \mathfrak{S}_n)$ たちの一次独立性の証明に移ろう．このために，τ_w たちの多項式環 P_n への作用の一次独立性を示す．実はこれが成立するためには，R_n を定義する多項式 $Q_{ij}(u, v)$ に少し条件[4]が必要である．

命題 2.5.1. P_n 上の作用素 $\{\tau_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ が P_n 上一次独立であるためには，各 $Q_{ij}(u, v) \in \Bbbk[u, v]$ $(i \neq j)$ が 非零因子 $(f(u, v) Q_{ij}(u, v) = 0$ ならば $f(u, v) = 0$ となる$)$ となる多項式であることが必要かつ十分である．

Proof. 必要性は $\tau_k f(x_k, x_{k+1}) e(\nu) = P_{\nu_{k+1} \nu_k}(x_k, x_{k+1}) f(x_{k+1}, x_k) e(s_k \nu)$ から明らかである．そこですべての $Q_{ij}(u, v) \in \Bbbk[u, v]$ が 非零因子であるとし $\{\tilde{\tau}_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ の一次独立性を示す．

$1 \leq a < b \leq n - 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
A_{a,b} &= \sum_{\nu \in I^n,\, \nu_a = \nu_b} (x_a - x_b)^{-1} e(\nu), \\
\tilde{P}_{a,b} &= \sum_{\nu \in I^n,\, \nu_a \neq \nu_b} P_{\nu_a, \nu_b}(x_a, x_b) e(\nu) + A_{a,b}
\end{aligned}$$

とおけば，$k = 1, \ldots, n - 1$ にたいして，

$$\tilde{\tau}_k = \tilde{P}_{k,k+1} r_k - A_{k,k+1}$$

[4]後に第 4 章で述べるルート系から定義される KLR 代数については自動的に満たされている．

となる. $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して, τ_w に対応する $K_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ の元を $\tilde{\tau}_w$ とおく. $w \in \mathfrak{S}_n$ の長さによる帰納法をもちいて

$$\tilde{\tau}_w - B_w r_w \in \sum_{w' \in \mathfrak{S}_n, \ell(w') < \ell(w)} K_n r_{w'}$$

となることが容易にわかる. 但し, $B_w := \prod_{i<j,\, w^{-1}i > w^{-1}j} \tilde{P}_{i,j}$.

$a_w \in K_n$ $(w \in \mathfrak{S}_n)$ が

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} a_w \tilde{\tau}_w = 0$$

を満たしたとき, $a_w = 0$ が任意の w にたいして成立することを, w の長さに関する下がる帰納法で示そう. $0 \leq \ell \leq n$ にたいして, $a_w = 0$ が $\ell(w) > \ell$ で成り立ったとして, $a_w = 0$ が $\ell(w) = \ell$ に対して成り立つことを示す. 仮定から,

$$0 = \sum_{\ell(w) \leq \ell} a_w \tilde{\tau}_w \equiv \sum_{\ell(w) = \ell} a_w B_w r_w \mod \sum_{\ell(y) < \ell} K_n r_y.$$

従って, $a_w B_w = 0$ が成り立つ. 仮定から, B_w は非零因子故, $a_w = 0$ が結論される. □

以上より, 定理 2.3.1 の証明の準備ができた.

Proof of 定理 *2.3.1*. $Q_{ij}(u,v)$ が命題 2.5.1 の条件を満たす場合には, 作用から誘導される準同型 $R_n \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P_n)$ を考えることで $\tau_w \in R_n$ の一次独立性が従う. よって補題 2.3.4 と合わせれば定理が証明される.

この条件が満たされない場合には, 以下のように修正を行う. まず $\Bbbk$ 上の多項式環 $\Bbbk[t]$ を考え, $Q_{ij}(u,v)$ の代わりに $Q_{ij}(u,v) + t$ で定義した $\Bbbk[t]$ 上の KLR 代数を $R_n[t]$ と書く. この $Q_{ij}(u,v) + t$ は命題 2.5.1 の条件を満たすので, 定理は成立し

$$R_n[t] = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n[t] \widehat{\tau}_w$$

と書ける. ここで $R_n[t]$ の生成元を $\widehat{\tau}_k$ と書き, τ_w と同じ方法で $\widehat{\tau}_w$ を $\widehat{\tau}_k$ たちの積として定義した. さて, ここに $t = 0$ を代入することを考える. すなわち, $t \in \Bbbk[t]$ を 0 で作用させることで $\Bbbk$ を $\Bbbk[t]$ 加群とみなし, これとテンソル積を取る. すると明らかに

$$\Bbbk \otimes_{\Bbbk[t]} R_n[t] = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n(1 \otimes \widehat{\tau}_w)$$

である．$1 \otimes \widehat{\tau}_k$ は τ_k と同じ関係式を満たすので, $\Bbbk$ 代数の準同型 $R_n \to \Bbbk \otimes_{\Bbbk[t]} R_n[t]$ が定義できる．逆写像も同様に定義でき, 両者は $\Bbbk$ 上の代数として同型になる．これから

$$R_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n \tau_w$$

が従う．以上で定理の証明が完成した． □

系 2.5.2. すべての $Q_{ij}(u,v) \in \Bbbk[u,v]$ $(i \neq j)$ が非零因子のとき, またこのときに限り R_n の表現 P_n は忠実である．

一般には, $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $\tau_w := \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$ は w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ の取り方に依る．しかし, 次のことがいえる．

補題 2.5.3. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\nu \in I^n$, $w \in \mathfrak{S}_n$ が次の条件を満たすと仮定する．

(2.5.1) $1 \leq a < b < c \leq n$ が, $w(a) > w(b) > w(c)$, $\nu_a = \nu_c \neq \nu_b$ を満たせば, $\overline{Q}_{\nu_a,\nu_b} = 0$ である．

そのとき, $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l} e(\nu)$ は, w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ の取り方によらない．

Proof. w の二つの最短表示は組み紐関係式で移りあう．従って,

(2.5.2) $w = w' s_k s_{k'} w''$ が, $|k - k'| > 2$, $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'') + 2$ を満たすとき, $\tau_k \tau_{k'} e(w''\nu) = \tau_{k'} \tau_k e(w''\nu)$,

(2.5.3) $w = w' s_k s_{k+1} s_k w''$ が, $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'') + 3$ を満たすとき, $\tau_k \tau_{k+1} \tau_k e(w''\nu) = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} e(w''\nu)$

を示せばよい．(2.5.2) はいつでも成立するので, (2.5.3) を示そう．$\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'') + 3$ より

$$\begin{aligned} &w''^{-1}(k) < w''^{-1}(k+1) < w''^{-1}(k+2), \\ &w'(k) < w'(k+1) < w'(k+2) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って, $a = w''^{-1}(k)$, $b = w''^{-1}(k+1)$, $c = w''^{-1}(k+2)$ と置くと, $w(a) = w'(k+2)$, $w(b) = w'(k+1)$, $w(c) = w'(k)$ となる．$(w''\nu)_k = \nu_a$, $(w''\nu)_{k+1} = \nu_b$, $(w''\nu)_{k+2} = \nu_c$ である．仮定 (2.5.1) より, $(w''\nu)_k = (w''\nu)_{k+2} \neq (w''\nu)_{k+1}$ なら $\overline{Q}_{(w''\nu)_k,(w''\nu)_{k+1}} = 0$ となる．従って $\tau_k \tau_{k+1} \tau_k e(w''\nu) = \tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} e(w''\nu)$ が結論される． □

2.6 KLR 代数のブロック分解

続いて KLR 代数のブロックを調べる. 各 $i \in I$ について形式的な記号 α_i を用意し, これらを基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathsf{Q} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ を考える[5]. また

$$\begin{aligned} \mathsf{Q}_+ &:= \textstyle\sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \\ \mathsf{Q}_- &:= -\mathsf{Q}_+ \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

とおき, $\beta = \sum_{i\in I} m_i\beta_i \in \mathsf{Q}_+$ の高さを $\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{i\in I} m_i$ と定義する. $n = \mathrm{ht}(\beta)$ を満たす $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し,

$$I^\beta := \{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in I^n \mid \beta = \alpha_{\nu_1} + \cdots + \alpha_{\nu_n}\}, \quad e(\beta) := \sum_{\nu\in I^\beta} e(\nu) \in R_n$$

とおく. このとき R_n の定義関係式から次が明らかに成立する.

補題 2.6.1. $e(\beta)$ は R_n の全ての元と交換し, $1 = \sum_{\beta\in\mathsf{Q}_+,\, \mathrm{ht}(\beta)=n} e(\beta)$ は直交冪等元分解を与える.

したがって, これらの中心的冪等元を用いて R_n をより小さい部分代数に分解することができる.

定義 2.6.2. $R(\beta) := e(\beta)R_n = R_n e(\beta) = \sum_{\nu\in I^\beta} R_n e(\nu)$ と定める.

これは R_n の (1 を共有しない) 部分代数であり, R_n は $\Bbbk$ 上の代数として

$$R_n = \prod_{\substack{\beta\in\mathsf{Q}_+ \\ \mathrm{ht}(\beta)=n}} R(\beta)$$

と直和分解される.

任意の $R(\beta)$ 加群 M は, $\gamma \neq \beta$ に対する $R(\gamma)$ の作用を 0 と定めることで R_n 加群になる. これは $\Bbbk$ 代数の準同型 $R_n \twoheadrightarrow R(\beta)$ による引き戻しである. 逆に R_n 加群 N に対し $e(\beta)N$ は $R(\beta)$ 加群となる. これは

$$e(\beta)N \simeq R(\beta) \otimes_{R_n} N \simeq \mathrm{Hom}_{R_n}(R(\beta), N)$$

と書くこともできる. 特に, これらはどちらも完全な関手である.

[5] この格子は, 後に第 4 章でルート格子になる.

注意 2.6.3. I を $I = I_1 \sqcup I_2$ と 2 つの集合に分割して, $i \in I_1$, $j \in I_2$ に対し $Q_{ij}(u,v) \in \Bbbk^\times$ を満たすとする. $\beta \in \mathsf{Q}_+$ をそれに応じて $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ($\beta_a \in \bigoplus_{i \in I_a} \mathbb{Z}\alpha_i$, $a = 1, 2$) と書けば, $R(\beta)$ は $R(\beta_1) \otimes_\Bbbk R(\beta_2)$ 係数の行列環と同型である（すなわち森田同値). したがって, この場合 $R(\beta)$ の表現論は $R(\beta_1) \otimes_\Bbbk R(\beta_2)$ の表現論に帰着できる.

定理 2.3.1 を応用することで, この $R(\beta)$ への分解がさらにそれ以上分解できないことが証明できる.

補題 2.6.4. $Z(A)$ で代数 A の中心を表す. このとき $\beta = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ に対し,

$$Z(R_n) = P_n^{\mathfrak{S}_n}, \tag{2.6.2}$$

$$Z\big(R(\beta)\big) = \big(P_n e(\beta)\big)^{\mathfrak{S}_n} \simeq \bigotimes_{i \in I} \Bbbk[x_1, \dots, x_{m_i}]^{\mathfrak{S}_{m_i}} \tag{2.6.3}$$

が成り立つ. ここで $X^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変な X の元の集合である.

Proof. $a = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f_w \tau_w$ ($f_w \in P_n$) を中心 $Z(R_n)$ の元とする. まず任意の $w \neq 1$ に対し $f_w = 0$ となることを示そう. ここで $\ell(v) > \ell(w)$ となる $v \in \mathfrak{S}_n$ に対しては $f_v = 0$ が成り立っていると仮定する. $w \neq 1$ なので, $k \neq w(k)$ となる k がとれる. すると $x_k a = a x_k$ から

$$(x_k f_w - f_w x_{w(k)})\tau_w + \sum_{v \neq w} g_v \tau_v = 0 \quad (g_v \in P_n)$$

でなければいけない. 定理 2.3.1 より, $x_k f_w - f_w x_{w(k)} = 0$ が従う. これを満たすのは $f_w = 0$ のみである. よって帰納的に任意の $w \neq 1$ に対し $f_w = 0$ が言えた.

これより, R_n の中心元は $a = f \in P_n$ と書ける. すると任意の k に対し, $\tau_k f = f \tau_k$ から

$$0 = \tau_k f - f \tau_k = \big(s_k(f) - f\big)\tau_k + \sum_{\substack{\nu \in I^n \\ \nu_k = \nu_{k+1}}} \partial_k(f) e(\nu)$$

となり, 再び定理 2.3.1 を使うことで $s_k(f) = f$ が従う. すなわち $f \in P_n^{\mathfrak{S}_n}$ である. 逆に $f \in P_n^{\mathfrak{S}_n}$ であれば上の式から全ての τ_k と交換することもわかる. 以上で $Z(R_n) = P_n^{\mathfrak{S}_n}$ が証明できた.

一方, $e(\beta)$ は R_n の中心冪等元であるから, $Z\big(R(\beta)\big) = Z(R_n)e(\beta) = \big(P_n e(\beta)\big)^{\mathfrak{S}_n}$ がわかる. (2.6.3) の最後の同型は, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ と書き, m_k $(1 \le i \le r)$ を $\beta = \sum_{s=1}^{r} m_k \alpha_{i_s}$ で定めるとき

$$\bigotimes_{k=1}^{r} \Bbbk[x_1, \dots, x_{m_k}]^{\mathfrak{S}_{m_k}} \to (P_n e(\beta))^{\mathfrak{S}_n}$$
$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_r \mapsto \sum_{w \in \mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_{m_1} \times \mathfrak{S}_{m_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{m_r})} w \cdot \Big(f_1 e(i_1^{m_1}) \otimes f_2 e(i_2^{m_2}) \otimes \cdots \otimes f_r e(i_r^{m_r})\Big)$$

によって得られる. □

系 2.6.5. $\Bbbk$ が体のとき, $R(\beta)$ $(\beta \in \mathsf{Q}_+)$ は block algebra である. すなわち $R(\beta)$ の中心的冪等元は 0 と $e(\beta)$ のみである.

2.7 KLR 代数上の加群の合成積

前節では正ルート格子の各点 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対して $\Bbbk$ 代数 $R(\beta)$ を構成した. この節では $\beta, \gamma \in \mathsf{Q}_+$ のとき, $R(\beta)$ 加群と $R(\gamma)$ 加群に対して $R(\beta+\gamma)$ 加群を構成する合成積という手法について述べる.

$m, n \ge 0$ を非負整数とする. KLR 代数の関係式から, $\Bbbk$ 双線型写像 $R_m \times R_n \to R_{m+n}$ を

$$(x_k, 1) \mapsto x_k, \qquad (\tau_k, 1) \mapsto \tau_k, \quad (1, x_k) \mapsto x_{m+k}, \quad (1, \tau_k) \mapsto \tau_{m+k},$$
$$\big(e(\nu), e(\nu')\big) \mapsto e(\nu, \nu')$$

で定義できることが分かる. ただし $\nu \in I^m$ と $\nu' \in I^n$ を繋げてできる列を $(\nu, \nu') \in I^{m+n}$ と書いた. これによって $\Bbbk$ 代数の準同型 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n \to R_{m+n}$ が誘導される. 特に R_{m+n} は右 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群である.

記号 2.7.1. m, $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ と $a \in R_m$, $b \in R_n$ に対して, $a \boxtimes b \in R_{m+n}$ で $a \otimes b$ の $R_m \otimes_{\Bbbk} R_m \to R_{m+n}$ による像を表す.

定義 2.7.2. M を R_m 加群, N を R_n 加群とする. このとき $M \otimes_{\Bbbk} N$ は $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群となる. これを用いて R_{m+n} 加群 $M \circ N$ を

$$M \circ N = \mathrm{Ind}_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n}^{R_{m+n}} (M \otimes_{\Bbbk} N) := R_{m+n} \otimes_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n} (M \otimes_{\Bbbk} N)$$

で与える. この積 $\circ$ を加群の合成積と呼ぶ.

これの性質を調べるため, まず R_{m+n} の右 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群構造を調べておく. $\mathfrak{D}_{m,n}$ で対称群の右剰余類 $\mathfrak{S}_{m+n}/(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n)$ の完全代表系であって, 代表元として長さ最小のものを取ってできる $\mathfrak{S}_{m+n}$ の部分集合を表す. 具体的には,

$$\mathfrak{D}_{m,n} = \left\{ w \in \mathfrak{S}_{m+n} \;\middle|\; \begin{array}{l} w(1) < \cdots < w(m), \\ w(m+1) < \cdots < w(m+n) \end{array} \right\}$$

である.

注意 2.7.3. 後述する補題 2.5.3 によって, $w \in \mathfrak{D}_{m,n}$ のとき, $\tau_w := \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$ は w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ の取り方によらない.

補題 2.7.4. 準同型 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n \to R_{m+n}$ は単射であり, この像を $R_m \boxtimes R_n$ と書くとき,

$$R_{m+n} = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w (R_m \boxtimes R_n)$$

となる. 特に R_{m+n} は右 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群として有限生成かつ自由である.

Proof. 定理 2.3.1 では KLR 代数の左 P_n 加群としての基底を与えたが, anti-involution ψ を施せば τ_w たちが右加群としての基底になることが分かる. 従って,

$$R_{m+n} = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_{m+n}} \tau_w P_{m+n},$$

$$R_m \boxtimes R_n = \bigoplus_{u \in \mathfrak{S}_m} \bigoplus_{v \in \mathfrak{S}_n} (\tau_u \boxtimes \tau_v) P_{m+n} = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \tau_w P_{m+n}$$

となる. 一方, 集合として

$$\mathfrak{S}_{m+n} = \coprod_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} w (\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n)$$

である. さらに作り方から任意の $w \in \mathfrak{D}_{m,n}$ と $v \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ に対し $\ell(wv) = \ell(w) + \ell(v)$ となる. 故に

$$R_{m+n} = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \bigoplus_{v \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \tau_w \tau_v P_{m+n} = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w (R_m \boxtimes R_n)$$

である. □

上の補題を用いると次が言える．R_n-Mod で左 R_n 加群全体のなす圏を表す．

命題 2.7.5. ここでは $\Bbbk$ を体と仮定する．

(i) R_m 加群 M と R_n 加群 N が共に有限次元 (resp. 有限生成, 射影的) であれば, R_{m+n} 加群 $M \circ N$ も有限次元 (resp. 有限生成, 射影的) である．

(ii) 2 変数関手

$$\begin{aligned} R_m\text{-}\mathsf{Mod} \times R_n\text{-}\mathsf{Mod} &\to R_{m+n}\text{-}\mathsf{Mod} \\ (M, N) &\mapsto M \circ N \end{aligned}$$

は M と N 両方の変数について完全である．

Proof. (i) $M \otimes_{\Bbbk} N$ も有限次元 (resp. 有限生成, 射影的) $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群なので, 補題 2.7.4 から従う．

(ii) どちらの変数についても同様なので, M に対する完全性のみ示す．

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

を R_m 加群の完全列とする．$\Bbbk$ は体としたので, N は平坦 $\Bbbk$ 加群であり

$$0 \to M_1 \otimes_{\Bbbk} N \to M_2 \otimes_{\Bbbk} N \to M_3 \otimes_{\Bbbk} N \to 0$$

は $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群の完全列である．また補題 2.7.4 より R_{m+n} は平坦な右 $R_m \boxtimes R_n$ 加群である．よって上の完全列に平坦右 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群 R_{m+n} を左からテンソルすると

$$0 \to M_1 \circ N \to M_2 \circ N \to M_3 \circ N \to 0$$

が R_{m+n} 加群の完全列になる． □

補題 2.7.6 (shuffle lemma)**.** M を R_m 加群, N を R_n 加群 N とし $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m+n}) \in I^{m+n}$ とする．そのとき

$$e(\nu)(M \circ N) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w \Big(e(\nu_{w(1)}, \ldots, \nu_{w(m)}) M \otimes_{\Bbbk} e(\nu_{w(m+1)}, \ldots, \nu_{w(m+n)}) N \Big)$$

である．

Proof. 補題 2.7.4 より

$$M \circ N = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w(M \otimes_{\Bbbk} N)$$

となる．よって

$$e(\nu)(M \circ N) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} e(\nu)\tau_w(M \otimes_{\Bbbk} N) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w e(w^{-1}\nu)(M \otimes_{\Bbbk} N)$$

から求める表記を得る． □

さてブロック分解 $R_n = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+,\, \mathrm{ht}(\beta)=n} R(\beta)$ に対する合成積の振る舞いを調べよう．

命題 2.7.7. $\beta, \gamma \in \mathsf{Q}_+$ とし，M を $R(\beta)$ 加群，N を $R(\gamma)$ 加群とする．$m := \mathrm{ht}(\beta)$, $n := \mathrm{ht}(\gamma)$ とおき，M と N をそれぞれ引き戻しにより R_m 加群および R_n 加群と見なす．このとき，

$$e(\beta+\gamma)(M \circ N) = M \circ N$$

が成り立つ．すなわち $M \circ N$ は $R(\beta+\gamma)$ 加群と見なせる．

Proof. $R(m+n)$ の部分集合として $R(m+n)\big(e(\beta) \boxtimes e(\gamma)\big) \subset e(\beta+\gamma)R_{m+n}$ より直ちに従う． □

かくして $R(\beta)$ 加群 M と $R(\gamma)$ 加群 N に対し，その合成積 $M \circ N$ を $R(\beta+\gamma)$ 加群として定義できることがわかった．特に命題 2.7.5 は R_m, R_n, R_{m+n} をそれぞれ $R(\beta), R(\gamma), R(\beta+\gamma)$ と取り替えても成り立つ．

3章　アフィンHecke代数とKLR代数

この章では基礎環 $\Bbbk$ を体と仮定する．またパラメータ $\zeta \in \Bbbk \setminus \{0, 1\}$ を一つ固定する．

第 1 章で紹介したように，$\mathsf{A}^{(1)}_{r-1}$ 型単純 Lie 環 $\hat{\mathfrak{sl}}_r$ の基本表現 $V(\Lambda_0)$ は $\zeta = \sqrt[r]{1}$ での Hecke 代数の表現圏を用いて categorify できる．実は [Ari96] では一般の既約最高ウェイト表現 $V(\Lambda)$ の categorification もなされており，それにはルート格子の各点 Λ に対応する巡回 Hecke 代数という代数の表現圏を用いる．Hecke 代数は巡回 Hecke 代数の特別な場合であり，またどの巡回 Hecke 代数もアフィン Hecke 代数という単一の代数の商として得られる．そこで，この結果と我々の KLR 代数の表現圏による categorification とを比較しよう．なおこの節における結果は Brundan–Kleshchev [BK09] による結果を我々の言葉に書き直したものである．

3.1 アフィン Hecke 代数と係数拡大

定義 3.1.1. $n \geq 0$ を非負整数とする. n 次のアフィン Hecke 代数 $\hat{H}_n$ は, $X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}$ と $T_1, \ldots, T_{n-1}$ を生成元とし関係式

(1) $X_k X_{k'} = X_{k'} X_k, \quad X_k X_k^{-1} = X_k^{-1} X_k = 1.$

(2) $T_k T_{k'} = T_{k'} T_k \ (|k - k'| > 1), \quad T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}.$

(3) $(T_k - \zeta)(T_k + 1) = 0.$

(4) $T_k X_l = X_l T_k \ (l \neq k, k+1), \quad T_k X_k T_k = \zeta X_{k+1}$

で定義される $\Bbbk$ 代数である.

$\hat{H}_n$ は Laurent 多項式環 $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ 上の加群となる.
各 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し最短表示 $w = s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_l}$ を一つ取り,

$$T_w := T_{k_1} T_{k_2} \cdots T_{k_l} \in \hat{H}_n$$

と定義する. $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ たちが組紐関係式 (2) を満たすことと, 異なる最短表示が組紐関係式で移り合うことから, T_w は最短表示の取り方に依存しない.

アフィン Hecke 代数に対しても KLR 代数と同様に次の基底定理が成り立つ. 証明も KLR 代数のときと同様であるので省略する.

定理 3.1.2. アフィン Hecke 代数について次の事実が成り立つ.

(i) Laurent 多項式環 $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ 上の作用素 T_k を, 差分商作用素 ∂_k を用いて

$$T_k := (\zeta X_k - X_{k+1}) \partial_k + \zeta$$

と定義する. すると $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ は $\hat{H}_n$ 加群になる. またこの表現は忠実である.

(ii) $\hat{H}_n$ は $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ 上の加群として自由であり, 基底として $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ がとれる. つまり,

$$\hat{H}_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \Bbbk[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}] T_w.$$

ここで $\hat{H}_n$ の係数を Laurent 多項式環 $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ から有理関数体 $\Bbbk(X_1, \dots, X_n)$ に拡大した空間

$$\Bbbk(X_1, \dots, X_n) \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]} \hat{H}_n$$

を考えよう．差分商 ∂_k と作用素 T_k は $\Bbbk(X_1, \dots, X_n)$ 上の作用素としても定義できる．よって, $\Bbbk(X_1, \dots, X_n) \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]} \hat{H}_n \to \mathrm{End}_{\Bbbk}\big(\Bbbk(X_1, \dots, X_n)\big)$ が得られる．よって基底定理から, この空間は有理関数体上 $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ を基底とする線型空間になる．このように係数拡大すれば, 逆に互換 s_k を

$$\begin{aligned} s_k &= (\zeta X_k - X_{k+1})^{-1}(X_k T_k - T_k X_k) \\ &= (\zeta X_k - X_k)^{-1}\Big((X_k - X_{k+1})T_k + (\zeta - 1)X_{k+1}\Big) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

と T_k を用いて表すことができる．これより $\Bbbk$ 代数としての同型

$$\Bbbk(X_1, \dots, X_n) \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]} \hat{H}_n \simeq \Bbbk(X_1, \dots, X_n) \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n] \tag{3.1.2}$$

が従う．

3.2 アフィン Hecke 代数と KLR 代数との同型

さて $I \subset \Bbbk^\times$ を $\Bbbk^\times$ の有限部分集合としよう．そのとき, Laurent 多項式環 $\Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ のイデアル J を

$$J := \{f \in \Bbbk[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \mid \text{任意の } \nu \in I^n \text{ にたいして } f(\nu) = 0\}$$

で与え, これによる完備化を

$$\hat{\mathcal{O}} := \varprojlim_{m>0} \Bbbk[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}]/J^m$$

とする．幾何学的には $\hat{\mathcal{O}}$ の元は集合 I^n の周りの局所的な関数を表す．そこで $\nu \in I^n$ に対し $e(\nu) \in \hat{\mathcal{O}}$ を, 各点 $\nu' \in I^n$ の周りで局所的に定数関数 $\delta_{\nu\nu'}$ となる元とする．これは代数的には次のように定義すればよい．まず多項式 $a_{\nu,0}(X_1, \dots, X_n) \in \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ を任意の $\nu' \in I^n$ について $a_{\nu,0}(\nu') = \delta_{\nu\nu'}$ となるように取り, $k \geq 1$ に対して帰納的に $a_{\nu,k} = 3a_{\nu,k-1}^2 - 2a_{\nu,k-1}^3$ で与える．すると多項式の列 $a_{\nu,0}, a_{\nu,1}, \dots$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の中で収束し, 収束先は最初の $a_{\nu,0}$ の選び方によらない．そこで

$$e(\nu) := \lim_{k \to \infty} a_{\nu,k} \in \hat{\mathcal{O}}$$

とおく．$e(\nu)$ は互いに直交する冪等元であり, $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ を ν を中心とする形式的冪級数環 $\Bbbk[[X_1-\nu_1,\dots,X_n-\nu_n]]$ とするとき $\hat{\mathcal{O}}$ は

$$\hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{\nu\in I^n} \hat{\mathcal{O}}_\nu e(\nu)$$

と直和分解される．$\hat{\mathcal{K}}_\nu$ を $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ の商体 $\Bbbk(\!(X_1-\nu_1,\dots,X_n-\nu_n)\!)$ とし, その直和を $\hat{\mathcal{K}} = \bigoplus_{\nu\in I^n}\hat{\mathcal{K}}_\nu e(\nu)$ とする．$\hat{\mathcal{O}}$ と $\hat{\mathcal{K}}$ にも T_k, s_k が作用し, これらの可換代数による $\hat{H}_n$ の係数拡大を考えることができる．$\Bbbk(X_1,\dots,X_n)$ は自然に $\hat{\mathcal{K}}$ に埋め込めるので, (3.1.2) の同型から

$$\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^\pm,\dots,X_n^\pm]} \hat{H}_n \subset \hat{\mathcal{K}} \otimes_{\Bbbk[X_1^\pm,\dots,X_n^\pm]} \hat{H}_n \simeq \hat{\mathcal{K}} \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$$

である．

補題 3.2.1. $1\le k\le n$, $\nu\in I^n$ に対し $x_{k,\nu} = \nu_k^{-1}X_k - 1$ とおき, $x_k, \tau_k \in \hat{\mathcal{K}} \otimes_{\Bbbk[X_1^\pm,\dots,X_n^\pm]} \hat{H}_n \simeq \hat{\mathcal{K}}_n \otimes \Bbbk[\mathfrak{S}_n]$ を

$$\begin{aligned}
x_k &:= \sum_{\nu\in I^n} x_{k,\nu}e(\nu),\\
\tau_k &:= \sum_{\substack{\nu\in I^n\\ \nu_k\neq\nu_{k+1}}} (x_{k,\nu}-x_{k+1,\nu})^{\delta(\nu_{k+1}=\zeta\nu_k)}e(\nu)s_k\\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{\nu\in I^n\\ \nu_k=\nu_{k+1}}} (x_{k,\nu}-x_{k+1,\nu})^{-1}(s_k-1)e(\nu)
\end{aligned}$$

で定義する．すると $x_k, \tau_k \in \hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^\pm,\dots,X_n^\pm]} \hat{H}_n$ である．

Proof. x_k については明らか．各 $\nu\in I^n$ について, $e(\nu)\tau_k$ の係数が $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ に入ることを証明する．ここで

$$e(\nu)\tau_k = \begin{cases} (x_{k,\nu}-x_{k+1,\nu})^{\delta(\nu_{k+1}=\zeta\nu_k)}e(\nu)s_k & \text{if } \nu_k\neq\nu_{k+1},\\ e(\nu)(x_{k,\nu}-x_{k+1,\nu})^{-1}(s_k-1) & \text{if } \nu_k=\nu_{k+1} \end{cases}$$

である．まず $\nu_k\neq\nu_{k+1}$ の場合を考える．このとき, (3.1.1) のように s_k を T_k で表したときに現れる分母 $\zeta X_k - X_{k+1}$ が問題となる．$\nu_{k+1}\neq\zeta\nu_k$ のときは

$$\zeta X_k - X_{k+1} = (\zeta\nu_k-\nu_{k+1}) + \zeta(X_k-\nu_k) - (X_{k+1}-\nu_{k+1})$$

なので, この元は $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ 内で可逆である．また $\zeta\nu_k = \nu_{k+1}$ のときも

$$\frac{x_{k,\nu} - x_{k+1,\nu}}{\zeta X_k - X_{k+1}} = \nu_{k+1}^{-1} \in \hat{\mathcal{O}}_\nu{}^\times$$

となる．一方 $\nu_k = \nu_{k+1}$ の場合には,

$$\begin{aligned}
&(x_{k,\nu} - x_{k+1,\nu})^{-1}(s_k - 1) \\
&\qquad = \frac{\nu_k}{(X_k - X_{k+1})(\zeta X_k - X_{k+1})} \\
&\qquad\qquad\qquad \Big((X_k - X_{k+1})T_k + (\zeta - 1)X_{k+1} - (\zeta X_k - X_{k+1})\Big) \\
&\qquad = \frac{\nu_k}{\zeta X_k - X_{k+1}}(T_k - \zeta)
\end{aligned}$$

である．$\zeta \neq 1$ より $\zeta\nu_k \neq \nu_{k+1}$ であり, 上の計算から分母は $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ 内で可逆なので係数は $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ の元になる． □

ここで与えた x_k は $s_k x_l = x_{s_k(l)} s_k$ を満たし, τ_k は KLR 代数の多項式表現に用いた作用素と同じ形をしていることに注意しよう．そこで, $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し 2 変数多項式 $P_{ij}(u,v)$, $Q_{ij}(u,v) \in \Bbbk[u,v]$ を

$$\begin{aligned}
&P_{ij}(u,v) := (u - v)^{\delta(j=\zeta i)} \\
&Q_{ij}(u,v) := P_{ij}(u,v)P_{ji}(v,u) = (u - v)^{\delta(j=\zeta i)}(v - u)^{\delta(i=\zeta j)}
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

で与える．定理 2.4.2 の証明と同様, これまでに定義した x_k, τ_k, $e(\nu)$ はその形からこの多項式の族 $(Q_{ij})_{i,j\in I}$ で定義された KLR 代数の関係式を満たす．またこの補題の証明と同様にすれば, 各 $T_k e(\nu)$ を逆に $\tau_k e(\nu)$ と $e(\nu)$ の $\hat{\mathcal{O}}_\nu$ 係数線形結合で書けることがわかる．この事実にそれぞれの基底定理定理 2.3.1 と定理 3.1.2 を合わせることで, 次の重要な同型を得る．

定理 3.2.2. R_n を (3.2.1) の $(Q_{ij})_{i,j\in I}$ で定義された KLR 代数とする．このとき

$$\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^\pm,\dots,X_n^\pm]} \hat{H}_n \simeq \hat{\mathcal{O}} \otimes_{P_n} R_n$$

が成り立つ．

これらの係数拡大された代数と元々の代数の表現論を比較するため, 次のような圏を導入しよう．

定義 3.2.3. M を有限次元 $\hat{H}_n$ 加群 (resp. R_n 加群) とする．M 上全ての $X_k \in \hat{H}_n$ (resp. $x_k \in R_n$) の作用の固有値が I の元 (resp. 固有値が 0) であるとき, M は integral であるという．

Integral な有限次元加群からなる圏をそれぞれ $\hat{H}_n$-mod_I, R_n-$\mathrm{mod}_{\mathrm{int}}$ と書こう.

補題 3.2.4. $(\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm},\dots,X_n^{\pm}]} \hat{H}_n)$-$\mathsf{mod}$, $(\hat{\mathcal{O}} \otimes_{P_n} R_n)$-$\mathsf{mod}$ をそれぞれの代数の有限次元加群の圏とする. そのとき, 次は圏同値である:

$$(\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm},\dots,X_n^{\pm}]} \hat{H}_n)\text{-}\mathsf{mod} \simeq \hat{H}_n\text{-}\mathrm{mod}_I, \quad (\hat{\mathcal{O}} \otimes_{P_n} R_n)\text{-}\mathsf{mod} \simeq R_n\text{-}\mathrm{mod}_{\mathrm{int}}.$$

特に, $\hat{H}_n$-$\mathrm{mod}_I \simeq R_n$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{int}}$ である.

Proof. M を integral な有限次元 $\hat{H}_n$ 加群とし, $X_1, \dots, X_n$ の固有値に応じて広義固有空間分解する:

$$M = \bigoplus_{\nu \in I^n} M_\nu, \qquad X_k \text{ の } M_\nu \text{ 上の固有値は } \nu_k.$$

すると各 $\nu \in I^n$ に対し $X_k - \nu_k$ は M_ν 上冪零なので $f(X_1, \dots, X_n) \in \hat{\mathcal{O}}_\nu = \Bbbk[[X_1 - \nu_1, \dots, X_n - \nu_n]]$ の M_ν 上への作用が定まる. $x_k e(\nu) \in \hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm},\dots,X_n^{\pm}]} \hat{H}_n$ の M への作用を M_ν 上で x_k, $M_{\nu'}$ $(\nu \neq \nu')$ 上で 0 と定めることにより, M は $\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm},\dots,X_n^{\pm}]} \hat{H}_n$ 加群となる.

逆に M を有限次元 $\hat{\mathcal{O}} \otimes_{\Bbbk[X_1^{\pm},\dots,X_n^{\pm}]} \hat{H}_n$ 加群とする. 各 $\nu \in I^n$ に対し $M_\nu = e(\nu)M$ とおくと, 直和分解 $M = \bigoplus_{\nu \in I^n} M_\nu$ が得られる. すると各 k と ν に対し, $f(\nu_k) \neq 0$ となる任意の $f \in \Bbbk[t]$ に対して $f(X_k e(\nu)) = f\bigl(\nu_k(x_{k,\nu} + 1)\bigr)$ は M_ν に可逆に作用する. 従って, $X_k e(\nu)$ の M_ν 上の固有値は ν_k のみである. よって M は $\hat{H}_n$ 加群として integral である. これらの対応が互いに逆となることは明らかである.

R_n についても, $\hat{\mathcal{O}}_\nu = \Bbbk[[x_{1,\nu}, \dots, x_{n,\nu}]]$ であるから同様の議論を行えばよい. □

アフィン Hecke 代数の商として各ウェイトに対応する巡回 Hecke 代数が得られ, それを用いて Lie 環の表現が categorify できることを述べたが, 実は $\hat{H}_n$-mod_I は巡回 Hecke 代数の有限次元表現の圏とほとんど一致する. すなわち有木が categorification に用いたのは, 実質的にはこの $\hat{H}_n$-mod_I である. したがって, 多項式の族 (Q_{ij}) を上記のように設定した場合, われわれの KLR 代数 R_n もこの categorification を与えていることがわかる. さらに, 次節で説明するように R_n は次数付き代数となり, R_n 加群にも次数付けを与えることで有木の結果をさらに精密化しその q 類似を考えることができる. すなわち, R_n は, 量子群の categorification を与える.

4章　ルート系に付随するKLR代数

このノートの最終的な目標はKLR代数による量子群のcategorificationである. そこでこの章では, 量子群の源である一般化Cartan行列からKLR代数を作る方法を与える. またルート系に付随するKLR代数の表現論を展開するための準備として, 次数の構造を考察する.

4.1　一般化Cartan行列とその実現

最初にKac–Moody Lie代数と量子群を構成する種となる一般化Cartan行列とその実現について基本的なことを復習しておく. 詳しくは[Kac90]を参照せよ.

定義 4.1.1. Iを有限集合とする. 以下の性質を満たす行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を一般化Cartan行列と呼ぶ.

(i) $a_{ii} = 2$,

(ii) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ if $i \neq j$,

(iii) $a_{ij} \neq 0 \iff a_{ji} \neq 0$.

また一般化Cartan行列が対称化可能であるとは, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ をみたす $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(i \in I)$ がとれることを言う. すなわち $D := \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_2)$ とおくとき, DAが対称になることを指す.

このノートでは, 対称化可能な一般化Cartan行列のみを扱う.

定義 4.1.2. 対称化可能一般化Cartan行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ の実現とは

(i) ウェイト格子と呼ばれる自由$\mathbb{Z}$加群Pとその双対$P^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$,

(ii) 単純ルートの集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset P$,

(iii) 単純コルートの集合 $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\} \subset P^\vee$,

(iv) 対称双線型形式 $(\bullet, \bullet)\colon P \otimes P \to \mathbb{Q}$

の組であって,

(a) $\Pi \subset P$ と $\Pi^\vee \subset P^\vee$ はそれぞれ一次独立,

(b) $a_{ij} = \langle h_i, \alpha_j \rangle$,

(c) $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{Z}_{>0}$,

(d) $\langle h_i, \lambda \rangle = 2(\alpha_i, \lambda)/(\alpha_i, \alpha_i)$ が任意の $h \in P$ について成り立つ

を満たすもののことである[6].

(a), (b) を満たす (i), (ii), (iii) にあるようなデータが与えられれば, (iv) のようなデータであって (c), (d) を満たすものが必ず存在することが容易にわかる.

P の部分 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathsf{Q} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ をルート格子という. 2.6 節と同様, $\mathsf{Q}_+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ と書く.

例 4.1.3. $I = \{1, 2, \ldots, r-1\}$ とし,

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } j = i \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めた行列 $(a_{ij})_{i,j \in I}$ を A_{r-1} 型 Cartan 行列という. これの実現は次の三つが代表的である.

(1) $P(GL_r) := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\varepsilon_i$ を階数 r の自由 $\mathbb{Z}$ 加群, $\{\varepsilon_i^*\}_{1 \leq i \leq r}$ を $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq r}$ の双対基底とし, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $h_i = \varepsilon_i^* - \varepsilon_{i+1}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ とおく. $P(\mathfrak{gl}_r)$ 上の対称双線型形式は $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ で与える. この実現から定まる Kac–Moody Lie 代数は一般線型群 GL_r の Lie 代数 $\mathfrak{gl}_r$ である.

(2) $P(SL_r)$ を $P(GL_r)$ の商加群 $P(SL_r) := P(GL_r)/\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r)$ と定める. このとき上の h_i は $P(SL_r)$ の双対空間の元として well-defined である. ただし対称双線型形式は上の関係式を満たすよう取り直す必要がある. この実現からは特殊線型群 SL_r の Lie 代数 $\mathfrak{sl}_r$ が構成される.

(3) $P(PGL_r)$ を $P(GL_r)$ の部分加群 $P(PGL_r) := \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathbb{Z}\alpha_i$ とおく.

$$0 \longrightarrow P(PGL_r) \longrightarrow P(SL_r) \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}r \longrightarrow 0$$

という短完全列がある.

[6]「実現」の定義に (a) の条件を課さないこともあるが, このレクチャーノートではこれを仮定する.

4.2　ルート系に付随する KLR 代数とその次数構造

以下 I を有限集合, $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能一般化 Cartan 行列とする．またその実現 $(P, P^\vee, \Pi, \Pi^\vee, (\cdot,\cdot))$ を一つ固定する．これらをもとに, $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し多項式

$$Q_{ij}(u,v) = \sum_{p,q \geq 0} t_{ij;pq} u^p v^q \in \Bbbk[u,v]$$

を

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} \text{(i)} \ (\alpha_i,\alpha_i)p + (\alpha_j,\alpha_j)q \neq -2(\alpha_i,\alpha_j) \text{ ならば } t_{ij;pq} = 0, \\ \text{(ii)} \ t_{ij;pq} = t_{ji;qp}, \\ \text{(iii)} \ t_{ij;-\langle h_i,\alpha_j \rangle,0} \in \Bbbk^\times \end{cases}$$

を満たすように取る．すると $Q_{ij}(u,v) = Q_{ji}(v,u)$ となるから, この多項式の族 $Q := \big(Q_{ij}(u,v)\big)_{i,j \in I}$ から KLR 代数 $R_n = R_n(Q)$ が定義できる．このようにして, ルート系のデータから KLR 代数を作ることができる．

注意 4.2.1. [KL09, KL11] では, $i \neq j$ に対し

$$Q_{ij}(u,v) = u^{-\langle h_i,\alpha_j \rangle} + v^{-\langle h_j,\alpha_i \rangle}$$

と取っている．

注意 4.2.2. 第 3 章でアフィン Hecke 代数と同型となった KLR 代数は,

$$I \subset \Bbbk^\times,$$
$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i = \zeta^{\pm 1} j,\ \zeta \neq -1, \\ -2 & \text{if } i = -j,\ \zeta = -1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とした場合に対応する．つまり A_l 型と $\mathsf{A}_l^{(1)}$ 型のいくつかの直和になる．

さて, ルート系から定まる KLR 代数が満たす最も重要な性質は, 次数付き代数になるということである．

命題 4.2.3. R_n の生成元の次数を

$$\deg e(\nu) = 0, \quad \deg x_k e(\nu) = (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k}), \quad \deg \tau_k e(\nu) = -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})$$

で与えると, R_n は次数付き代数になる.

Proof. 関係式を全て斉次なものに書き直すことができれば R_n が次数付き代数だと分かる. そこで関係式を逐一チェックしよう.
(1) $e(\nu)$ に関するものは全て自明である.
(2) 関係式 $x_k x_{k'} = x_{k'} x_k$ は任意の $\nu \in I^n$ に対する関係式 $x_k e(\nu) x_{k'} e(\nu) = x_{k'} e(\nu) x_k e(\nu)$ に置き換えられる. これが斉次なのは明らか.
(3) 関係式

$$(\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} e(\nu) & \text{if } l = k+1,\, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ -e(\nu) & \text{if } l = k,\, \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の左辺は, $\tau_k e(\nu) x_l e(\nu) - x_{s_k(l)} e(s_k \nu) \tau_k e(\nu)$ と書き換えることができる. ここで, 生成元の次数が $\deg \tau_k e(\nu) = -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})$, $\deg x_l e(\nu) = (\alpha_{\nu_l}, \alpha_{\nu_l})$, $\deg x_{s_k(l)} e(s_k \nu) = (\alpha_{\nu_l}, \alpha_{\nu_l})$ となるので, まず左辺が斉次であると分かる. また $l = k, k+1$ かつ $\nu_k = \nu_{k+1}$ のときはその次数が $-(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) + (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k}) = 0$ となるので, 右辺の $\deg e(\nu) = 0$ とも一致する.
(4) 関係式 $\tau_k \tau_{k'} = \tau_{k'} \tau_k$ $(|k - k'| > 1)$ は, 任意の $\nu \in I^n$ に対し $\tau_k \tau_{k'} e(\nu) = \tau_{k'} \tau_k e(\nu)$ が満たされることと同値である. ここで

$$\tau_k \tau_{k'} e(\nu) = \tau_k e(s_{k'} \nu) \tau_{k'} e(\nu), \quad \tau_{k'} \tau_k e(\nu) = \tau_{k'} e(s_k \nu) \tau_k e(\nu)$$

なので, 両辺の次数は

$$\begin{aligned} \deg \tau_k \tau_{k'} e(\nu) &= -\big(\alpha_{(s_{k'}\nu)_k}, \alpha_{(s_{k'}\nu)_{k+1}}\big) - (\alpha_{\nu_{k'}}, \alpha_{\nu_{k'+1}}) \\ &= -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) - (\alpha_{\nu_{k'}}, \alpha_{\nu_{k'+1}}), \\ \deg \tau_{k'} \tau_k e(\nu) &= -\big(\alpha_{(s_k\nu)_{k'}}, \alpha_{(s_k\nu)_{k'+1}}\big) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) \\ &= -(\alpha_{\nu_{k'}}, \alpha_{\nu_{k'+1}}) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) \end{aligned}$$

となり一致する.
(5) 関係式

$$\begin{aligned} &(\tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} - \tau_k \tau_{k+1} \tau_k) e(\nu) \\ &\qquad = \begin{cases} \overline{Q}_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

について, まず左辺は

$$\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}e(\nu) = \tau_{k+1}e(s_ks_{k+1}\nu)\tau_k e(s_{k+1}\nu)\tau_{k+1}e(\nu)$$
$$\tau_k\tau_{k+1}\tau_k e(\nu) = \tau_k e(s_{k+1}s_k\nu)\tau_{k+1}e(s_k\nu)\tau_k e(\nu)$$

である. これらの次数を計算すると, $\deg\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}e(\nu)$ は

$$\begin{aligned}
&-\big(\alpha_{(s_ks_{k+1}\nu)_{k+1}}, \alpha_{(s_ks_{k+1}\nu)_{k+2}}\big) - \big(\alpha_{(s_{k+1}\nu)_k}, \alpha_{(s_{k+1}\nu)_{k+1}}\big) - (\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_k+2}) \\
&\quad = -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+2}}) - (\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_{k+2}})
\end{aligned}$$

となり, $\deg\tau_k\tau_{k+1}\tau_k e(\nu)$ は

$$\begin{aligned}
&-\big(\alpha_{(s_{k+1}s_k\nu)_k}, \alpha_{(s_{k+1}s_k\nu)_{k+1}}\big) - \big(\alpha_{(s_k\nu)_{k+1}}, \alpha_{(s_{k1}\nu)_{k+2}}\big) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k+1}) \\
&\quad = -(\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_{k+2}}) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+2}}) - (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})
\end{aligned}$$

となる. よって左辺は斉次である. $\nu_k = \nu_{k+2} \neq \nu_{k+1}$ の場合は右辺が 0 ではなくなるので右辺の次数を見る. $(\alpha_i, \alpha_i)p + (\alpha_j, \alpha_j)q \neq -2(\alpha_i, \alpha_j)$ ならば $t_{ij;pq} = 0$ という要請に着目すると, まず

$$Q_{ij}(x_k, x_{k+1})e(\nu) = \sum_{p,q\geq 0} t_{ij;pq}x_k^p x_{k+1}^q e(\nu)$$

の次数が $-2(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})$ であることがわかる. また $\nu_k = \nu_{k+2}$ なので $Q_{ij}(x_{k+2}, x_{k+1})e(\nu)$ も同じ次数を持つ. 右辺はこれらの差を次数 $(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k})$ の元 $x_k - x_{k+2}$ で割った値なので次数は $-(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k}) - 2(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})$ となり, 左辺と一致する.

(6) 関係式

$$\tau_k^2 e(\nu) = \begin{cases} Q_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})e(\nu) & \text{if } \nu_k \neq \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の左辺の次数を計算すると

$$\begin{aligned}
\deg\tau_k^2 e(\nu) &= \deg\tau_k e(s_k\nu)\tau_k e(\nu) \\
&= -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) - (\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_k}) = -2(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})
\end{aligned}$$

となる. これは上で求めた右辺 $Q_{\nu_k\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})$ の次数と一致する. よってこの関係式も斉次である. □

注意 4.2.4. 多項式表現 P_n の次数付けについて, 次のことに注意しよう.

(i) 2.4 節で与えた R_n の多項式表現 P_n は, もし選んだ多項式 $P_{ij}(u,v) = \sum_{p,q\geq 0} s_{ij;pq}u^pv^q$ が「$(\alpha_i,\alpha_i)p + (\alpha_j,\alpha_j)q \neq -(\alpha_i,\alpha_j)$ ならば $s_{ij;pq} = 0$」という条件を満たすならば R_n の次数を保つ. しかしそのような $(P_{ij})_{i,j\in I}$ は常に存在するとは限らない.

(ii) しかし, これは次に様に次数の取り方を修正することで, R_n の多項式表現 P_n が次数付加群となるようにようにできる. $H(\bullet,\bullet)$ を Q 上の $\mathbb{Z}$ に値をとる双線型形式で

$$H(\alpha,\beta) + H(\beta,\alpha) = 2(\alpha,\beta)$$

が任意の α, $\beta \in \mathsf{Q}$ に対して成り立つものとする. (i) の $P_{ij}(u,v)$ を

(4.2.2) $(\alpha_i,\alpha_i)p + (\alpha_j,\alpha_j)q \neq -H(\alpha_i,\alpha_j)$ なら $s_{ij;pq} = 0$ を満たす

ようにとる. 例えば, (2.4.3) のように P_{ij} をとり, H を

$$H(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 0 & (i > j) \\ 2(\alpha_i,\alpha_j) & (i < j) \end{cases}$$

で定義すれば条件 (4.2.2) を満たす.

(a) そのとき $\deg e(\nu) = 0$, $\deg x_k e(\nu) = (\alpha_{\nu_k},\alpha_{\nu_k})$, $\deg \tau_k e(\nu) = -H(\alpha_{\nu_k},\alpha_{\nu_{k+1}})$ ととっても斉次性が成り立ち, R_n は次数付き代数となる. さらに P_n は次数付き R_n 加群となる. (R_n のいろいろな次数付けについては, [KKO13] 参照.)

(b) R_n の次数付けは変えず, 次のように P_n の次数付けを変えても P_n は次数付き加群となる. 仮定から, $H(\alpha,\beta) - (\alpha,\beta)$ は反対称だから, ある $\mathbb{Z}$ に値をとる Q 上の双線型形式 $B(\alpha,\beta)$ があって,

$$H(\alpha,\beta) - (\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta) - B(\beta,\alpha)$$

を満たす. そこで $\nu \in I^n$ に対して

$$d_B(\nu) = \sum_{1\leq k<l\leq n} B(\alpha_k,\alpha_l)$$

とおく. すると

$$\bigoplus_{\nu\in I^n} \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]e(\nu)\langle -d_B(\nu)\rangle$$

は次数付 R_n 加群となる.
実際,

$$\tau_k e(\nu)\langle -d_B(\nu)\rangle = P_{\nu_{k+1},\nu_k}(x_k, x_{k+1})e(s_k\nu)\langle -d_B(s_k\nu)\rangle$$

において,

$$\begin{aligned}&\text{左辺の次数は} -(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}}) + d_B(\nu),\\ &\text{右辺の次数は} -H(\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_k}) + d_B(s_k\nu)\end{aligned}$$

であり, 両者は

$$d_B(s_k\nu) - d_B(\nu) = B(\alpha_{\nu_{k+1}}, \alpha_{\nu_k}) - B(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_{k+1}})$$

より一致する.

R_n の k 次の部分を $(R_n)_k$ と書こう. R_n は次数付き代数として次の性質を満たす.

命題 4.2.5. 十分小さい整数 $k \in \mathbb{Z}$ について $(R_n)_k = 0$ が成り立つ. また任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $(R_n)_k$ は有限生成自由 $\Bbbk$ 加群である.

Proof. 定理 2.3.1 により

$$R_n = \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n} P_n\tau_w = \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n}\bigoplus_{\nu\in I^n} \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]e(\nu)\tau_w$$

と次数付き加群として有限個の直和の形に書けるので, 各直和因子が上記の性質を満たしていればよい. これは $\deg x_k e(\nu) > 0$ から明らかである. □

ルート格子の各元 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ ($\mathrm{ht}(\beta) = n$) に対し 2.6 節で定義した R_n の部分代数 $R(\beta)$ を考えると, ブロック分解 $R_n = \bigoplus_\beta R(\beta)$ は次数を保つ. したがって, $R(\beta)$ たちも上記の性質を満たす次数付き代数である.

KLR 代数は多項式環を含むから明らかに Artin 性を満たさない. しかしこの命題で示した通り, ルート系に付随する KLR 代数は下に有界な次数付き代数であり, この性質を使って有限次元代数の場合と同様に表現論を展開することができる. その詳細は第 5 章で述べる.

4.3 KLR 代数上の加群の指標と量子シャッフル代数

M と N を次数付きの $\Bbbk$ 加群とする．このときこれらのテンソル積 $M \otimes_{\Bbbk} N$ は, 次数を

$$(M \otimes_{\Bbbk} N)_k := \bigoplus_{p+q=k} M_p \otimes_{\Bbbk} N_q$$

と定めることにより再び次数付き $\Bbbk$ 加群となる．また M と N がそれぞれ次数付き $\Bbbk$ 代数 A の右加群と左加群であるとき, $M \otimes_A N$ は $M \otimes_{\Bbbk} N$ の次数を保った商として得られるので, これも次数付き $\Bbbk$ 加群である．

2.7 節で構成した誘導関手 $R_m\text{-}\mathsf{Mod} \times R_n\text{-}\mathsf{Mod} \ni (M, N) \mapsto M \circ N \in R_{m+n}\text{-}\mathsf{Mod}$ を思い起こそう．この構成にはテンソル積しか用いていないので, M, N が次数構造を持てば $M \circ N$ にも次数構造が自然に定まる．そこで合成積についての結果を次数に気を付けた形に書き直しておこう．証明は簡単なので省略する．以下 $R_n\text{-}\mathsf{gMod}$ で次数付き R_n 加群とその間の次数を保つ R_n 準同型の圏を表す．

命題 4.3.1. $\Bbbk$ を体とする．

(1) 次数付き R_m 加群 M と次数付き R_n 加群 N が共に有限次元 (resp. 有限生成, 射影的) であれば, $M \circ N$ も有限次元 (resp. 有限生成, 射影的) 次数付き R_{m+n} 加群である．

(2) 対応

$$\begin{aligned} R_m\text{-}\mathsf{gMod} \times R_n\text{-}\mathsf{gMod} &\to R_{m+n}\text{-}\mathsf{gMod} \\ (M, N) &\mapsto M \circ N \end{aligned}$$

は射の次数を保つ 2 変数関手である．これは M, N の両方について完全である．

(3) $\beta, \gamma \in \mathsf{Q}_+$ とするとき, 合成積 $\circ$ は 2 変数関手

$$R(\beta)\text{-}\mathsf{gMod} \times R(\gamma)\text{-}\mathsf{gMod} \to R(\beta+\gamma)\text{-}\mathsf{gMod}$$

を誘導する．これについても (2) と同様のことが成り立つ．

補題 2.7.6 (shuffle lemma) を, 次数をこめて考えれば次のようになる．

補題 4.3.2 (shuffle lemma)**.** $M \in R_m$-gMod, $N \in R_n$-gMod と $\nu \in I^{m+n}$ に対し

$$e(\nu)(M \circ N) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{D}_{m,n}} \tau_w \big(e(\nu_{w(1)}, \ldots, \nu_{w(m)}) M \otimes_{\Bbbk} e(\nu_{w(m+1)}, \ldots, \nu_{w(m+n)}) N \big)$$

である. 次数付き $\Bbbk$ 加群としては, 右辺の直和成分は $e(\cdots)M \otimes_{\Bbbk} e(\cdots)N$ の次数を

$$\deg e(\nu)\tau_w = - \sum_{\substack{k<l \\ w(k)>w(l)}} (\alpha_{\nu_{w(k)}}, \alpha_{\nu_{w(l)}})$$

だけずらしたものである.

この合成積の構造を記述するため, 量子シャッフル代数と呼ばれる有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数 $\mathcal{F}^*$ を導入しよう. この節の以降の内容は後で用いないので, 道を急ぐなら読み飛ばしても議論の理解に差し支えない.

定義 4.3.3. 形式的な記号 F_i $(i \in I)$ により生成される $\mathbb{Q}(q)$ 上の自由代数を $\mathcal{F}$ とおく. $\nu \in I^n$ に対し, 単項式 F_ν を $F_\nu := F_{\nu_1} \cdots F_{\nu_n} \in \mathcal{F}$ で定める. すると単項式全体 $\{F_\nu\}_{n \geq 0, \nu \in I^n}$ は $\mathcal{F}$ の基底をなす. また単項式のウェイトを $\operatorname{wt} F_\nu := \alpha_{\nu_1} + \cdots + \alpha_{\nu_n} \in \mathsf{Q}_+$ と定める.

補題 4.3.4. 単項式 $x, x', y, y' \in \mathcal{F}$ に対し

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') := q^{-(\operatorname{wt} y, \operatorname{wt} x')} xx' \otimes yy'$$

と定めると, これは $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$ 上の結合的な積になる.

Proof. 任意の単項式 $x, x', x'', y, y', y'' \in \mathcal{F}$ に対し

$$\begin{aligned}
\big((x \otimes y)(x' \otimes y')\big)(x'' \otimes y'') &= q^{-(\operatorname{wt} y, \operatorname{wt} x')}(xx' \otimes yy')(x'' \otimes y'') \\
&= q^{-(\operatorname{wt} y, \operatorname{wt} x') - (\operatorname{wt} yy', \operatorname{wt} x'')}(xx'x'' \otimes yy'y''), \\
(x \otimes y)\big((x' \otimes y')(x'' \otimes y'')\big) &= q^{-(\operatorname{wt} y', \operatorname{wt} x'')}(x \otimes y)(x'x'' \otimes y'y'') \\
&= q^{-(\operatorname{wt} y', \operatorname{wt} x'') - (\operatorname{wt} y, \operatorname{wt} x'x'')}(xx'x'' \otimes yy'y'')
\end{aligned}$$

となる. ここで単項式の積のウェイトはそれぞれのウェイトの和になるので, これらは一致している. □

この積によって $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$ を $\mathbb{Q}(q)$ 代数と思う. $\mathcal{F}$ は自由代数なので, 各 F_i に対して

$$\Delta(F_i) := F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i \in \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$$

と定めることで, $\mathbb{Q}(q)$ 代数の準同型 $\Delta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$ が得られる. これを $\mathcal{F}$ の余積という.

補題 4.3.5. 余積 Δ は余結合的である．すなわち $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$ への $\mathbb{Q}(q)$ 線型写像として，等式 $(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Delta) \circ \Delta$ が成り立つ．

Proof. 生成元 F_i $(i \in I)$ の像が一致することを見れば良い．実際に計算すると

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ \Delta(F_i) &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}})(F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i) \\
&= F_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes F_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes F_i \\
(\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Delta) \circ \Delta(F_i) &= (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Delta)(F_i \otimes 1 + 1 \otimes F_i) \\
&= F_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes F_i \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes F_i
\end{aligned}
$$

となり，確かに一致する． □

量子シャッフル代数 $\mathcal{F}^*$ はこの $\mathcal{F}$ の双対空間として定義される．

定義 4.3.6 ([Lec04] 参照)**.** $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し，$\mathcal{F}$ の有限次元部分 $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間 $\mathcal{F}_\beta$ を

$$
\mathcal{F}_\beta := \bigoplus_{\nu \in I^\beta} \mathbb{Q}(q) F_\nu
$$

と定める．このときウェイト空間分解 $\mathcal{F} = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathcal{F}_\beta$ が成り立つ．$\mathcal{F}$ のウェイト空間ごとに双対空間を取り，直和をとったもの (制限双対) を

$$
\mathcal{F}^* := \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathcal{F}_\beta^*, \qquad \mathcal{F}_\beta^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(\mathcal{F}_\beta, \mathbb{Q}(q)\bigr)
$$

とおく．$\{F_\nu \mid \nu \in I^\beta\} \subset \mathcal{F}_\beta$ の双対基底を $\{F_\nu^* \mid \nu \in I^\beta\} \subset \mathcal{F}_\beta^*$ と書く．

注意 4.3.7. $I \neq \emptyset$ なら $\mathcal{F}^* \subsetneq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(\mathcal{F}, \mathbb{Q}(q)\bigr)$ である．

補題 4.3.8. $\mathcal{F}$ の余積 $\Delta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}$ は，$\mathcal{F}^*$ における積 $\Delta^* \colon \mathcal{F}^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}^*$ を誘導する．すなわち，$y, y' \in \mathcal{F}^*$ に対し積 $yy' \in \mathcal{F}^*$ が

$$
\langle yy', x \rangle := \langle y \otimes y', \Delta(x) \rangle \quad (x \in \mathcal{F})
$$

によって定まる．この積は結合的である．この $\mathbb{Q}(q)$ 代数 $\mathcal{F}^*$ を量子シャッフル代数と呼ぶ．

Proof. 上の定義により $\mathbb{Q}(q)$ 線型写像

$$\Delta^*\colon \mathcal{F}^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(\mathcal{F}, \mathbb{Q}(q)\bigr)$$

が定義される．ここで Δ の定義から，$\Delta(\mathcal{F}_\beta) \subset \bigoplus_{\gamma+\gamma'=\beta} \mathcal{F}_\gamma \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathcal{F}_{\gamma'}$ が成り立つ．したがって $\gamma, \gamma' \in \mathsf{Q}_+$ に対し，$\mathcal{F}_\gamma^*$ の元と $\mathcal{F}_{\gamma'}^*$ の元の積は $\mathcal{F}_{\gamma+\gamma'}^*$ に入る．よって Δ^* の像は制限双対 $\mathcal{F}^*$ に含まれる．また $y, y', y'' \in \mathcal{F}^*$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle (yy')y'', x\rangle &= \langle yy' \otimes y'', \Delta(x)\rangle = \langle y \otimes y' \otimes y'', (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ \Delta(x)\rangle, \\
\langle y(y'y''), x\rangle &= \langle y \otimes y'y'', \Delta(x)\rangle = \langle y \otimes y' \otimes y'', (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Delta) \circ \Delta(x)\rangle
\end{aligned}$$

となり，Δ の余結合性 (補題 4.3.5) から積の結合性が従う． □

さて基底 $\{F_\nu^*\}$ に対する積の展開公式を導こう．それには $\mathcal{F}$ 上の余積の展開公式が必要になる．

補題 4.3.9. $m \geq 0$ を非負整数とする．$\nu \in I^m$ と $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ $(1 \leq p_1 < \cdots < p_k \leq m)$ に対し，$\nu|_P := (\nu_{p_1}, \ldots, \nu_{p_k})$ とおく．このとき

$$\Delta(F_\nu) = \sum_{P \sqcup P' = \{1,\ldots,m\}} \left(\prod_{k \in P,\, l \in P',\, k > l} q^{-(\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_l})} \right) F_{\nu|_P} \otimes F_{\nu|_{P'}}$$

が成り立つ．ここで右辺の和は集合 $\{1, \ldots, m\}$ を二つに分割する方法全てについて取る．

Proof. Δ は代数の準同型なので

$$\Delta(F_\nu) = \Delta(F_{\nu_1}) \cdots \Delta(F_{\nu_m}) = (F_{\nu_1} \otimes 1 + 1 \otimes F_{\nu_1}) \cdots (F_{\nu_m} \otimes 1 + 1 \otimes F_{\nu_m})$$

が成り立つ．$P \sqcup P' = \{1, \ldots, m\}$ に対し，$k \in P$ のとき $F_{\nu;P,k} := F_{\nu_k} \otimes 1$，$k \in P'$ のとき $F_{\nu;P,k} := 1 \otimes F_{\nu_k}$ と定めると，上式で右辺を展開して

$$\Delta(F_\nu) = \sum_{P \sqcup P' = \{1,\ldots,m\}} F_{\nu;P}, \quad F_{\nu;P} := F_{\nu;P,1} \cdots F_{\nu;P,m}$$

を得る．ここで，任意の $i, j \in I$ に対し

$$(1 \otimes F_j)(F_i \otimes 1) = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} F_i \otimes F_j = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} (F_i \otimes 1)(1 \otimes F_j)$$

が成り立つので, この交換法則で $(1\otimes F_j)$ を右側へ $(F_i\otimes 1)$ を左側へ全て寄せることで

$$F_{\nu,P}=\left(\prod_{k\in P,\,l\in P',\,k>l} q^{-(\alpha_{\nu_k},\alpha_{\nu_l})}\right)F_{\nu|_P}\otimes F_{\nu|_{P'}}$$

となる. これを $\Delta(F_\nu)$ を展開した式に代入すれば良い. □

補題 4.3.10 (shuffle lemma)**.** $\nu\in I^{m+n}$ とし, $\nu':=(\nu_1,\dots,\nu_m)$, $\nu'':=(\nu_{m+1},\dots,\nu_{m+n})$ とおく. このとき

$$F^*_{\nu'}\cdot F^*_{\nu''}=\sum_{w\in\mathfrak{D}_{m,n}}\left(\prod_{k<l,\,w(k)>w(l)} q^{-(\alpha_{\nu_{w(k)}},\alpha_{\nu_{w(l)}})}\right)F^*_{w\nu}$$

が成り立つ.

Proof. $\mathcal{F}^*$ の元は各 $F_\mu\in\mathcal{F}$ $(p\geq 0,\ \mu\in I^p)$ を代入した値で決まる. 余積公式補題 4.3.9 を使うと

$$\begin{aligned}\langle F^*_{\nu'}\cdot F^*_{\nu''},F_\mu\rangle&=\langle F^*_{\nu'}\otimes F^*_{\nu''},\Delta(F_\mu)\rangle\\&=\sum_{P\sqcup P'=\{1,\dots,p\}}\left(\prod_{k\in P,\,l\in P',\,k>l} q^{-(\alpha_{\nu_k},\alpha_{\nu_l})}\right)\langle F^*_{\nu'},F_{\mu|_P}\rangle\langle F^*_{\nu''},F_{\mu|_{P'}}\rangle\end{aligned}$$

となる. この和因子は $\#P=m$, $\#P'=n$ であるときに限り 0 ではない. したがって, このような分割の方法と $\mathfrak{D}_{m,n}$ は 1:1 に対応する. 具体的には, $w\in\mathfrak{D}_{m,n}$ に対し

$$P=\{w(1),\dots,w(m)\},\quad P'=\{w(m+1),\dots,w(m+n)\}$$

を対応させればよい. このとき

$$\begin{aligned}&\langle F^*_{\nu'},F_{\mu|_P}\rangle\langle F^*_{\nu''},F_{\mu|_{P'}}\rangle\\&\qquad=\delta_{\nu_1,\mu_{w(1)}}\cdots\delta_{\nu_m,\mu_{w(m)}}\cdot\delta_{\nu_{m+1},\mu_{w(m+1)}}\cdots\delta_{\nu_{m+n},\mu_{w(m+n)}}\\&\qquad=\langle F^*_{w\nu},F_\mu\rangle\end{aligned}$$

となる. よって

$$\langle F^*_{\nu'}\cdot F^*_{\nu''},F_\mu\rangle=\sum_{w\in\mathfrak{D}_{m,n}}\left(\prod_{k<l,\,w(k)>w(l)} q^{-(\alpha_{\nu_{w(k)}},\alpha_{\nu_{w(l)}})}\right)\langle F^*_{w\nu},F_\mu\rangle$$

が成り立つので, 求める式を得る. □

特に $q=1$ とすると Ree の導入したシャッフル代数が得られる．これが $\mathcal{F}^*$ を量子シャッフル代数と呼んだ由来である．以上により, KLR 代数の加群の合成積を記述する代数 $\mathcal{F}^*$ が得られた．

定義 4.3.11. $\beta \in \mathsf{Q}_+$ とする．次数付きの有限次元 $R(\beta)$ 加群 M に対し，その指標を

$$\mathrm{ch}\, M := \sum_{\nu \in I^\beta} \mathrm{qdim}_{\Bbbk}\big(e(\nu)M\big) \cdot F_\nu^* \in \mathcal{F}^* \tag{4.3.1}$$

と定義する．ここで次数付き有限次元線型空間 V に対し,

$$\mathrm{qdim}_{\Bbbk} V := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^k \dim_{\Bbbk} V_k \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

と定義される．

定理 4.3.12. $\beta, \gamma \in \mathsf{Q}_+$ とする．次数付き有限次元 $R(\beta)$ 加群 M と次数付き有限次元 $R(\gamma)$ 加群 N に対し,

$$\mathrm{ch}(M \circ N) = \mathrm{ch}\, M \cdot \mathrm{ch}\, N$$

が成り立つ．

Proof. 合成積 (補題 4.3.2) と量子シャッフル代数 (補題 4.3.10) それぞれに対する shuffle lemma を見比べることで従う．次数付き有限次元線型空間 V, W に対し, $\mathrm{qdim}_{\Bbbk}(V \otimes_{\Bbbk} W) = \mathrm{qdim}_{\Bbbk} V \cdot \mathrm{qdim}_{\Bbbk} W$ と $\mathrm{qdim}_{\Bbbk}(V\langle -1 \rangle) = q \cdot \mathrm{qdim}_{\Bbbk} V$ が成り立つことに注意して計算すればよい． □

実はこの代数 $\mathcal{F}^*$ は量子群の negative part の双対 $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ を含んでいる (注意 6.4.7 参照)．このことからも KLR 代数の表現論と量子群との関連が見て取れるだろう．

5 章　次数付き代数の表現論

この章を通して $\Bbbk$ を体とする．ここでの目的は次の条件を満たす $\Bbbk$ 上の次数付き代数 $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ の表現論を構築し, その Grothendieck 群の構造を調べることである．

定義 5.0.13. $\Bbbk$ 上の次数付き線型空間 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ が条件 (※) を満たすとは, 任意の n について V_n が有限次元であり, かつ十分小さい $n \ll 0$ に対し $V_n = 0$ が成り立つことを言う.

ルート系に付随する KLR 代数が条件 (※) を満足することは, 既に命題 4.2.5 で示した. したがって以下での議論は全て我々の状況に適用できる. ここでの指針となる原理は,

> 有限次元代数の表現論における定理は, 条件 (※) を満たす
> 次数付き代数の表現論でも成り立つ

というものである.

5.1 次数付き加群と次数なし加群の対応

まずこの章で用いる記号と約束を並べる.

定義 5.1.1. (i) $\Bbbk$ 上の次数付き線型空間 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ に対し,

$$V_{\geq n} := \bigoplus_{k\geq n} V_k, \qquad V_{<n} := \bigoplus_{k<n} V_k$$

などの記号を用いる.

(ii) $V\langle k\rangle$ で V の次数付けを k だけずらした次数付き線型空間を表す. すなわち $(V\langle k\rangle)_n := V_{n+k}$ と定める.

(iii) 次数付き線型空間 V, W に対し, 次数を保つ V から W への線型写像全体を単に $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W)$ で表す. また次数付きの線型写像の空間を

$$\mathrm{Hom^{gr}}_\Bbbk(V, W) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom^{gr}}_\Bbbk(V, W)_k,$$
$$\mathrm{Hom^{gr}}_\Bbbk(V, W)_k := \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W\langle k\rangle)$$

で表す.

(iv) 次数付き線型空間 V が条件 (※) を満たすとき, V の次数付き次元を不定元 q を用いて

$$\mathrm{qdim}_\Bbbk V := \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim_\Bbbk V_k$$

と定義する. これは形式的 Laurent 級数環 $\mathbb{Z}((q))$ の元である.

(v) 次数付き線型空間 V はその次数付けを忘れて単なる線型空間と思うことができる．これを記号を区別して V^f で表す．

$\Bbbk$ 上の次数付き代数 A とその次数付き加群 M, N に対しても, 同様の記号 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, ${\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}}_A(M, N)$ と約束を用いる．記述を簡単にするため, 以下登場する A 加群はすべて次数付きであり, その間の準同形は (断りのない限り) 全て次数を保つものと約束する．イデアル $I \subset A$ や部分加群 $N \subset M$ の埋め込み等も同様に斉次なもののみを考える．そうでないときは明示的に A^f 加群, A^f 準同形のような書き方を用いて区別する．

以下, この章では

(5.1.1) A は条件 (※) を満たす次数付き代数と仮定する．

最初の目標は, 単純 A 加群と単純 A^f 加群の違いを見定めることである．

補題 5.1.2. 任意の有限生成 A 加群は条件 (※) を満たす．

Proof. M を有限生成 A 加群とすると, M の生成元として有限個の斉次元 $m_1 \in M_{k_1}, \dots, m_l \in M_{k_l}$ をとれる．$A\langle -k_1\rangle \oplus \cdots \oplus A\langle -k_l\rangle$ という形の A 加群から M への全射が存在することから主張は従う． □

補題 5.1.3. M を単純 A 加群とすると, M^f は単純 A^f 加群である．

Proof. $N \subset M^f$ を A^f 部分加群とする (すなわち, N には次数付けはない)．これに対し

$$\tilde{N}_n := (N \cap M_{\le n})/(N \cap M_{\le n-1})$$

と定める．M が次数付き A 加群であることから, $\tilde{N} := \bigoplus_n \tilde{N}_n$ も自然に次数付き A 加群となる．一方, $\tilde{N}_n$ は $M_{\le n}/M_{\le n-1} \simeq M_n$ の部分加群と見なせるため, これの直和をとって $\tilde{N}$ を M に部分加群として埋め込むことができる．M は単純なので部分加群 $\tilde{N}$ は 0 または M である．従って, N も 0 または M^f でなければいけない． □

補題 5.1.4. A の両側イデアル I であって,

(a) A/I は有限次元,

(b) 任意の 0 でない有限生成 A 加群 M に対し $IM \neq M$ かつ M/IM が有限次元

を満たすものが存在する.

Proof. $A_{<-c} = 0$ を満たす $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとり, I を $A_{>2c}$ で生成される両側イデアル $I = A \cdot A_{>2c} \cdot A$ とする. このとき $A_{>2c} \subset I \subset A_{>0}$ である. M を任意の有限生成 A 加群とし, 有限個の斉次な零でない生成元をとる. これらの生成元の次数のうちで最小のものを a, 最大のものを b とおく. すると $M \subset AM_{\geq a}$ より, $IM \subset A_{>0}M_{\geq a} \subset M_{>a}$ となる. また $k > 2c + b$ なら, $M_k \subset \sum_{j \leq b} A_{k-j}M_j \subset A_{\geq k-b}M \subset A_{>2c}M \subset IM$. 従って $M_{>2c+b} \subset IM \subset M_{>a}$ となり, 望む性質を得る. □

系 5.1.5. 単純 A 加群は有限次元である. また単純 A 加群は同型と次数付けのずれを除いて有限個しかない.

Proof. 補題 5.1.4 の条件を満たす I をとる. M を任意の単純 A 加群とすると, $IM \neq M$ より $IM = 0$ でなければいけない. よって $M_k \neq 0$ とすると, $m \in M_k \setminus \{0\}$ 倍写像で全射 $(A/I)\langle -k \rangle \twoheadrightarrow M$ が構成できる. したがって M は同型と次数付けのずれを除き A/I の組成列の中に現れる. □

補題 5.1.6. 単純 A^f 加群 M に対し, 次の条件は同値である.

(1) $A_{\geq n}M = 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する.

(2) M は次数付け可能である. すなわち, A 加群 $\widetilde{M}$ が存在して A^f 加群として $M \simeq \widetilde{M}^f$ となる.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) は補題 5.1.4 より明らか. 逆に M を (1) を満たす単純 A^f 加群とする. $L := A/(A \cdot A_{\geq n})$ は有限次元 A 加群なので, 組成列

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_l = L$$

が取れる. すると補題 5.1.3 より, 次数付けを忘れた

$$0 = L_0^f \subset L_1^f \subset \cdots \subset L_l^f = L^f$$

も A^f 加群の組成列である. 全射 $L^f \twoheadrightarrow M$ が存在するため, M の単純性からある k で $M \simeq L_k^f / L_{k-1}^f$ となっており, $\widetilde{M} := L_k / L_{k-1}$ とおくことで M を次数付けすることができる. □

補題 5.1.7. M, N を単純 A 加群であって, A^f 加群としては $M^f \simeq N^f$ と仮定する. そのとき, ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して, $M \simeq N\langle k \rangle$ となる.

Proof. $f\colon M^f \to N^f$ を A^f 加群としての同型とする．系 5.1.5 より M, N は有限次元であるから，$\mathrm{Hom}_{A^f}(M^f, N^f) = \mathrm{Hom^{gr}}_A(M, N)^f$ が成り立つ．これを用いて $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \ \bigl(f_k \in \mathrm{Hom}_A(M, N\langle k\rangle)\bigr)$ と分解する．f_k のうち 0 でないものをとれば，$M, N\langle k\rangle$ の既約性から，f_k は M と $N\langle k\rangle$ との同型を与える． □

以上の補題をまとめて，次の定理を得る．

定理 5.1.8. 下の 2 つの集合は 1:1 に対応し，どちらも有限集合である．

$$
\begin{aligned}
&\{\text{単純 } A \text{ 加群}\} \bigm/ (\text{同型} + \text{次数のずれ}) \\
&\qquad \simeq \{A_{\geq n}M = 0\ (n \gg 0) \text{ を満たす単純 } A^f \text{ 加群 } M\} \bigm/ (\text{同型})
\end{aligned}
$$

5.2 根基の性質

つぎに示すことは，任意の有限生成 A 加群に対し射影被覆が存在するという事実である．しかし射影被覆を定義して性質を調べるには準備が必要であり，この節と次節はその準備のために充てられる．

有限次元代数の表現論では Jacobson 根基が半単純性の障害だったことを思い出そう．A が次数付き代数の場合，A 加群の (あるいは一般に Abel 圏での) 根基は次のように定義される．

定義 5.2.1. A 加群 M の全ての極大部分加群の共通部分を根基 $\mathrm{rad}(M)$ という．根基による商 $\mathrm{hd}(M) := M/\mathrm{rad}(M)$ を M の head と呼ぶ[7]．

この定義を言い換えると，A 加群 M の根基 $\mathrm{rad}(M)$ は全ての単純加群 (の同型類) S と全ての A 準同型 $p\colon M \to S$ にわたる $\mathrm{Ker}(p)$ の共通部分

$$
\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{S:\ \text{単純} \\ p\colon M\to S}} \mathrm{Ker}(p) \tag{5.2.1}
$$

としても特徴付けられる．又

$$
\mathrm{hd}(M) = \mathrm{Im}\Bigl(M \longrightarrow \prod_{\substack{S:\ \text{単純} \\ p\colon M\to S}} \mathrm{Coker}(p)\Bigr) \tag{5.2.2}
$$

ここで話の流れからは逸れるが，後で使うため head の双対概念も定義しておく．

[7] 定義より，極大部分加群が存在しないならば，$\mathrm{rad}(M) = M$, $\mathrm{hd}(M) = 0$ である．

定義 5.2.2. A 加群 M の全ての単純部分加群の和を M の socle と呼び, $\mathrm{soc}(M)$ で表す.

半単純 (完全可約) 部分加群の和は半単純なので, $\mathrm{soc}(M)$ は M の最大の半単純部分加群である.

補題 5.2.3. $f\colon M \to N$ を A 準同型とすると, $f\bigl(\mathrm{rad}(M)\bigr) \subset \mathrm{rad}(N)$ である. 特に f は A 準同型 $\mathrm{hd}(f)\colon \mathrm{hd}(M) \to \mathrm{hd}(N)$ を誘導する.

Proof. (5.2.1) より, $m \in \mathrm{rad}(M)$ ならば任意の単純 A 加群 S への A 準同型 $p\colon N \to S$ に対し $p \circ f(m) = 0$ であり, これは $f(m) \in \mathrm{rad}(N)$ を意味する. □

補題 5.2.4. A 加群 M が半単純ならば, $\mathrm{rad}(M) = 0$ である.

Proof. M は単純部分加群の直和 $M = \bigoplus_i S_i$ として書くことができる. 各 j に対し $\bigoplus_{i \neq j} S_i$ は極大部分加群であり, それらの共通部分をとれば 0 となる. □

二つの補題を合わせると, 部分加群 $N \subset M$ について, M/N が半単純であれば $\mathrm{rad}(M) \subset N$ となることがわかる. M が有限生成ならばその逆も成立する.

定理 5.2.5. M を有限生成 A 加群とする.

(i) $\mathrm{hd}(M)$ は半単純である. したがって $\mathrm{hd}(M)$ は M の最大半単純商である.

(ii) (中山の補題) $\mathrm{hd}(M) = 0$ ならば $M = 0$ である.

Proof. (i) 補題 5.1.4 のイデアル $I \subset A$ をとる. 任意の極大部分加群 $N \subset M$ に対し $I(M/N) = 0$ となるので, $IM \subset \mathrm{rad}(M)$ が成り立つ. したがって, 特に $M/IM \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M)$ は有限次元である. よって有限個の極大部分加群 $N_1, N_2, \ldots, N_l \subset M$ を用いて $\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{i=1}^{l} N_i$ と書ける. 言い換えると, $\mathrm{rad}(M)$ は次の準同型

$$M \to \prod_{i=1}^{l} (M/N_i)$$

の Ker と一致する. したがって $\mathrm{hd}(M)$ はこの準同型の像と同型である. 単純加群の有限直積は半単純であり, またその部分加群も半単純なので, $\mathrm{hd}(M)$ は半単純である.

(ii) これは $M \neq 0$ が最低一つの極大部分加群を持つことと同値である. これも M/IM が有限次元であることから明らか. □

A 自身を左 A 加群として見た時の $\mathrm{rad}(A)$ は Jacobson 根基と呼ばれる.

命題 5.2.6. (i) $\mathrm{rad}(A) \subset A$ は A の両側イデアルである.

(ii) $\mathrm{rad}(A) = 0$ ならば全ての A 加群は半単純である.

(iii) A 加群 M に対し, $\mathrm{rad}(M) = \mathrm{rad}(A)M$.

Proof. (i) a を任意の A の元とする. A 準同型 $A \ni x \mapsto xa$ に補題 5.2.3 を適用して, $\mathrm{rad}(A)a \subset \mathrm{rad}(A)$ を得る.

(ii) 定理 5.2.5 (i) より A は左 A 加群として半単純である. 任意の A 加群 $M \simeq A \otimes_A M$ は半単純 A 加群 $A \otimes_{\Bbbk} M$ の商として表せるので, M も半単純となる.

(iii) $m \in M$ に対し, m 倍写像 $A \to M$ は $\mathrm{rad}(A) \to \mathrm{rad}(M)$ を誘導するので $\mathrm{rad}(A)M \subset \mathrm{rad}(M)$ である. 一方 $M/\mathrm{rad}(A)M$ は $A/\mathrm{rad}(A)$ 加群なので半単純であり, 根基の性質から $\mathrm{rad}(M) \subset \mathrm{rad}(A)M$ となる. □

5.3 本質的全射の性質

この節も射影被覆に関する準備である. 射影被覆の定義に必要な本質的全射の定義をして, その簡単な性質を見る.

定義 5.3.1. $f\colon M \twoheadrightarrow N$ を A 加群の全射準同型とする. f が本質的全射であるとは, 任意の A 加群 L と準同型 $g\colon L \to M$ に対し, $f \circ g$ が全射なら g も全射になることを言う.

像を考えることにより, 上の g を部分加群の埋め込みに限定しても同じ定義を与える. 感覚的には, 本質的全射は「それ以上 M を小さくすると全射性が崩れてしまう」と言うことができる.

補題 5.3.2. $f\colon M \to N$, $g\colon N \to L$ を A 加群の準同型とする.

(i) f, g が本質的全射なら $g \circ f$ も本質的全射である.

(ii) $g \circ f$ が本質的全射で f が全射なら, f, g は共に本質的全射である.

Proof. (i) $h\colon X \to M$ を勝手な A 加群の準同型とし, $g \circ f \circ h$ が全射であるとする．すると g が本質的全射なので $f \circ h$ は全射であり, さらに f が本質的全射だから h も全射である．したがって $g \circ f$ は本質的全射である．
(ii) まず f が本質的全射であることを示す．$h\colon X \to M$ を勝手な A 加群の準同型とし, $f \circ h$ が全射であるとする．$g \circ f$ は全射だから g は全射であり, よって $g \circ f \circ h$ も全射となる．$g \circ f$ は本質的全射なので, h は全射となる．したがって f は本質的全射である．

次に g が本質的全射であることを示す．まず $g \circ f$ が全射なので g も全射である．勝手な A 加群の準同型 $h\colon X \to N$ を取り, $g \circ h$ が全射であると仮定する．ここで f と h によるファイバー積 $M \times_N X$ を考える:

$$
\begin{tikzcd}
M \times_N X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g \circ h"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & L.
\end{tikzcd}
$$

ファイバー積の性質より, f が全射という仮定から p_2 も全射であることがわかる．よって図式の可換性から $g \circ h \circ p_2 = g \circ f \circ p_1$ は全射である．$g \circ f$ が本質的全射であることを合わせると p_1 も全射となる．これより $h \circ p_2 = f \circ p_1$ は全射なので h が全射となる．従って, g は本質的全射である． □

補題 5.3.3. M を半単純 A 加群と仮定する．このとき全ての本質的全射 $f\colon M \to N$ は同型である．

Proof. M の半単純性から, 単射準同型 $s\colon N \to M$ で $f \circ s = \mathrm{id}_N$ となるものがとれる．f は本質的全射で id_N が全射だから s は全射となる．したがって s は同型である． □

これらの補題をもちいて, 本質的全射と head の関係が示される．

補題 5.3.4. $f\colon M \to N$ を A 加群の間の準同型とする．このとき f が全射ならば f が誘導する写像 $\mathrm{hd}(f)\colon \mathrm{hd}(M) \to \mathrm{hd}(N)$ も全射である．さらに N が有限生成ならばその逆も成り立つ．

Proof. $\mathrm{hd}(N)$ は N の商加群なので, f が全射ならば明らかに $\mathrm{hd}(f)$ も全射である．逆に $\mathrm{hd}(f)$ が全射であったとする．次の可換図式を考える:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{hd}(M) \arrow[r, two heads, "\mathrm{hd}(f)"] & \mathrm{hd}(N) \arrow[r, two heads] & \mathrm{hd}(\operatorname{Coker} f).
\end{tikzcd}
$$

すると合成 $M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M) \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(N) \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(\mathrm{Coker}\, f)$ も全射である．他方図式の可換性から，この写像は 0 写像 $M \to N \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ を経由する．故に $\mathrm{hd}(\mathrm{Coker}\, f) = 0$ である．ここで N は有限生成と仮定すると $\mathrm{Coker}\, f$ も有限生成であり，中山の補題 (定理 5.2.5 (ii)) から $\mathrm{Coker}\, f = 0$ を得る．すなわち f は全射である． □

系 5.3.5. M を有限生成 A 加群とする．このとき $M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M)$ は本質的全射である．

Proof. $f\colon L \to M$ を A 準同型とし，$L \to M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M)$ が全射であったとする．これは $L \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(L) \to \mathrm{hd}(M)$ と等しいので $\mathrm{hd}(f)\colon \mathrm{hd}(L) \to \mathrm{hd}(M)$ は全射である．故に補題 5.3.4 より f も全射となり，$M \to \mathrm{hd}(M)$ が本質的全射であることがわかる． □

命題 5.3.6. M, N を有限生成 A 加群，$f\colon M \to N$ を A 加群の準同型とする．このとき f が本質的全射であるための必要十分条件は，f が誘導する写像 $\mathrm{hd}(f)\colon \mathrm{hd}(M) \to \mathrm{hd}(N)$ が同型になることである．

Proof. まず f を本質的全射とする．$N \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(N)$ は本質的全射だから，合成 $M \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(N)$ も本質的全射である．これは

$$M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M) \xrightarrow{\mathrm{hd}(f)} \mathrm{hd}(N)$$

に等しいので，補題 5.3.2 を用いて $\mathrm{hd}(f)$ が本質的全射だと分かる．$\mathrm{hd}(M)$ は半単純なので補題 5.3.3 より $\mathrm{hd}(f)$ は同型である．

逆に $\mathrm{hd}(M)$ と $\mathrm{hd}(N)$ が同型だとする．補題 5.3.4 より $f\colon M \to N$ は全射である．$M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M)$ は本質的全射だから，合成 $M \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(M) \simeq \mathrm{hd}(N)$ も本質的全射である．従って合成 $M \to N \to \mathrm{hd}(N)$ も本質的全射である．よって補題 5.3.2 より f は本質的全射である． □

5.4 射影被覆の存在と一意性

次の射影的 A 加群の特徴付けは，次数なしの通常の場合と全く同様に証明できるので証明を省略する．

補題 5.4.1. 左 A 加群 A の次数をずらしていくつか直和したものと同型な A 加群を自由 A 加群と呼ぶ．A 加群 M が射影的であることと，M がある自由 A 加群の直和成分と同型であることは同値である．

これにていよいよ準備が整ったので, 前節を踏まえて射影被覆を次のように定義しよう.

定義 5.4.2. M を A 加群とする. 射影的 A 加群 P と本質的全射 $p\colon P \to M$ の組 (P, p) を M の射影被覆 (projective cover) と呼ぶ.

A 加群 M が与えられたとき, 射影的加群から M への全射の取り方はいくらでも存在する. たとえば M の斉次生成元を好きに取り, 補題 5.1.2 の証明のようにして自由加群からの全射を作ればよい. 上の射影被覆の定義は, その中で「無駄のない」ものが射影被覆であると言っている. まずはその一意性から示そう.

補題 5.4.3. A 加群 M の射影被覆は, 存在すれば同型を除いて一意である.

Proof. $p\colon P \twoheadrightarrow M$, $p'\colon P' \twoheadrightarrow M$ を共に射影被覆とする.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, dotted, "\varphi"'] \arrow[dr, "p'"'] & P \arrow[l, dotted, bend right, "\psi"'] \arrow[d, "p"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

P' が射影的かつ p が全射だから, 上の図式を可換にする $\varphi\colon P' \to P$ が取れる. p が本質的全射で $p' = p \circ \varphi$ は全射だから, φ は全射である. P が射影的なので φ の右逆写像 ψ が存在する. $p' \circ \psi = p \circ \varphi \circ \psi = p$ は全射でかつ p' は本質的全射なので, ψ は全射である. 従って ψ は同型である. $\square$

注意 5.4.4. 射影被覆の間の同型は必ずしも一意的ではない.

続いて有限生成加群の射影被覆が必ず存在することを示す.

補題 5.4.5. 任意の有限生成 A 加群 M は射影被覆を持つ. またその射影被覆は有限生成である.

Proof. M の生成元として斉次元からなるものを選び, そのうちの最大の次数を m とする. すると $M = AM_{\leq m}$ が成り立つ. ここで有限生成射影的加群 P から M への全射 $p\colon P \twoheadrightarrow M$ を一つ取る. $p(Q) = M$ となる P の部分 A 加群 $Q \subset P$ のなかから, $\dim Q_{\leq m}$ が最小となるものをとる ($\dim P_{\leq m} < \infty$ に注意). すると $AQ_{\leq m}$ も同じ条件

$$p(AQ_{\leq m}) = Ap(Q_{\leq m}) = A(p(Q) \cap M_{\leq m}) = AM_{\leq m} = M$$

を満たす．そこで Q を $AQ_{\leq m}$ におきかえて，最初から $Q = AQ_{\leq m}$ を満たすと仮定して良い．特に Q は有限生成である．以下，この $p|_Q \colon Q \twoheadrightarrow M$ が M の射影被覆であることを証明する．

まずは $p|_Q \colon Q \twoheadrightarrow M$ が本質的全射であることをいう．Q の部分 A 加群 $N \subset Q$ が $p(N) = M$ を満たすとする．そのとき Q の取り方から $N_{\leq m} = Q_{\leq m}$ であり，$Q = AQ_{\leq m}$ から $Q = N$ が従う．これより $p|_Q$ は本質的全射である．

あとは Q が射影的であることを示せば良い．$i \colon Q \to P$ を埋め込とする．次の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[dr, two heads, "p\circ i"'] & P \arrow[l, dotted, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

P が射影的で $p \circ i$ が全射だから，$\varphi \colon P \to Q$ で $p = (p \circ i) \circ \varphi$ を満たすものが取れる．すると $p \circ i = (p \circ i) \circ (\varphi \circ i)$ となる．$p \circ i$ は本質的全射だから $\varphi \circ i$ は全射である．いま $\varphi \circ i$ は次数を保つので，各次数 k のところに制限して見れば，$(\varphi \circ i)|_{Q_k}$ は有限次元 $\Bbbk$ 線型空間 Q_k 上の全射な自己線型写像である．よって $\varphi \circ i$ は各次数ごとに同型を与えるので，全体としても同型となる．これより，Q は P の直和因子である．故に Q も射影的である．以上で Q が M の射影被覆であることが言えた． □

系 5.4.6. P を有限生成射影的 A 加群とする．

(i) $\mathrm{hd}(P)$ は有限生成半単純 A 加群で，$P \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(P)$ は $\mathrm{hd}(P)$ の射影被覆となる．

(ii) 逆に M が有限生成半単純 A 加群で $P \twoheadrightarrow M$ が M の射影被覆なら，$\mathrm{hd}(P) \simeq M$ である．

(iii) M を有限次元 A 加群とする．全射 $p \colon P \twoheadrightarrow M$ が M の射影被覆であるための必要且つ十分条件は，$P \to \mathrm{hd}(P)$ が $P \xrightarrow{p} M \to \mathrm{hd}(P)$ と分解することである．

Proof. (i) は定理 5.2.5 と系 5.3.5 から直ちに従い，(ii)，(iii) は補題 5.2.4 と命題 5.3.6 から直ちに従う． □

0 でない A 加群 M は，0 と異なる 2 つの部分 A 加群の直和に分解されないとき直既約 (indecomposable) と呼ばれる．

系 5.4.7. P を有限生成射影的 A 加群とする．このとき P が直既約であることと $\mathrm{hd}(P)$ が単純であることは同値である．

Proof. P が直既約でない射影的加群とし, $P = P_1 \oplus P_2$ $(P_1, P_2 \neq 0)$ をその直和分解とする．このとき $\mathrm{hd}(P) = \mathrm{hd}(P_1) \oplus \mathrm{hd}(P_2)$ となる．$i = 1, 2$ について $P_i \neq 0$ なので中山の補題 (定理 5.2.5 (ii)) より $\mathrm{hd}(P_i) \neq 0$ である．故に $\mathrm{hd}(P)$ は単純でない．

逆に $\mathrm{hd}(P)$ が単純でないとする．$\mathrm{hd}(P)$ は半単純なので, $\mathrm{hd}(P) = S_1 \oplus S_2$ $(S_1, S_2 \neq 0)$ と書ける．このとき $P_i \twoheadrightarrow S_i$ $(i = 1, 2)$ を射影被覆とすると, $P_1 \oplus P_2$ は $S_1 \oplus S_2$ の射影被覆である．他方 $P \twoheadrightarrow \mathrm{hd}(P)$ も $\mathrm{hd}(P)$ の射影被覆だから, 射影被覆の一意性から $P \simeq P_1 \oplus P_2$ となる．故に P は直既約でない． □

かくして我々は, 次の 1 対 1 対応を得た.

$$\begin{aligned}&\{\text{ 有限生成射影的 } A \text{ 加群 }\} \big/ (\text{同型}) \\ &\qquad\qquad \simeq \quad \{\text{ 有限生成半単純 } A \text{ 加群 }\} \big/ (\text{同型})\end{aligned}$$

また次の 1 対 1 対応も成り立つ.

$$\{\text{ 有限生成射影的直既約 } A \text{ 加群 }\} \big/ (\text{同型}) \simeq \{\text{ 単純 } A \text{ 加群 }\} \big/ (\text{同型})$$

系 5.4.8. P を射影的直既約 A 加群, S を単純 A 加群とする．このとき

$$\mathrm{Hom}_A(P, S) \simeq \begin{cases} \mathrm{End}_A(S) & P \text{ が } S \text{ の射影被覆と同型のとき}, \\ 0 & \text{そうでないとき}. \end{cases}$$

Proof. 半単純加群への射は必ず head を経由するため,

$$\mathrm{Hom}_A(P, S) \simeq \mathrm{Hom}_A\big(\mathrm{hd}(P), S\big)$$

となる．$\mathrm{hd}(P)$ は単純なので, Schur の補題から命題が従う． □

5.5 Grothendieck 群の構造

以上の議論をもとに, A 加群の圏の Grothendieck 群を調べよう．最初に Grothendieck 群の定義を復習しておく．

定義 5.5.1. Abel 圏 $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{C})$ とは, 次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{Z}$ 加群である．

- 生成元: $\mathcal{C}$ の対象 M に対応する記号 $[M]$
- 関係式: $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ という短完全列があるとき, $[M_2] = [M_1] + [M_3]$

いま $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を Abel 圏 $\mathcal{C}$ から Abel 圏 $\mathcal{D}$ への間の完全関手とする. すると $\mathcal{C}$ における短完全列は F によって $\mathcal{D}$ における短完全列に写るので, $\mathcal{C}$ において $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ が完全であれば $[FM_2] = [FM_1]+[FM_3]$ が $K(\mathcal{D})$ で成り立つ. すなわち F は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $F\colon K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{D})$ を誘導する.

次数付き代数 A を前節までの通りとし, A-gmod で $\Bbbk$ 上有限次元となる A 加群のなす Abel 圏を表す. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し, 次数シフトの関手

$$\langle k \rangle \colon A\text{-gmod} \to A\text{-gmod}$$

は完全であり, $K(A\text{-gmod})$ 上の自己同型を誘導する. 特に $q := \langle -1 \rangle$ と定めることで, $K(A\text{-gmod})$ は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群となる.

続いて, A-gproj で有限生成射影的 A 加群のなす圏を表す. これは Abel 圏ではないので, 以下のように加法圏としての Grothendieck 群を考える. $K(A\text{-gmod})$ と同様に, $K(A\text{-gproj})$ も $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群になる.

定義 5.5.2. 加法圏 $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{C})$ とは, 次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{Z}$ 加群である.

- 生成元: $\mathcal{C}$ の対象 P に対応する記号 $[P]$
- 関係式: $P \simeq P_1 \oplus P_2$ のとき, $[P] = [P_1] + [P_2]$

前節までの議論から, $K(A\text{-gmod})$ と $K(A\text{-gproj})$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての構造が分かる. 単純 A 加群の次数の差を除いた同型類を $\{S_1, \ldots, S_l\}$, 射影的直既約 A 加群の次数の差を除いた同型類を $\{P_1, \ldots, P_l\}$, P_i は S_i の射影被覆とする.

命題 5.5.3. $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群として

$$K(A\text{-gmod}) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}[q, q^{-1}][S_i], \qquad K(A\text{-gproj}) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}[q, q^{-1}][P_i]$$

が成り立つ.

Proof. まず $K(A\text{-}\mathsf{gmod})$ を調べよう．M を有限次元 A 加群とする．このとき M は有限の長さであり，組成列 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ を持つ．すると各 $1 \leq i \leq k$ に対して $[M_i] = [M_{i-1}] + [M_i/M_{i-1}]$ が成り立つ．M_i/M_{i-1} は単純なので，ある $1 \leq p_i \leq l$ と $m_i \in \mathbb{Z}$ が存在して $M_i/M_{i-1} \simeq S_{p_i}\langle m_i \rangle$ となる．故に

$$[M] = \sum_{i=1}^{k}[M_i/M_{i-1}] = \sum_{i=1}^{k} q^{-m_i}[S_{p_i}]$$

となる．これより $K(A\text{-}\mathsf{gmod}) = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}[q,q^{-1}][S_i]$ が成り立つ．よって，形式的な記号 $[S_i]$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群を考えることで，$\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群の全射準同型

$$\Phi \colon \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}[q,q^{-1}][S_i] \twoheadrightarrow K(A\text{-}\mathsf{gmod})$$

を得る．これの逆写像は次のようにして得られる．まず S_i は有限次元なので，$S_i\langle k \rangle \simeq S_i$ を満たす k は $k = 0$ に限られることに注意しよう．よって $\{S_i\langle k \rangle \mid 1 \leq i \leq l,\ k \in \mathbb{Z}\}$ は単純 A 加群の同型類の完全代表系である．Jordan–Hölder の定理より，有限次元 A 加群 M に対し，M の組成列における単純加群 $S_i\langle k \rangle$ の重複度 $[M : S_i\langle k \rangle]$ は well-defined である．そこで

$$\Psi(M) := \sum_{1 \leq i \leq l,\, k \in \mathbb{Z}} q^{-k}[M : S_i\langle k \rangle] \cdot [S_i]$$

と定める．M は長さ有限なので右辺は有限和である．また有限次元 A 加群の短完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ があるとき，M_2 の組成因子は M_1 と M_3 の組成因子を並べたものだから $\Psi(M_2) = \Psi(M_1) + \Psi(M_3)$ が成り立つ．したがって $\mathbb{Z}$ 加群の準同型

$$\Psi \colon K(A\text{-}\mathsf{gmod}) \to \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}[q,q^{-1}][S_i]$$

が誘導される．$q^k[S_i]$ の Ψ による像は再び $q^k[S_i]$ になるので，これは Φ の逆を与える．

$K(A\text{-}\mathsf{gproj})$ についても上の証明と同様にすればよい．ただし Jordan–Hölder の定理の代わりに次の Krull–Schmidt の定理を用いる． □

定理 5.5.4 (Krull–Schmidt)**.** P を有限生成射影的加群としたとき, その直既約分解は同型を除いて一意的である. すなわち, $P \simeq \bigoplus_{a \in A} L_a$, $P \simeq \bigoplus_{a' \in A'} L'_{a'}$ を直既約分解 (L_a, $L'_{a'}$ は直既約) としたとき, 全単射 $\xi\colon A \xrightarrow{\sim} A'$ があって, 任意の $a \in A$ に対して $L_a \simeq L'_{\xi(a)}$ が成り立つ.

証明は, 有限次元代数の場合と同様なので略する. 或は, 有限生成射影加群と有限次元半単純加群の (head と射影被覆による) 対応から有限次元半単純加群に対する Jordan–Hölder の定理に帰着しても証明できる.

命題 5.5.5. 有限生成射影的 A 加群 P と有限次元 A 加群 M に対し

$$(5.5.1)\quad \langle [P],[M]\rangle = \mathrm{qdim}_{\Bbbk}\bigl(\mathrm{Hom^{gr}}_A(P,M)\bigr) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_A(P, M\langle k\rangle)$$

とおくと, これは $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 半双線型写像[8]

$$\langle \bullet, \bullet \rangle\colon K(A\text{-}\mathsf{gproj}) \times K(A\text{-}\mathsf{gmod}) \to \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

を定める. これを $\mathbb{Q}(q)$ に拡大したものは非退化である.

Proof. P が有限生成かつ射影的なので, $\mathrm{Hom^{gr}}_A(P,M)$ は $\mathrm{Hom^{gr}}_A(A,M) \simeq M$ の次数をずらしたものの有限個の直和の直和因子と同型である. M が有限次元なので $\mathrm{Hom^{gr}}_A(P,M)$ も有限次元であり, (5.5.1) の右辺は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の元となる. また P が射影的なので, 関手 $\mathrm{Hom}_A(P,\bullet)$ は完全関手である. よって $[M] \in K(A\text{-}\mathsf{gmod})$ に対し $\langle P,[M]\rangle$ は well-defined である. 最後に $P \simeq P_1 \oplus P_2$ なら $\mathrm{Hom}_A(P,\bullet) = \mathrm{Hom}_A(P_1,\bullet) \oplus \mathrm{Hom}_A(P_2,\bullet)$ が成り立つので, $[P] \in K(A\text{-}\mathsf{gproj})$ に対し $\langle [P],[M]\rangle$ も well-defined となる. $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 半双線型性は

$$\begin{aligned}\langle q^{-1}[P],[M]\rangle = \langle [P], q[M]\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim_{\Bbbk}\bigl(\mathrm{Hom}_A(P, M\langle k-1\rangle)\bigr)\\ &= q\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim_{\Bbbk}\bigl(\mathrm{Hom}_A(P, M\langle k\rangle)\bigr)\\ &= q\langle [P],[M]\rangle\end{aligned}$$

から従う. 系 5.4.8 より基底に対し $\langle [P_i],[S_j]\rangle = \delta_{ij}\dim_{\Bbbk}\mathrm{End}_A(S_i)$ となるので, 係数拡大したときの非退化性が従う. □

[8]すなわち双線型写像で $\langle q^{-1}u,v\rangle = \langle u,qv\rangle = q\langle u,v\rangle$ が任意の $u \in K(A\text{-}\mathsf{gproj})$, $v \in K(A\text{-}\mathsf{gmod})$ に対して成り立つ.

この pairing により, $\mathbb{Q}(q)$ 線形空間の自然な同型

$$\mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \overline{K(A\text{-}\mathsf{gproj})} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\big(\mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} K(A\text{-}\mathsf{gmod}), \mathbb{Q}(q)\big)$$

が得られる．ここで $\overline{K(A\text{-}\mathsf{gproj})}$ は $K(A\text{-}\mathsf{gproj})$ 上の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 作用を involution $q \mapsto \overline{q} := q^{-1}$ でひねったものである (6 頁 記法 (vii) 参照)．特に全ての S_i が絶対既約 ($\mathrm{End}_A(S_i) \simeq \Bbbk$ を満たす) であれば $\langle [P_i], [S_j] \rangle = \delta_{ij}$ となるので, 係数拡大する前に両者は互いに双対となる．これは後に用いるので, 命題の形で記す.

命題 5.5.6. 任意の既約 A 加群が絶対既約なら,

$$\overline{K(A\text{-}\mathsf{gproj})} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\big(K(A\text{-}\mathsf{gmod}), \mathbb{Z}[q,q^{-1}]\big).$$

この絶対既約性の条件は $\Bbbk$ が代数閉体ならば自動的に成り立つ．また後で示すように, KLR 代数 R_n に対しては任意の体上で成立する.

5.6 双対性

$P \in A\text{-}\mathsf{gproj}$ に対して

$$\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P) := \mathrm{Hom^{gr}}_A(P, A)$$

は有限生成射影的 A^{op} 加群である (op は逆環を表す, 6 頁 記法 (iv) を参照)．従って, 加法圏の圏同値

$$\big(A\text{-}\mathsf{gproj}\big)^{\mathrm{op}} \simeq (A^{\mathrm{op}})\text{-}\mathsf{gproj}$$

が得られる (op は双対圏をあらわす)．従って, 加法圏の圏同値．従って, $Z[q,q^{-1}]$ 加群の同型

$$\overline{K(A\text{-}\mathsf{gproj})} \simeq K\big((A^{\mathrm{op}})\text{-}\mathsf{gproj}\big) \tag{5.6.1}$$

が得られる (記号 $-$ については, 6 頁 記法 (vii) 参照)．また, $M \in A\text{-}\mathsf{gmod}$ に対して,

$$\mathbb{D}(M) := \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$$

は有限次元 A^{op} 加群となる．従って, 加法圏の圏同値

$$\big(A\text{-}\mathsf{gmod}\big)^{\mathrm{op}} \simeq (A^{\mathrm{op}})\text{-}\mathsf{gmod}$$

と $Z[q,q^{-1}]$ 加群の同型

$$\overline{K(A\text{-}\mathsf{gmod})} \simeq K\big((A^{\mathrm{op}})\text{-}\mathsf{gmod}\big) \tag{5.6.2}$$

が得られる.

命題 5.6.1. $P \in A\text{-}\mathsf{gproj}$ と $M \in A\text{-}\mathsf{gmod}$ に対して,

$$\mathrm{Hom^{gr}}_A(P,M) \simeq \mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P) \otimes_A M, \tag{5.6.3}$$

$$\mathrm{Hom^{gr}}(\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P), \mathbb{D}(M)) \simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(\mathrm{Hom^{gr}}(P,M), \Bbbk\big). \tag{5.6.4}$$

Proof. (5.6.3) は明らかである.
(5.6.4) は

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(\mathrm{Hom^{gr}}_A(P,M),\Bbbk\big) &\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P)\otimes_A M,\Bbbk\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{A^{\mathrm{op}}}\big(\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P),\mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}(M,\Bbbk)\big)\end{aligned}$$

から得られる. □

系 5.6.2. P を直既約有限生成 A 加群, M をその head とする. そのとき $\mathbb{D}(M)$ は $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P)$ の head である.

Proof. $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P)$ は直既約有限生成 A 加群, $\mathbb{D}(M)$ は既約 A 加群, かつ (5.6.4) により $\mathrm{Hom}(\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P),\mathbb{D}(M))$ は零でないから, $\mathbb{D}(M)$ は $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}(P)$ の head である. □

命題 5.5.5, 命題 5.5.6 と (5.6.1), (5.6.3) をもちいれば, 次の命題を得る.

命題 5.6.3. 有限生成射影的 A^{op} 加群 P と有限次元 A 加群 M に対し

$$\langle\!\langle\, [P],[M]\,\rangle\!\rangle = \mathrm{qdim}_{\Bbbk}\big(P\otimes_A M\big) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \dim_{\Bbbk}(P\otimes_A M) \tag{5.6.5}$$

とおく.

(i) $\langle\!\langle\, \bullet,\bullet\,\rangle\!\rangle$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 双線型写像

$$\langle\!\langle\, \bullet,\bullet\,\rangle\!\rangle \colon K(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathsf{gproj}) \times K(A\text{-}\mathsf{gmod}) \to \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$$

を定める. これを $\mathbb{Q}(q)$ に拡大したものは非退化である.

(ii) もし任意の既約 A 加群が絶対既約なら, $\langle\!\langle\, \bullet,\bullet\,\rangle\!\rangle$ は同型

$$K(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathsf{gproj}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}(K(A\text{-}\mathsf{gmod}),\mathbb{Z}[q,q^{-1}])$$

を与える.

6章　量子群

この章では, categorification のターゲットである量子群について簡単に定義を復習し, その性質を調べる.

6.1　量子群の定義と基本的な構造

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能一般化 Cartan 行列とし, $(P, P^\vee, \Pi, \Pi^\vee, (\cdot,\cdot))$ をその実現としよう．$\alpha_i \in \Pi \subset P$, $h_i \in \Pi^\vee \subset P^\vee$ $(i \in I)$ をそれぞれ A に付随する単純ルート, 単純コルートとする．また $\mathfrak{g}$ で A の定める Kac–Moody Lie 代数を表すことにする.

定義 6.1.1. 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は, 生成元 e_i, f_i $(i\in I)$, t^h $(h \in P^\vee)$ と以下の関係式で定義される $\mathbb{Q}(q)$ 代数である.

(i) $t^0=1$, $t^h t^{h'} = t^{h+h'}$.

(ii) $t^h e_i t^{-h} = q^{\langle h,\alpha_i\rangle} e_i$, $t^h f_i t^{-h} = q^{-\langle h,\alpha_i\rangle} f_i$.

(iii) $[e_i, f_j] = \delta_{ij}\dfrac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$. ただし $t_i \coloneqq t^{(\alpha_i,\alpha_i)h_i/2}$, $q_i \coloneqq q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$ である.

(iv) q-Serre 関係式

$$\sum_{k+k'=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^k e_i^{(k)} e_j e_i^{(k')} = 0, \qquad \sum_{k+k'=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(k')} = 0.$$

ただし $e_i^{(n)}, f_i^{(n)}$ は divided power

$$e_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{if } n<0, \\ e_i^n/[n]_i! & \text{if } n \geq 0, \end{cases} \qquad f_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{if } n<0, \\ f_i^n/[n]_i! & \text{if } n \geq 0 \end{cases}$$

である．ここで q_i 整数 $[n]_i$ と q_i 階乗 $[n]_i!$ は

$$[n]_i \coloneqq \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}} = q_i^{n-1} + q_i^{n-3} + \cdots + q_i^{-n+1}, \quad [n]_i! \coloneqq [1]_i[2]_i\cdots[n]_i$$

で定義される.

関係式から直ちに, 生成元を $e_i \mapsto f_i, f_i \mapsto e_i, t^h \mapsto t^h$ と写す anti-involution があることがわかる.

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は Kac–Moody Lie 代数の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の q 変形である. 実際, $P^\vee$ を Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 内の $\mathbb{Z}$ 格子として実現し, $U_q(\mathfrak{g})$ の生成元 t^h を「q の h 乗」と解釈して極限 $q \to 1$ を取れば, (2) の関係式は $[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i$, $[h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i$, (3) は $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ という通常の Lie 代数の関係式になる. Kac–Moody Lie 代数で成立した三角分解定理は量子群についても成り立つ.

定義 6.1.2. $U_q^+(\mathfrak{g})$, $U_q^-(\mathfrak{g})$, $U_q^0(\mathfrak{g})$ を, それぞれ $\{e_i\}_{i\in I}$, $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{t^h\}_{h\in P^\vee}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分 $\mathbb{Q}(q)$ 代数とする. これらをそれぞれ $U_q(\mathfrak{g})$ の positive half, negative half, Cartan part と呼ぶ.

定理 6.1.3 (三角分解定理)**.** *$U_q(\mathfrak{g})$ について次の三角分解が成り立つ.*

(i) 掛け算で定義される $\mathbb{Q}(q)$ 線型写像

$$U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} U_q^+(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$$

は $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間としての同型写像である.

(ii) $U_q^+(\mathfrak{g})$ $\big($resp. $U_q^-(\mathfrak{g})\big)$ は $\{e_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{f_i\}_{i\in I}$) で生成され, q-Serre 関係式を定義関係式とする $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数と同型である. また $U_q^0(\mathfrak{g})$ は自由 Abel 群 P の $\mathbb{Q}(q)$ 上の群環 (すなわち Laurent 多項式環) と同型である.

Proof. 関係式から, (i) の写像が全射であることが従う. あとは $\tilde{U}_q^+(\mathfrak{g})$, $\tilde{U}_q^-(\mathfrak{g})$, $\tilde{U}_q^0(\mathfrak{g})$ を (ii) のように定義される $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間として, $\tilde{U}_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \tilde{U}_q^0(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \tilde{U}_q^+(\mathfrak{g})$ 上に $U_q(\mathfrak{g})$ の作用をうまく定めてやればよい. 詳細は省略する. □

われわれの目標は量子群の negative half $U_q^-(\mathfrak{g})$ の categorification である. これは $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間として無限次元なので, より扱いやすい有限次元空間の直和に分解して取り扱う.

定義 6.1.4. $\lambda \in P$ に対し,

$$U_q^-(\mathfrak{g})_\lambda \coloneqq \left\{ u \in U_q^-(\mathfrak{g}) \mid t^h u t^{-h} = q^{\langle h, \lambda \rangle} u \ (\forall h \in P^\vee) \right\}$$

を λ に対応するウェイト空間という．すると $U_q^-(\mathfrak{g})$ は

$$U_q^-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} U_q(\mathfrak{g})_{-\beta}$$

とウェイト空間の直和に分解される．具体的には,

$$U_q(\mathfrak{g})_{-\beta} = \sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_l}=\beta} \mathbb{Q}(q) f_{i_1} \cdots f_{i_l}$$

である．特に各ウェイト空間 $U_q(\mathfrak{g})_{-\beta}$ は有限次元の $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間である．

6.2 代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$

後で必要になるので, 補助的に用いる代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ を定義しておく．

定義 6.2.1. $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数 $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ を次で定義する．

(1) $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ は e'_i, f_i $(i \in I)$ で生成され, q-Boson 関係式

$$e'_i f_j = q^{-(\alpha_i,\alpha_j)} f_j e'_i + \delta_{ij}$$

を基本関係式とする $\mathbb{Q}(q)$ 代数である．

(2) $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ は e'_i, f_i $(i \in I)$ で生成され, 上の q-Boson 関係式と q-Serre 関係式

$$\sum_{k+k'=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^k e_i'^{(k)} e'_j e_i'^{(k')} = 0, \qquad \sum_{k+k'=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(k')} = 0$$

を基本関係式とする $\mathbb{Q}(q)$ 代数である．ここで前と同様 $e_i'^{(n)}$ は divided power を表す．

この定義から明らかに, $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ の間には自然な全射 $\mathcal{B}'(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ が存在する．また, どちらの代数にも生成元を $e'_i \mapsto f_i$, $f_i \mapsto e'_i$ と写す $\mathbb{Q}(q)$ 代数としての anti-involution があることがわかる．

補題 6.2.2. $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ において, 等式

$$\begin{aligned} e_i'^{(n)} f_j &= q^{-n(\alpha_i,\alpha_j)} f_j e_i'^{(n)} + \delta_{ij} q_i^{-n+1} e_i'^{(n-1)}, \\ e'_i f_j^{(n)} &= q^{-n(\alpha_i,\alpha_j)} f_j^{(n)} e'_i + \delta_{ij} q_i^{-n+1} f_i^{(n-1)} \end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは自明である．そこで $n > 0$ とすると, 帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&[n]_i e_i'^{(n)} f_j \\
&\quad = e_i'(q^{-(n-1)(\alpha_i,\alpha_j)} f_j e_i'^{(n-1)} + \delta_{ij} q_i^{-n+2} e_i'^{(n-2)}) \\
&\quad = q^{-(n-1)(\alpha_i,\alpha_j)}(q^{-(\alpha_i,\alpha_j)} f_j e_i' + \delta_{ij}) e_i'^{(n-1)} + \delta_{ij} q_i^{-n+2} [n-1]_i e_i'^{(n-1)} \\
&\quad = q^{-n(\alpha_i,\alpha_j)} [n]_i f_j e_i'^{(n)} + \delta_{ij} q_i^{-n+1} [n]_i e_i'^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

となり, 一つ目の等式が確かめられる．二つ目はこれに anti-involution を施せばよい． □

補題 6.2.3. $i, j \in I$ とし, $b = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$ とおく．$S_{ij} \in \mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ を

$$
S_{ij} = \sum_{l+l'=b} (-1)^l e_i'^{(l)} e_j' e_i'^{(l')}
$$

で与えれば, $S_{ij} f_k = q^{-(b\alpha_i + \alpha_j, \alpha_k)} f_k S_{ij}$ が任意の $k \in I$ に対して成り立つ．

Proof. $k \neq i, j$ のときは補題 6.2.2 から明らか．$k = j$ のときは,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l+l'=b} (-1)^l e_i'^{(l)} e_j' e_i'^{(l')} f_j \\
&\quad = \sum_{l+l'=b} (-1)^l q^{-l'(\alpha_i,\alpha_j)} e_i'^{(l)} e_j' f_j e_i'^{(l')} \\
&\quad = \sum_{l,l'} (-1)^l q^{-l'(\alpha_i,\alpha_j)} e_i'^{(l)} (q^{-(\alpha_j,\alpha_j)} f_j e_j' + 1) e_i'^{(l')} \\
&\quad = q^{-(b\alpha_i+\alpha_j,\alpha_j)} f_j \sum_{l+l'=b'} (-1)^l e_i'^{(l)} e_j' e_i'^{(l')} + \left(\sum_{l+l'=b} (-1)^l \frac{q^{-l'(\alpha_i,\alpha_j)}}{[l]_i! [l']_i!} \right) e_i'^{b}
\end{aligned}
$$

となる．第 2 項については, $q^{(\alpha_i,\alpha_j)} = q^{\langle h_i, \alpha_j \rangle (\alpha_i,\alpha_i)/2} = q_i^{1-b}$ に注意し, さらに第 2 項全体に非零因子 $[b]_i!$ をかければ, 示すべき式は

$$
\sum_{l+l'=b} (-q_i^{1-b})^l \frac{[b]_i!}{[l]_i! [l']_i!} = 0
$$

だと分かる．この左辺は q_i 二項定理

$$
\sum_{k+k'=m} \frac{[m]_i!}{[k]_i! [k']_i!} x^k = \prod_{j=0}^{m-1} (1 + q_i^{m-1-2j} x)
$$

を使うと

$$\sum_{l+l'=b}(-q_i^{1-b})^l\frac{[b]_i!}{[l]_i![l']_i!}=\prod_{j=0}^{b-1}(1-q_i^{-2j})$$

となる．$j=0$ のとき $1-q_i^{-2j}=0$ となるから右辺は常に 0 である．これで示すべきことが言えた．最後に $k=i$ のときを考える．補題 6.2.2 より $e_i'^{(l)}f_i=q_i^{-2l}f_ie_i'^{(l)}+q_i^{-l+1}e_i'^{(l-1)}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
&\sum_{l+l'=b}(-1)^le_i'^{(l)}e_j'e_i'^{(l')}f_i\\
&\qquad=\sum_{l+l'=b}(-1)^le_i'^{(l)}e_j'(q_i^{-2l'}f_ie_i'^{(l')}+q_i^{-l'+1}e_i'^{(l'-1)})\\
&\qquad=\sum_{l+l'=b}(-1)^le_i'^{(l)}(q_i^{-2l'+b-1}f_ie_j'e_i'^{(l')}+q_i^{-l'+1}e_j'e_i'^{(l'-1)})\\
&\qquad=\sum_{l+l'=b}(-1)^l\Big(q_i^{-b-1}f_ie_i'^{(l)}e_j'e_i'^{(l')}+q_i^{-l'}e_i'^{(l-1)}e_j'e_i'^{(l')}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+q_i^{-l'+1}e_i'^{(l)}e_j'e_i'^{(l'-1)}\Big).
\end{aligned}$$

ここで最後の式の和の中の第 2 項と第 3 項は添字をずらすことで互いに打ち消しあう．これで証明が完了した． □

これを用いると, 三角分解定理がこの代数に対しても成立することがわかる．

定理 6.2.4. $\Bbbk$ 代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ は次の性質をもつ．

(i) $\mathcal{B}^+(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{B}^-(\mathfrak{g})$ をそれぞれ e_i' $(i\in I)$ と f_i $(i\in I)$ で生成される $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の部分代数とするとき, $\mathbb{Q}(q)$ 線型空間としての同型 $\mathcal{B}^-(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{Q}(q)}\mathcal{B}^+(\mathfrak{g})\simeq\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

(ii) $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数として, $\mathcal{B}^+(\mathfrak{g})\simeq\mathcal{B}^-(\mathfrak{g})\simeq U_q^-(\mathfrak{g})$.

Proof. 定理 6.1.3 の証明と同様．作用の well-definedness のチェックに補題 6.2.3 を使う． □

6.3 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群構造

さて, $U_q^-(\mathfrak{g})$ 上の $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の作用を次で定義する．

補題 6.3.1. $u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対し

$$[e_i, u] = \frac{t_i e_i'' u - t_i^{-1} e_i' u}{q_i - q_i^{-1}}$$

を満たす $e_i' u, e_i'' u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ が一意に存在する．

Proof. 一意性は三角分解定理 6.1.3 から従う．よってこのような $e_i' u$, $e_i'' u$ の存在を言えばよい．まず 1 に対しては $[e_i, 1] = 0$ となるので，確かに $e_i' 1 = e_i'' 1 = 0$ と定まる．次に $u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対して $e_i' u$, $e_i'' u$ が存在していれば，生成元との積 $f_j u$ に対し

$$[e_i, f_j u] = [e_i, f_j] u + f_j [e_i, u] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} u + f_j \frac{t_i e_i'' u - t_i^{-1} e_i' u}{q_i - q_i^{-1}}$$

となる．ここで $t_i f_j t_i^{-1} = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} f_j$ なので，$f_j t_i = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} t_i f_j$，$f_j t_i^{-1} = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} t_i^{-1} f_j$ となる．故に

$$[e_i, f_j u] = \frac{t_i(\delta_{ij} u + q^{(\alpha_i, \alpha_j)} f_j e_i'' u) - t_i^{-1}(\delta_{ij} u + q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} f_j e_i' u)}{q_i - q_i^{-1}}$$

である．したがって $e_i'(f_j u) = \delta_{ij} u + q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} f_j e_i' u$，$e_i''(f_j u) = \delta_{ij} u + q^{(\alpha_i, \alpha_j)} f_j e_i'' u$ と定めればよい．$U_q^-(\mathfrak{g})$ は f_j $(j \in I)$ で生成されるから，これで任意の $u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対し $e_i' u$, $e_i'' u$ が定まる． □

そこで，$e_i' \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(U_q^-(\mathfrak{g})\bigr)$ を $u \mapsto e_i' u$ で定義された作用素とする．また $f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(U_q^-(\mathfrak{g})\bigr)$ を，左から f_i をかける作用素と定義する．

命題 6.3.2. 上で定義した作用素 e_i', f_i により，$U_q^-(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群となる．また $\mathbb{Q}(q) w$ を $e_i' w = 0$ $(i \in I)$ で定まる 1 次元 $\mathcal{B}^+(\mathfrak{g})$ 加群とすると，$\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群として

$$U_q^-(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{B}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{B}^+(\mathfrak{g})} \mathbb{Q}(q) w$$

である．

Proof. e_i', f_i が q-Boson 関係式を満たすことは補題 6.3.1 の証明から明らか．よって $U_q^-(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群となる．あとは f_i と e_i' が q-Serre 関係式を満たすことを示せばよいが，f_i たちについては量子群の定義から自明である．そこで $b := 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$ とおき，任意の $u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対して

$$\sum_{l + l' = b} (-1)^l e_i'^{(l)} e_j' e_i'^{(l')} u = 0$$

が成り立つことを帰納的に示す．まず $u=1$ のときはこの式は明らかに成り立つ．そこで $u\in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対して上式が正しいと仮定し，$f_k u$ $(k\in I)$ について上式を考えると，補題 6.2.3 より

$$\sum_{l+l'=b}(-1)^l e_i'^{(l)}e_j'e_i'^{(l')}(f_k u)=q^{-(b\alpha_i+\alpha_j,\alpha_k)}f_k\sum_{l+l'=b}(-1)^l e_i'^{(l)}e_j'e_i'^{(l')}u=0$$

となる．したがって任意の $u\in U_q^-(\mathfrak{g})$ で上式が成立し，e_i' たちも q-Serre 関係式を満たすことがわかる．最後の同型は $e_i'(1)=0$ と三角分解定理 6.2.4 から従う． □

作用素 e_i', f_i は，ウェイト空間に次のように作用する．

補題 6.3.3. $u\in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}$ に対し，$e_i'u\in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta+\alpha_i}$, $f_iu\in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta-\alpha_i}$ となる．

Proof.

$$t^h[e_i,u]t^{-h}=[t^he_it^{-h},t^hut^{-h}]=[q^{\langle h,\alpha_i\rangle}e_i,q^{\langle h,-\beta\rangle}u]=q^{\langle h,-\beta+\alpha_i\rangle}\frac{e_i''u-e_i'u}{q_i-q_i^{-1}}$$
$$t^h(f_iu)t^{-h}=(t^hf_it^{-h})(t^hut^{-h})=q^{-\langle h,\alpha_i\rangle}f_iq^{\langle h,-\beta\rangle}u=q^{\langle h,-\beta-\alpha_i\rangle}f_iu$$

なので，確かに e_i' はウェイトを α_i, f_i はウェイトを $-\alpha_i$ 変化させている． □

続いて $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の既約性を示す．そのために必要となるのは次の補題である．

補題 6.3.4. $u\in U_q^-(\mathfrak{g})$ が任意の $i\in I$ に対し $e_i'u=0$ を満たせば，$u\in\mathbb{Q}(q)$ である．

この補題は $q=1$ の場合に Gabber-Kac の定理として知られている事実に帰着させることにより証明される．この講義録では証明を与えない (例えば [Kas91, Lus94] 参照)．

命題 6.3.5. $U_q^-(\mathfrak{g})$ は既約な $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群である．また $\mathrm{End}_{\mathcal{B}(\mathfrak{g})}\big(U_q^-(\mathfrak{g})\big)\simeq\mathbb{Q}(q)$ が成り立つ．

Proof. $M\subset U_q^-(\mathfrak{g})$ を 0 でない $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 部分加群とする．$u\in M\setminus\{0\}$ をとると，ウェイト空間分解を考えることにより，ある $N\geq 0$ が存在して $n>N$ ならば任意の $i_1,i_2,\dots,i_n\in I$ に対し $e_{i_1}'e_{i_2}'\dots e_{i_n}'u=0$ となることがわかる．そのような N のうち最小なものをとり，$v=e_{i_1}'e_{i_2}'\dots e_{i_N}'u\neq 0$

とする．すると任意の $i \in I$ に対し $e_i'v = 0$ が成り立つので，補題 6.3.4 より $v \in \mathbb{Q}(q)$ である．$v \in M$ は $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 上 $U_q^-(\mathfrak{g})$ 全体を生成するので，$M = U_q^-(\mathfrak{g})$ となり $U_q^-(\mathfrak{g})$ の既約性が従う．

また再び補題 6.3.4 より，$\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 準同型 $U_q^-(\mathfrak{g}) \to U_q^-(\mathfrak{g})$ での 1 の像は $\mathbb{Q}(q)$ に入る．したがってそのような準同型はスカラー倍のみである． □

定義 6.3.6. $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群 M が Q_--ウェイト加群であるとは，M が部分線型空間による直和分解

$$M = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}} M_\beta$$

を持ち，$M_\beta = 0$ $(\beta \notin \mathsf{Q}_-)$，$e_i'M_\beta \in M_{\beta+\alpha_i}$，$f_iM_\beta M_{\beta-\alpha_i}$ が成り立つことを指す．(Q_- については (2.6.1) を見よ.)

以上のことをまとめて，この用語のもとに次の定理を得る．

定理 6.3.7. *M を Q_--ウェイト $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群とする．M 上で f_i $(i \in I)$ たちが q-Serre 関係式を満たし，さらに $M = \mathcal{B}'(\mathfrak{g})M_0$ が成り立つ仮定する．そのとき $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群としての同型 $M \simeq U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0$ が存在する．特に M には $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群の構造が定まる．*

Proof. Q_--ウェイトの仮定より $e_i'M_0 = 0$ $(i \in I)$ であり，さらに f_i たちが q-Serre 関係式を満たすことから，命題 6.3.2 より $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 準同型 $\psi\colon U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0 \to M$ の存在が従う．$M = \mathcal{B}'(\mathfrak{g})M_0$ より ψ は全射である．また $U_q^-(\mathfrak{g})$ の既約性から，$U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0$ の任意の $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 部分加群は，M_0 の $\mathbb{Q}(q)$ 部分空間 V をとって $U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}(q)} V$ とかける．これを $\operatorname{Ker}\psi$ に適用すれば，写像 ψ の単射性が従う． □

6.4 双対空間 $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ と不変内積

定義 6.4.1. $U_q^-(\mathfrak{g})$ の各ウェイト空間ごとに線型空間の双対を取り，その直和をとったものを

$$U_q^-(\mathfrak{g})^* := \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} U_q(\mathfrak{g})^*_{-\beta}, \qquad U_q^-(\mathfrak{g})^*{}_{-\beta} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\big(U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}, \mathbb{Q}(q)\big)$$

と書く．

注意 6.4.2. $I \neq \emptyset$ なら，$U_q^-(\mathfrak{g})^* \subsetneq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\big(U_q^-(\mathfrak{g}), \mathbb{Q}(q)\big)$ である．

双対空間 $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ 上にも次のようにして $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群の構造を入れることができる.

定義 6.4.3. $e_i', f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}\bigl(U_q^-(\mathfrak{g})\bigr)$ は, ウェイト空間に制限することで $e_i' \colon U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta} \to U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta+\alpha_i}$ および $f_i \colon U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta} \to U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta-\alpha_i}$ を定める. これらの転置写像を,

$$ {}^t e_i' \colon U_q^-(\mathfrak{g})^*{}_{-\beta+\alpha_i} \to U_q^-(\mathfrak{g})^*{}_{-\beta} \text{ および } {}^t f_i \colon U_q^-(\mathfrak{g})^*{}_{-\beta-\alpha_i} \to U_q^-(\mathfrak{g})^*{}_{-\beta} $$

とし, 全ての $\beta \in \mathsf{Q}_+$ について直和することで ${}^t e_i', {}^t f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}(U_q^-(\mathfrak{g})^*)$ を定義する. このとき $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ 上に左 $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群の構造を $e_i'\varphi \coloneqq {}^t f_i'\varphi$, $f_i\varphi \coloneqq {}^t e_i'\varphi$ で定める. 具体的に書けば,

$$ (e_i'\varphi)(u) = \varphi(f_i u), \qquad (f_i\varphi)(u) = \varphi(e_i' u) $$

である. 作用の well-definedness は anti-involution $e_i' \mapsto f_i$, $f_i \mapsto e_i'$ の存在から従う.

$\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の作用を用いると $U_q^-(\mathfrak{g})$ 上によい性質を満たす双線型形式が構成できる.

命題 6.4.4. 各 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し, 次の条件を満たす $U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}$ 上の $\mathbb{Q}(q)$ 双線型形式

$$ (\bullet, \bullet)_{-\beta} \colon U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta} \times U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta} \to \mathbb{Q}(q) $$

が一意に存在する.

(a) $(1,1)_0 = 1$.

(b) 任意の $u \in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta-\alpha_i}$, $v \in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}$ に対し

$$ (e_i'u, v)_{-\beta} = (u, f_i v)_{-\beta-\alpha_i}. $$

Proof. 一意性は β の高さについての帰納法から明らかである. また存在は, $\beta = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_l}$, $v = f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_l}$ に対し anti-involution を用いて

$$ (u, f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_l})_{-\beta} \coloneqq e_{i_l}' \cdots e_{i_2}' e_{i_1}'(u) \in U_q^-(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{Q}(q) $$

と定めてやればよい. これが条件 (a), (b) をみたすのは明らか. □

命題 6.4.5. 任意の $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し $(\bullet, \bullet)_{-\beta}$ は対称かつ非退化である.

Proof. $(u, e'_i v)_{-\beta+\alpha_i} = (f_i u, v)_{-\beta}$ が成り立つことを言えば, 条件を満たす双線型形式の一意性から対称性が従う．そこでこの等式を β の高さに関する帰納法で示そう．$\beta = 0$ のときは定義から正しい．次に $\beta \neq 0$ とすると, 帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
(f_i u, f_j v)_{-\beta} &= (e'_j f_i u, v)_{-\beta+\alpha_j} \\
&= q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}(f_i e'_j u, v)_{-\beta+\alpha_j} + \delta_{ij}(u, v)_{-\beta+\alpha_j} \\
&= q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}(u, f_j e'_i v)_{-\beta+\alpha_i} + \delta_{ij}(u, v)_{-\beta+\alpha_i} \\
&= (u, e'_i f_j v)_{-\beta+\alpha_i}
\end{aligned}$$

となり, 等式が成立する．従って, $(\bullet, \bullet)_{-\beta}$ が対称であることがいえた．

$(\bullet, \bullet)_{-\beta}$ の非退化性も, β の高さに関する帰納法で示す．$u \in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}$ を $(\bullet, \bullet)_{-\beta}$ の根基の元とすると, 任意の $i \in I$ と $v \in U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta+\alpha_i}$ に対し $(e'_i u, v)_{-\beta+\alpha_i} = (u, f_i v)_{-\beta} = 0$ を満たす．したがって帰納法の仮定より $e'_i u = 0$ となり, 補題 6.3.4 より $u = 0$ が従う．つまり $(\bullet, \bullet)_{-\beta}$ も非退化である． □

これらの双線型形式を全て直和したものを $(\bullet, \bullet)\colon U_q^-(\mathfrak{g}) \times U_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(q)$ と書こう．これも対称かつ非退化な双線型形式である．これにより次の命題が得られる．

命題 6.4.6. $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群として

$$U_q^-(\mathfrak{g}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})^*$$

である．

この同型が $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 線型であることは, 命題 6.4.4 から従う．

注意 6.4.7. 4.3 節で登場した量子シャッフル代数 $\mathcal{F}^*$ と量子群の関係についてここで触れておこう．$\mathcal{F}^*$ の双対 $\mathcal{F}$ は自由代数であるから, F_i を f_i に写す自然な $\mathbb{Q}(q)$ 代数の全射 $\mathcal{F} \twoheadrightarrow U_q^-(\mathfrak{g})$ が存在する．よって双対をとると埋め込み $U_q^-(\mathfrak{g})^* \hookrightarrow \mathcal{F}^*$ が得られる．双線型形式による同型で $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ にも $\mathbb{Q}(q)$ 代数の構造が入っており, この埋め込みが積を保つことが計算により確かめられる．

一方定理 4.3.12 は, 指標 ch により $\mathbb{Q}(q)$ 代数の準同型

$$\mathrm{ch}\colon \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}) \to \mathcal{F}^*$$

が得られることを意味している．ここで左辺には合成積による積構造が入っている．実はこの準同型 ch は単射であり，その像は $\mathcal{F}^*$ の中で $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ と一致する．この事実は第 8 章での categorification を用いて明らかにされる．

ここで定理 6.3.7 の双対として次の定理が成り立つ．これが KLR 代数による量子群の categorification の証明の鍵となる．

定理 6.4.8. M を Q_--ウェイト $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群 (定義 6.3.6 参照) とする．M 上で e'_i $(i \in I)$ たちが q-Serre 関係式を満たし，さらに $M_0 = \{u \in M \mid e'_i u = 0\ (\forall i \in I)\}$ となっているとき，$\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群としての同型 $M \simeq U_q^-(\mathfrak{g})^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0$ が成り立つ．特に M には $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群の構造が定まる．

Proof. $e'_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}(M)$ で生成される $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}(q)}(M)$ の $\mathbb{Q}(q)$ 部分代数を R とする．仮定より，f_i を e'_i に移す $\mathbb{Q}(q)$ 代数準同型

$$\xi\colon U_q^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}} \to R$$

が存在する．

$$U_q^-(\mathfrak{g})^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0 \simeq \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\big(U_q^-(\mathfrak{g})_{-\beta}, M_0\big) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}\big(U_q^-(\mathfrak{g}), M_0\big)$$

に注意しよう．そこで $\pi_0\colon M \twoheadrightarrow M_0$ を M_0 への射影とし，$\mathbb{Q}(q)$ 双線型写像 $\varphi\colon M \times U_q^-(\mathfrak{g}) \to M_0$ を

$$\varphi(m, a) = \pi_0(\xi(a)m)$$

と定める．φ は $\mathbb{Q}(q)$ 線型写像 $M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}(U_q^-(\mathfrak{g}), M_0)$ を定めるが，M が Q_--ウェイト加群であることによりこの像は $U_q^-(\mathfrak{g})^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0$ に入る．したがって $\mathbb{Q}(q)$ 線型写像

$$\psi\colon M \to U_q^-(\mathfrak{g})^* \otimes_{\mathbb{Q}(q)} M_0$$

が得られる．定義より明らかに $\varphi(e'_i m, u) = \varphi(m, f_i u)$ である．すると命題 6.4.5 の証明と同様の帰納法により，$\varphi(f_i m, u) = \varphi(m, e'_i u)$ かつ任意の $u \in U_q^-(\mathfrak{g})$ に対し $\varphi(m, u) = 0$ であれば $m = 0$ であることが証明できる．したがって ψ は単射な $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 準同型である．

また，$\psi(u) = 1 \otimes u$ $(u \in M_0)$ なので，準同型 ψ は全射である． $\square$

6.5 Kostant–Lusztig form と大域基底

まず量子群の negative part を $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上で定義しよう．これは量子群の Kostant–Lusztig form と呼ばれる．

定義 6.5.1. $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z} \subset U_q^-(\mathfrak{g})$ を $f_i^{(n)}$ $(i \in I, n > 0)$ で生成される $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 部分代数とする．

これのウェイト空間を $\left(U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}\right)_\lambda := U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z} \cap U_q(\mathfrak{g})_\lambda$ で定義すると，$U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}$ も同様にウェイト空間分解

$$U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z} = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \left(U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}\right)_{-\beta}$$

を持つ．

$\left(U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}\right)_{-\beta}$ が有限生成 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群であることは自明である．実は，次の定理が成り立つ．

定理 6.5.2. $\left(U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}\right)_\beta$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上の自由加群であり，$\mathbb{Q}(q)$ 線形空間 $U_q^-(\mathfrak{g})_\beta$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 格子をなす．

この証明は略するが，あとに述べる大域基底の存在と密接に関連している．

そこで Kostant–Lusztig form についても双対空間を以下で定義する．

定義 6.5.3. 各 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対しウェイト空間ごとに双対を取り，その直和を取ったものを

$$U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^* := \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} (U_q(\mathfrak{g}))_\mathbb{Z}^*)_{-\beta},$$
$$\left(U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^*\right)_{-\beta} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\left((U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z})_{-\beta}, \mathbb{Z}[q,q^{-1}]\right)$$

と書く．$\mathbb{Q}(q) \otimes U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^* \simeq U_q^-(\mathfrak{g})^*$ なので，$U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^* \subset U_q^-(\mathfrak{g})^*$ と思える．これも $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 格子をなす．

補題 6.5.4. $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}$ は e_i', $f_i^{(n)}$ の作用で閉じている．また $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^*$ は $e_i'^{(n)}$, f_i の作用で閉じている．

Proof. $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}$ が $f_i^{(n)}$ で閉じているのは定義から明らか．また e_i' の作用についても補題 6.2.2 の交換関係から従う．$U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^*$ についての主張はその双対である． □

次の補題は 定義から明らかである.

補題 6.5.5. $\beta \in \mathsf{Q}_+$ と $u \in \left(U_q^-(\mathfrak{g})^*\right)_{-\beta}$ にたいして次の二条件は同値である.

(a) $u \in \left(U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}\right)_{-\beta}$,

(b) $\sum_{k=1,r} m_k \alpha_{i_k} = \beta$ となる任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $i_k \in I$ $(1 \leq k \leq r)$ に対して

$$e'^{(m_1)}_{i_1} \cdots e'^{(m_r)}_{i_r} u \in \left(U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}\right)_0.$$

従って次の命題が成り立つ.

命題 6.5.6. $K \subset U_q^-(\mathfrak{g})^*$ を $e_i'^{(n)}$, f_i の作用で不変な $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群で, 次の条件 (a)–(c) を満たすとする.

(a) 重み分解 $K = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}} K_\beta$ $(K_\beta := K \cap \left(U_q^-(\mathfrak{g})^*\right)_\beta)$ をもつ.

(b) $K_0 = \left(U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}\right)_0$.

(c) $\beta \in \mathsf{Q}_+ \setminus \{0\}$, $u \in (U_q^-(\mathfrak{g})^*)_{-\beta}$ とする. $e_i'^{(n)} u \in K$ が任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $i \in I$ に対して満足されれば, $u \in K$ である.

そのとき $K = U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$ である.

$U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$ には大域基底と呼ばれる良い基底が定まることが知られている[9].

定義 6.5.7. $\mathbb{Q}$ 代数としての involution $\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g}) \to U_q^-(\mathfrak{g})$ を $\overline{q} := q^{-1}$, $\overline{f_i} := f_i$ によって定義する. またこれを用いて, $\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g})^* \to U_q^-(\mathfrak{g})^*$ を $\overline{\varphi}(\overline{u}) = \overline{\varphi(u)}$ で定義する. これらを量子群の bar involution と呼ぶ.

注意 6.5.8. この bar involution は内積による同型 $U_q^-(\mathfrak{g})^* \simeq U_q^-(\mathfrak{g})$ (命題 6.4.6) では保たれない.

定理 6.5.9 (柏原 [Kas91, Kas93])**.** 次の条件 (a)–(g) を満たす $U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての基底 B が唯一つ存在する. 以下 b は B の任意の元[10]とし, $\varepsilon_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid e_i'^k b \neq 0\}$ とおく.

(a) B はウェイト分解を持つ. すなわち $B_\lambda := B \cap U_q(\mathfrak{g})_\lambda$ とおくと, $B = \bigsqcup_{\beta \in \mathsf{Q}_+} B_{-\beta}$.

[9]詳しくは柏原自身による解説 [Kas95] を参照.

[10]通常の記法では大域基底の元は $G^{\mathrm{up}}(b)$ や $G^{\mathrm{low}}(b)$ などと書かれる.

(b) $1^* \in B$. ここで $\{1^*\} \subset U_q(\mathfrak{g})_0^*$ は $\{1\} \subset U_q(\mathfrak{g})_0$ の双対基底である.

(c) $e_i' b \neq 0$ のとき, $\tilde{e}_i b \in B$ で

$$e_i' b = [\varepsilon_i(b)]_i \tilde{e}_i b + \sum_{\substack{b' \in B, \\ \varepsilon_i(b') < \varepsilon_i(b) - 1}} E_{bb'}^{(i)} b' \qquad \left(E_{bb'}^{(i)} \in q q_i^{1-\varepsilon_i(b)} \mathbb{Z}[q]\right)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

(d) $\tilde{f}_i b \in B$ で

$$f_i b = q_i^{-\varepsilon_i(b)} \tilde{f}_i b + \sum_{\substack{b' \in B, \\ \varepsilon_i(b') < \varepsilon_i(b) + 1}} F_{bb'}^{(i)} b' \qquad \left(F_{bb'}^{(i)} \in q q_i^{-\varepsilon_i(b)} \mathbb{Z}[q]\right)$$

を満たすものが唯一つ存在する.

(e) $\tilde{e}_i \tilde{f}_i b = b$.

(f) $e_i' b \neq 0$ ならば $\tilde{f}_i \tilde{e}_i b = b$.

(g) $\overline{b} = b$.

この B を $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}^*$ の (上側) 大域基底という. またこれの双対基底を $U_q^-(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}$ の (下側) 大域基底という. $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列が対称であるとき, 下側大域基底は Lusztig [Lus90a, Lus90b] が幾何学的に構成した標準基底と一致することが知られている (9.2 節参照).

例 6.5.10.

- A_1 型 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $I = \{1\}$) のとき, 下側大域基底は $\left\{f_1^{(n)} \mid n \geq 0\right\}$ である. また上側大域基底は $\{q^{n(n-1)/2} f_1^n \cdot 1^* \mid n \geq 0\}$ と書ける.
- A_2 型 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $I = \{1, 2\}$) のとき, 下側大域基底は

$$\left\{f_1^{(a)} f_2^{(b)} f_1^{(c)},\ f_2^{(c)} f_1^{(b)} f_2^{(a)} \mid b \geq a + c\right\}$$

  で与えられる. ただし $b = a + c$ のときは $f_1^{(a)} f_2^{(b)} f_1^{(c)} = f_2^{(c)} f_1^{(b)} f_2^{(a)}$ が成り立つ.

なお, このように単項式で下側大域基底が書けるのは A_2 型までである.

7章 NilHecke 代数の表現論

半単純 Lie 代数や量子群の表現論において, もっとも基本的なのは $\mathfrak{sl}_2$ と $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論である. したがって量子群の categorification を考えるにあたっても, まず考えるべきは $\mathfrak{sl}_2$-case である. この場合, 対応する KLR 代数は nilHecke 代数と呼ばれる代数になっている. その性質と表現論を調べよう.

7.1 定義と基本的性質

この章全体を通じて $I = \{i\}$ はただ一つの元 i からなるとし, A_1 型のルート系を考える. $I = \{i\}$ だから $I^n = \{(i, \ldots, i)\}$ も 1 元集合であり, したがって $R_n = R(n\alpha_i)$ が成り立つ. A_1 型ルート系に付随する KLR 代数 R_n は生成元 $x_1, \ldots, x_n$, $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ と関係式

$$\begin{aligned}
x_k x_{k'} &= x_{k'} x_k, \\
\tau_k x_l &= x_{s_k(l)} \tau_k \quad \text{if } l \neq k, k+1, \\
\tau_k x_{k+1} - x_k \tau_k &= x_{k+1} \tau_k - \tau_k x_k = 1, \\
\tau_k \tau_{k'} &= \tau_{k'} \tau_k \quad \text{if } |k - k'| > 1, \\
\tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} &= \tau_k \tau_{k+1} \tau_k, \\
\tau_k^2 &= 0
\end{aligned}$$

で定義される代数であり, $\deg x_k = -\deg \tau_k = (\alpha_i, \alpha_i)$ により次数が定まる. この代数を nilHecke 代数という.

NilHecke 代数では組紐関係式が厳密に成り立つため, $\tau_w := \tau_{k_1} \tau_{k_2} \cdots \tau_{k_l}$ は w の最短表示 $w = s_{k_1} s_{k_2} \cdots s_{k_l} \in \mathfrak{S}_n$ の取り方によらず well-defined である. 今の場合 $\tau_k^2 = 0$ なので

$$\tau_w \tau_{w'} = \begin{cases} \tau_{ww'} & \text{if } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w'), \\ 0 & \text{if } \ell(ww') < \ell(w) + w(w') \end{cases}$$

が補題 2.3.3 と同様にして成り立つ. また KLR 代数の基底定理 2.3.1 は今の場合

$$R_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \tau_w$$

となる.

R_n の多項式表現 (定理 2.4.2) は nilHecke 代数の場合 $P_n = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ となる．この作用は τ_k に差分商作用素 ∂_k を対応させることに他ならない．注意 4.2.4 で注意したとおり，P_n は次数付き R_n 加群である．R_n 加群として

$$P_n \simeq R_n / \Big(\sum_{k=1}^{n-1} R_n \tau_k \Big) \tag{7.1.1}$$

という同型がある．

また P_n は忠実であるから，補題 2.4.3 より次の交換関係が従う．

補題 7.1.1. 任意の $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ と $1 \le k \le n$ に対し，R_n の中で

$$\tau_k f = s_k(f) \tau_k + \partial_k(f)$$

が成り立つ．

7.2 多項式表現と森田同値

NilHecke 代数の場合，多項式表現が射影的直既約になるという著しい性質がある．まずはそのことを示そう．

定義 7.2.1. $w_n \in \mathfrak{S}_n$ を $\mathfrak{S}_n$ の最長元とし，$b_n := \tau_{w_n} x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ とおく．

この b_n は，この節だけでなく 8.3 節でも用いるので，その性質をまとめておく．

補題 7.2.2. b_n は次の性質をもつ．

(i) $1 \le k < n$ に対して，$\tau_k b_n = 0$．

(ii) $b_n^2 = b_n$．

(iii) $b_n \tau_{w_n} = \tau_{w_n}$．

(iv) $b_n - 1 \in \sum_{k=1}^{n-1} R_n \tau_k$．

(v) $k, k' \ge 0$ に対して，

$$b_{n+k+k'} \big(e(i^k) \boxtimes b_n \boxtimes e(i^{k'}) \big) = \big(e(i^k) \boxtimes b_n \boxtimes e(i^{k'}) \big) b_{n+k+k'} = b_{n+k+k'}.$$

(vi) b_n はつぎの漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \cdot x_n^{n-1}\bigl(b_{n-1} \boxtimes e(i)\bigr) \\ &= \tau_{n-1} \cdots \tau_1 \cdot x_2 \cdots x_n\bigl(e(i) \boxtimes b_{n-1}\bigr). \end{aligned}$$

(vii) R_n で次の等式が成り立つ.

$$b_n\tau_1 \cdots \tau_{n-1}\bigl(b_{n-1} \boxtimes e(i)\bigr) = \tau_1 \cdots \tau_{n-1}\bigl(b_{n-1} \boxtimes e(i)\bigr)$$
$$b_n\tau_{n-1} \cdots \tau_1\bigl(e(i) \boxtimes b_{n-1}\bigr) = \tau_{n-1} \cdots \tau_1\bigl(e(i) \boxtimes b_{n-1}\bigr).$$

Proof. (i) は, 任意の $1 \leq k \leq n-1$ に対し $\tau_k\tau_{w_n} = 0$ となることから従う.

(vi) $w_n = s_1 \cdots s_{n-1}w_{n-1}$ より,

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1}\tau_{w_{n-1}}x_2x_3^2 \cdots x_n^{n-1} \\ &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1}x_n^{n-1}\tau_{w_{n-1}}x_2x_3^2 \cdots x_{n-1}^{n-2} \\ &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \cdot x_n^{n-1}\bigl(b_{n-1} \boxtimes e(i)\bigr) \end{aligned}$$

を得る. 同様に, $\tau_{w_n} = \tau_{n-1} \cdots \tau_1\bigl(e(i) \otimes \tau_{w_{n-1}}\bigr)$ より,

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_{n-1} \cdots \tau_1\bigl(e(i) \otimes \tau_{w_{n-1}}\bigr)(x_2 \cdots x_n)(x_3x_4^2 \cdots x_n^{n-2}) \\ &= \tau_{n-1} \cdots \tau_1(x_2 \cdots x_n)\bigl(e(i) \boxtimes \tau_{w_{n-1}}\bigr)(x_3x_4^2 \cdots x_n^{n-2}) \\ &= \tau_{n-1} \cdots \tau_1(x_2 \cdots x_n)\bigl(e(i) \boxtimes b_{n-1}\bigr) \end{aligned}$$

を得る.

(iv) n に関する帰納法で証明しよう. (vi) を用いれば, $\sum_{k=1}^{n-1} R_n\tau_k$ を法として,

$$\begin{aligned} b_n &= \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \cdot x_n^{n-1}\bigl(b_{n-1} \boxtimes e(i)\bigr) \\ &\equiv \tau_1 \cdots \tau_{n-1} \cdot x_n^{n-1} \\ &\equiv \partial_1 \cdots \partial_{n-1}(x_n^{n-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の等式は $\partial_k\bigl(x_{k+1}^l + \sum_{j<l} \mathbb{k}[x_{k+2}, \cdots, x_n]x_{k+1}^j\bigr) \subset x_k^{l-1} + \sum_{j<l-1} \mathbb{k}[x_{k+1}, \cdots, x_n]x_k^j$ から従う.

(iii) は, (iv) と $\tau_k\tau_{w_n}=0$ から直ちに従う.

(ii) は (iii) から直ちに従う.

(vii) $\tau_{w_n}=\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}(\tau_{w_{n-1}}\boxtimes e(i))$ と $b_n\tau_{w_n}=\tau_{w_n}$ より

$$\begin{aligned}b_n\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}\bigl(b_{n-1}\boxtimes e(i)\bigr)&=b_n\tau_{w_n}x_2x_3^2\cdots x_{n-1}^{n-2}\\&=\tau_{w_n}x_2x_3^2\cdots x_{n-1}^{n-2}\\&=\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}\bigl(b_{n-1}\boxtimes e(i)\bigr)\end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に

$$\begin{aligned}b_n\tau_{n-1}\cdots\tau_1\bigl(e(i)\boxtimes b_{n-1}\bigr)&=b_n\tau_{w_n}x_3\cdots x_n^{n-2}\\&=\tau_{w_n}x_3\cdots x_n^{n-2}\\&=\tau_{n-1}\cdots\tau_1\bigl(e(i)\boxtimes b_{n-1}\bigr)\end{aligned}$$

となる.

□

注意 7.2.3. ここでは証明を略するが, $\mathfrak{b}_k=\tau_kx_{k+1}$ とおくと, $\{\mathfrak{b}_k\}_{1\le k<n}$ は組紐関係式と $\mathfrak{b}_k^2=\mathfrak{b}_k$ を満たす. 従って, 任意の $w\in\mathfrak{S}_n$ に対して $\mathfrak{b}_w:=\mathfrak{b}_{k_1}\cdots\mathfrak{b}_{k_l}$ は w の最短表示 $w=s_{k_1}\cdots s_{k_l}$ の取り方によらない. 実は, $b_n=\mathfrak{b}_{w_n}$ となっている. 従って, $b_n\mathfrak{b}_k=\mathfrak{b}_kb_n=b_n$ が成り立つ. 補題 7.2.2 (ii), (v) はこれより直ちに従う.

補題 7.2.2 (ii) より R_nb_n は射影的 R_n 加群である.

補題 7.2.4. また射影的 R_n 加群 R_nb_n は次数付けも込めて P_n と同型である.

Proof.

$$b_n=x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1}\tau_{w_n}+(\tau_w\text{ について低次の項})$$

と書けるので, 基底定理 定理 2.3.1 より $\Bbbk$ 線型空間としての同型 $R_nb_n=P_nb_n\simeq P_n$ が成り立つ. (7.1.1) と $\tau_kb_n=0$ によって, R_nb_n は多項式表現 P_n と同型である. $\deg b_n=0$ であるから, この同型は次数も保つ. □

この表現 $P_n\simeq R_nb_n$ を経由することにより, R_n 加群をより簡単な代数上の加群に翻訳して考えることができる. 必要となるのは以下の 3 つの補題である.

補題 7.2.5. $R_n b_n R_n = R_n$ が成り立つ.

Proof. 補題 7.2.2 (iii) により $1 \in R_n \tau_{w_n} R_n$ を示せばよい. 以下これを n に関する帰納法で示す. $n = 0, 1$ のときは自明なので $n > 1$ とする. まず $1 \leq a \leq n-1$ のとき

$$
\begin{aligned}
x_n \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} \cdots \tau_a &= \tau_{w_{n-1}} x_n \tau_{n-1} \cdots \tau_a \\
&= \tau_{w_{n-1}} (\tau_{n-1} x_{n-1} + 1) \tau_{n-2} \cdots \tau_a \\
&= \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} x_{n-1} \tau_{n-2} \cdots \tau_a \\
&= \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} (\tau_{n-2} x_{n-2} + 1) \tau_{n-3} \cdots \tau_a \\
&\cdots \\
&= \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} \cdots \tau_{a+1} (\tau_a x_a + 1)
\end{aligned}
$$

が従う. これより $\tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} \cdots \tau_{a+1} \in R_n \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} \cdots \tau_a R_n$ が言えた. この主張を $a = 1, 2, \ldots, n-1$ と順番に使うことで, 最終的に $\tau_{w_{n-1}} \in R_n \tau_{w_n} R_n$ を得る. $\tau_{w_n} = \tau_{w_{n-1}} \tau_{n-1} \cdots \tau_1$ に注意せよ. 帰納法の仮定より, $1 \in R_n \tau_{w_{n-1}} R_n \subset R_n \tau_{w_n} R_n$ となる. $\square$

$\mathbb{S}_n$ を対称多項式環 $\mathbb{S}_n := \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ とおく. 補題 2.6.4 に見たように, $\mathbb{S}_n$ は R_n の中心と一致する.

補題 7.2.6. 次数付き $\mathbb{k}$ 代数の同型 $\mathrm{End}_{R_n}(P_n) \simeq \mathbb{S}_n$ が成り立つ.

Proof. $\varphi \in \mathrm{End}_{R_n}(P_n)$ とする. φ は R_n 加群の準同型だから, 特に任意の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ に対し $\varphi(f) = f\varphi(1)$ が成り立つ. よって φ の値は $\varphi(1)$ のみで決まっている. さらに任意の $k = 1, \ldots, n-1$ に対し,

$$
0 = \varphi(0) = \varphi(\tau_k \cdot 1) = \tau_k \cdot \varphi(1)
$$

が成り立つ. τ_k は P_n に差分商作用素として作用するので, これは $\varphi(1)$ が対称多項式であるという事に他ならない. よって $\varphi(1) \in \mathbb{S}_n$ が成り立つ.

逆に, 対称多項式 $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}_n$ が与えられれば, $\varphi(g) := gf$ と定めることで $\varphi \in \mathrm{End}_{R_n}(P_n)$ が定まる. 故に求める同型 $\mathrm{End}_{R_n}(P_n) \simeq \mathbb{S}_n$ を得る. $\square$

P_n は $\mathbb{S}_n$ 加群として有限生成かつ自由であることは良く知られた事実であるが, ここでは具体的に Schubert 多項式と呼ばれるものが基底となることを示すことによって証明しよう.

定義 7.2.7. $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し $v := w^{-1}w_n$ とおき, Schubert 多項式 $S_w \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ を

$$S_w := (-1)^{\ell(v)}\tau_v(x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1})$$

で定義する.

その性質をいくつか述べる.

補題 7.2.8. Schubert 多項式 S_w は次の性質をもつ.

(i) $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し, S_w は $\ell(w)$ 次の斉次多項式である.

(ii) $u, v \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $w = uv$ とおくと

$$(-1)^{\ell(v)}\tau_v \cdot S_w = \begin{cases} S_u & \text{if } \ell(w) = \ell(u) + \ell(v), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(iii) $m \le n$ に対し, w_m を $\mathfrak{S}_m$ の最長元とするとき,

$$S_{w_m} = x_1^{m-1}x_2^{m-2}\cdots x_{m-1}.$$

特に S_w は埋め込み $\mathfrak{S}_m \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ の下で不変である.

(iv) $\ell(v) \ge \ell(w)$ を満たす任意の $v, w \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $(-1)^{\ell(v)}\tau_v \cdot S_w = \delta_{vw}$ が成り立つ.

Proof. (i), (ii) は定義から明らか. (iii) は $\tau_{w_n} = \tau_{w_{n-1}}\tau_{n-1}\cdots\tau_2\tau_1$ より

$$\begin{aligned}\big((-\partial_{n-1})\cdots(-\partial_2)(-\partial_1)\big)\cdot(x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1}) \\ = x_1^{n-2}x_2^{n-3}\cdots x_{n-2}\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

から従う. これらを用い (iv) を示す. もし $\ell(v) > \ell(w)$ ならば, $\partial_v S_w$ は次数が負になるので, 0 になる. 一方 $\ell(v) = \ell(w)$ とすると, $\ell(w) = \ell(v) + \ell(wv^{-1})$ を満たすのは $v = w$ のときに限るため,

$$(-1)^{\ell(v)}\partial_v S_w = \begin{cases} S_1 = 1 & \text{if } v = w, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. □

補題 7.2.9. P_n は $\mathbb{S}_n$ 加群として有限生成かつ自由である. またその基底として Schubert 多項式 $\{S_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ が取れる.

Proof. まず S_w たちの一次独立性を示す. $f = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f_w S_w$ $(f_w \in \mathbb{S}_n)$ とおき, $f = 0$ となったとする. $w \in \mathfrak{S}_n$ とするとき, もし $\ell(v) > \ell(w)$ に対し $f_v = 0$ であれば

$$0 = \partial_w f = \sum_{\substack{v\in\mathfrak{S}_n \\ \ell(v)\le\ell(w)}} f_v(\partial_w S_v) = (-1)^{\ell(w)} f_w$$

となる. よって帰納的に任意の $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し $f_w = 0$ となる.

続いて P_n が S_w たちで生成されることを示す. $f \in P_n$ を勝手な多項式とする. $N = \ell(w_n) + 1$ とおき, 多項式の列 $f_N, f_{N-1}, \ldots, f_0 \in P_n$ を

$$f_N := f, \quad f_k := f_{k+1} - \sum_{\substack{w\in\mathfrak{S}_n \\ \ell(w)=k}} (-1)^{\ell(w)} (\partial_w f_{k+1}) S_w$$

で定める. 特に $f_0 = f_1 - f_1 = 0$ である. したがってここに現れる各係数 $\partial_w f_{\ell(w)+1}$ が $\mathbb{S}_n$ の元であれば, f が S_w たちの $\mathbb{S}_n$ 一次結合で書けたことになる. そこで, 任意の $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し $\ell(w) = k-1$ であれば $\partial_w f_k \in \mathbb{S}_n$ となることを, k について上から帰納法で示そう. これは $\ell(w) = k$ であれば $\partial_w f_k = 0$ を満たすことと同値である. まず $k = N$ では自明である. 次に $k+1$ でこれが正しいとすると, 補題 7.2.8 (iv) より $\ell(w) = k$ のとき

$$\partial_w f_k = \partial_w f_{k+1} - \sum_{\ell(v)=k} (-1)^{\ell(v)} (\partial_v f_{k+1})(\partial_w S_v) = \partial_w f_{k+1} - \partial_w f_{k+1} = 0$$

となる. これで命題が確かめられた. □

以上をまとめて, 次の定理を得る.

定理 7.2.10. R_n と $\mathbb{S}_n$ は森田同値である. すなわち, 圏同値 R_n-gMod $\simeq$ $\mathbb{S}_n$-gMod が

$$\begin{array}{rclcrcl} R_n\text{-gMod} & \longrightarrow & \mathbb{S}_n\text{-gMod}, & \qquad & \mathbb{S}_n\text{-gMod} & \longrightarrow & R_n\text{-gMod} \\ M & \longmapsto & b_n M, & & N & \longmapsto & P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} N \end{array}$$

で与えられる. さらに, この圏同値は R_n-gmod $\simeq$ $\mathbb{S}_n$-gmod と R_n-gproj $\simeq$ $\mathbb{S}_n$-gproj を誘導する.

これは次の一般的な定理から直ちに得られる．

定理 7.2.11. A を次数付環, $e \in A_0$ をその冪等元 (すなわち $e^2 = e$) とする．さらに

$$A = AeA$$

を仮定する．そのとき

$$\begin{aligned} A\text{-}\mathsf{gMod} &\longrightarrow (eAe)\text{-}\mathsf{gMod}, & (eAe)\text{-}\mathsf{gMod} &\longrightarrow A\text{-}\mathsf{gMod} \\ M &\longmapsto eM, & N &\longmapsto Ae \otimes_{eAe} N \end{aligned}$$

は互いに準逆 (quasi-inverse)[11]である．

Proof. 任意の $M \in A\text{-}\mathsf{gMod}$ に対して

$$eM \simeq eA \otimes_A M \tag{7.2.2}$$

となることは明らかである．従って

$$eA \otimes_A Ae \xrightarrow{\sim} eAe, \tag{7.2.3}$$

$$Ae \otimes_{eAe} eA \xrightarrow{\sim} A \tag{7.2.4}$$

をいうとよい．(7.2.3) は, (7.2.2) から従う．

掛け算がひきおこす A 両側加群の準同型 $\varphi\colon Ae \otimes_{eAe} eA \longrightarrow A$ が同型をいおう．仮定より，ある $n \geq 1$, $a_k, b_k \in A$ $(1 \leq k \leq n)$ があって $1 = \sum_{k=1}^n a_k e b_k$ を満たす．$\psi\colon A \to Ae \otimes_{eAe} eA$ を $\psi(x) = \sum_{k=1}^n x a_k e \otimes e b_k$ で定義する．φ と ψ が互いに逆であることを示せば良い．

$x, y \in A$ に対して,

$$\varphi\psi(x) = \varphi(\sum_{k=1}^n x a_k e \otimes e b_k) = \sum_{k=1}^n x a_k e b_k = x$$

であり,

$$\begin{aligned} \psi\varphi(xe \otimes ey) = \psi(xeey) &= \sum_{k=1}^n xeey a_k e \otimes e b_k \\ &= \sum_{k=1}^n xe \otimes (ey a_k e) e b_k = xe \otimes ey \end{aligned}$$

である． □

[11] $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ を圏とする．関手 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, $G\colon \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ が互いに準逆とは $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$, $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ となることである．

系 7.2.12. R_n 加群としての直和分解

$$R_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} P_n \tau_{w_n} S_w$$

が成り立つ．また右辺の直和成分は $P_n\big\langle\big(\ell(w_n) - \ell(w)\big)(\alpha_i, \alpha_i)\big\rangle$ と同型である．

Proof. 森田同値により $\mathbb{S}_n$-gproj に移して考える． $b_n R_n = \tau_{w_n} P_n$ に補題 7.2.9 を適用すればよい． □

7.3 単純加群

この節以降からは $\Bbbk$ を体とする． $x_1, \ldots, x_n$ の k 次基本対称式を e_k と表すと $e_1, \ldots, e_n$ は $\Bbbk$ 上代数的に独立で, $\mathbb{S}_n$ は多項式環 $\Bbbk[e_1, \ldots, e_n]$ と同型である．よって単純 $\mathbb{S}_n$ 加群の構造は簡単に分かる．

補題 7.3.1. 単純 $\mathbb{S}_n$ 加群は, 次数の差を除けば $e_1, \ldots, e_n$ が全て 0 で作用する 1 次元加群 $\Bbbk v$ のみである．また $\deg v = 0$ と定めると, $\Bbbk v$ の射影被覆は $\mathbb{S}_n$ 自身である．

Proof. $e_k \in \mathbb{S}_n$ をかける操作はいずれも次数を上げる．よって 0 でない任意の有限生成 $\mathbb{S}_n$ 加群 M に対し, $e_k M$ は真の部分 $\mathbb{S}_n$ 加群となる．特に M を単純加群とすると, $e_1, \ldots, e_n$ は全て 0 で作用する．よって M には $\mathbb{S}_n / \big(\sum_{k=1}^n \mathbb{S}_n e_k\big) \simeq \Bbbk$ が作用する．従って M が単純であることから $\dim_\Bbbk M = 1$ が従う．また $\mathbb{S}_n$ は $0, 1$ 以外の冪等元を持たないので直既約な射影的加群である．よって自然な全射 $\mathbb{S}_n \to \Bbbk v$ が $\Bbbk v$ の射影被覆を定める． □

$\mathbb{S}_n$ と R_n が森田同値であることから, 単純 R_n 加群も次数の差を除いて $P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v$ ただ 1 つしかない．またその射影被覆は $P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \mathbb{S}_n \simeq P_n$ である．この単純加群の表示は少々使いづらいので, 次のようにして別の定義を与える．

定義 7.3.2. 上と同様 $x_1, \ldots, x_n$ が全て 0 で作用する 1 次元 P_n 加群 $\Bbbk v_n$ を考える．ただしその次数を $\deg v_n = \ell(w_n)(\alpha_i, \alpha_i)$ と定める．これを用いて R_n 加群 L_n を $L_n := \mathrm{Ind}_{P_n}^{R_n} \Bbbk v_n = R_n \otimes_{P_n} \Bbbk v_n$ と定める．

命題 7.3.3. L_n, P_n は次の性質をもつ．

(i) $L_n \simeq P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v$ である．また $L_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \Bbbk \tau_w v_n$ である．

(ii) L_n は既約 R_n 加群である．逆に, 任意の既約 R_n 加群は, 次数のずれを除いて, L_n に同型である．

(iii) P_n は直既約射影 R_n 加群．逆に, 任意の直既約射影 R_n 加群は, 次数のずれを除いて, P_n に同型である．

(iv) L_n は絶対既約 $(\mathrm{End}_{R_n}(L_n) \simeq \Bbbk)$ である．

Proof. (i) $L_n = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \Bbbk \tau_w v_n$ は基底定理から従う．単純 R_n 加群は（同型と次数のずれを除いて）$P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v$ しかないので, $L_n \simeq P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v$ を言うには, 両者の次元が等しいことを言うと良い．補題 7.2.9 より $P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \Bbbk S_w v$ となるから,

$$\mathrm{qdim}_{\Bbbk} L_n = q_i^{\ell(w_n)} [n]_i! = \mathrm{qdim}_{\Bbbk}(P_n \otimes_{\mathbb{S}_n} \Bbbk v) \tag{7.3.1}$$

となる．

(ii), (iii), (iv) は, 補題 7.3.1 から従う． □

続いて, L_n の R_{n-1} 加群としての構造を調べる．

補題 7.3.4. L_n の部分 R_{n-1} 加群は下のいずれかのみである:

$$0 = x_n^n L_n \subsetneq x_n^{n-1} L_n \subsetneq \cdots \subsetneq x_n^2 L_n \subsetneq x_n L_n \subsetneq L_n.$$

特に R_{n-1} 加群としての L_n の head は $L_n / x_n L_n$, socle は $x_n^{n-1} L_n$ であり, どちらも単純である．

Proof. $\deg x_n > 0$ かつ L_n は有限次元なので, $x_n^{n_0} L_n = 0$ を満たす最小の $n_0 \geq 0$ をとれる．x_n を掛ける写像 $x_n^k L_n / x_n^{k+1} L_n \to x_n^{k+1} L_n / x_n^{k+2} L_n$ は全射 R_{n-1} 準同型なので, 次元に関する不等式

$$\begin{aligned}\dim_{\Bbbk}(L_n / x_n L_n) &\geq \dim_{\Bbbk}(x_n L_n / x_n^2 L_n) \\ &\geq \cdots \geq \dim_{\Bbbk} x_n^{n_0 - 1} L_n \geq \dim_{\Bbbk} L_{n-1} = (n-1)!\end{aligned}$$

が成り立つ．従って,

$$n! = \dim_{\Bbbk} L_n = \sum_{k=0}^{n_0 - 1} \dim_{\Bbbk} x_n^k L_n / x_n^{k+1} L_n \geq n_0 (n-1)!.$$

よって $n \geq n_0$ である．一方 $\tau_1\tau_2\ldots\tau_{n-1}x_n^{n-1}\tau_{w_n}v_n = \tau_{w_n}v_n \neq 0$ なので $x_n^{n-1}L_n \neq 0$ である．これより $n_0 \geq n$ であり，$n_0 = n$ かつ $0 \leq k < n$ に対し $\dim_{\Bbbk}(x_n^kL_n/x_n^{k+1}L_n) = (n-1)!$ でなければいけない．したがって $x_n^nL_n = 0$ であり $x_n^kL_n/x_n^{k+1}L_n$ $(0 \leq k < n)$ は全て既約 R_{n-1} 加群である．

従って，補題は次の補題 7.3.5 から従う．対称多項式 $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n$ は L_n に 0 で作用するので，$x_nu = -(x_1 + \cdots + x_{n-1})u$ が任意の $u \in L_n$ に対して成り立ち，下の条件 (a) が満たされることに注意しよう． □

補題 7.3.5. A を環，M を A 加群，f を A 加群 M の自己準同型，$n \in Z_{>0}$ とし，次の (a)–(c) を仮定する．

(a) 任意の $x \in M$ に対して，$f(x) = ax$ となるような $a \in A$ が存在する．

(b) $0 \leq k \leq n-1$ なら $f^k(M)/f^{k+1}(M)$ は既約 A 加群である．

(c) $f^n = 0$.

そのとき，M の部分 A 加群は $f^k(M)$ $(0 \leq k \leq n)$ に限る．特に，M の head は $M/f(M)$，socle は $f^{n-1}(M)$ であり，どちらも既約である．

Proof. 部分 A 加群 $N \subset M$ に対し，$p(N) \geq 0$ を $f^{p(N)}(M) \subset N$ をみたす最小の数とする．$p(N) \leq n$ である．各 $k \geq 0$ について，$p(N) = k$ を満たす $N \subset M$ は $f^k(M)$ しかないことを k に関する帰納法で証明する．

まず $k = 0$ のときは自明である．そこで $k > 0$ とし，$N \subset M$ が $p(N) = k$ を満たすとしよう．部分 A 加群 $L \subset M$ を

$$L = f^{-1}(N) := \{y \in M \mid f(y) \in N\}$$

とおく．すると定義から明らかに $p(L) = k-1$ であるので，帰納法の仮定より $L = f^{k-1}(M)$ である．一方 (a) より $f(N) \subset AN \subset N$ なので，$N \subset L$ となる．これより $f^k(M) \subset N \subsetneq f^{k-1}(M)$ が成り立つので，$f^{k-1}(M)/f^k(M)$ の既約性から $M = f^k(M)$ が従う． □

補題 7.3.6. A を $\Bbbk$ 代数とする．S が既約 A 加群なら $S \otimes_{\Bbbk} L_n$ は既約 $A \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群である．逆に，M が 既約 $A \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群なら，ある既約 A 加群 S が存在して，$M \simeq S \otimes_{\Bbbk} L_n$ となる．

Proof. これは，既約 R_n 加群が次数のずれを除いて L_n に限ることと，絶対既約性 $\mathrm{End}_{R_n}(L_n) \simeq \Bbbk$ から明らかである． □

補題 7.3.7. A を $\Bbbk$ 代数, S を既約 A 加群とする．そのとき $S \otimes_{\Bbbk} L_n$ の $A \otimes_{\Bbbk} R_{n-1}$ 部分加群は $S \otimes_{\Bbbk} x_n^k L_n$ $(0 \le k \le n)$ に限る．特に $A \otimes_{\Bbbk} R_{n-1}$ 加群としての $S \otimes_{\Bbbk} L_n$ の head は $S \otimes_{\Bbbk} (L_n/x_n L_n)$, socle は $S \otimes_{\Bbbk} x_n^{n-1} L_n$ であり, どちらも単純である．

Proof. 補題 7.3.6 と補題 7.3.5 を用いれば, 補題 7.3.4 から容易に導かれる． □

7.4 nilHecke 代数と KLR 代数

この節からは一般のルート系をとる．従って, $i \in I$, $l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $R(l\alpha_i)$ は nilHecke 代数となる．多項式表現の次数を

$$d_l(i) := \ell(w_l)\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2} = \frac{l(l-1)}{2}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2} = -\frac{1}{2}\deg \tau_{w_l} e(i^l) \tag{7.4.1}$$

だけ下げたものを

$$P(i^l) := P_l\langle d_l(i)\rangle \simeq \frac{R(l\alpha_i)\langle d_l(i)\rangle}{\sum_{k=1}^{l-1} R(l\alpha_i)\langle d_l(i)\rangle \tau_k},$$

その既約な head を

$$L(i^l) := L_l\langle d_l(i)\rangle \simeq \frac{R(l\alpha_i)\langle -d_l(i)\rangle}{\sum_{k=1}^{l} R(l\alpha_i)\langle -d_l(i)\rangle x_k},$$

と書こう．この次数のずらしによって, 次の命題 7.4.1 でみるように $P(i^l)$, $L(i^l)$ は自己双対となる．

次章ではこれらの $R(l\alpha_i)$ 加群を用いて量子群の categorification を定義する．そこで必要となる命題をまとめておこう．

命題 7.4.1. $R(l\alpha_i)$ 加群 M に対し, 作用を anti-involution ψ (補題 2.1.4 参照) でひねった右 $R(l\alpha_i)$ 加群を M^ψ と表す．このとき次が成立する．

(i) $L(i^l) \circ L(i) \simeq L(i^{l+1})\langle l(\alpha_i,\alpha_i)/2\rangle$.

(ii) $\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}{}_{\Bbbk}\big(L(i^l), \Bbbk\big) \simeq L(i^l)^\psi$.

(iii) $\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}{}_{R(l\alpha_i)}\big(P(i^l), R(l\alpha_i)\big) \simeq P(i^l)^\psi$.

(iv) $P(i^l)^\psi \otimes_{R(l\alpha_i)} L(i^l) \simeq \Bbbk$.

(v) $R(l\alpha_i) \simeq [l]_i! P(i^l)$. ここに $[l]_i!$ は関手

$$[l]_i! := [1]_i[2]_i \cdots [l]_i, \quad [l]_i M := \bigoplus_{k=0}^{l-1} M\langle (k-(l-1)/2)(\alpha_i, \alpha_i)\rangle$$

である.

Proof. (i) $L_m \circ L_n \simeq L_{m+n}$ なので (i) を得る.

(ii) $q_i = q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$ として, $P_n = \Bbbk[x_1, \ldots, x_l]$, $\mathbb{S} = \Bbbk[e_1, \cdots, e_l]$ より

$$\begin{aligned}\operatorname{qdim} P_l &= (1-q_i^2)^{-l} \\ \operatorname{qdim} \mathbb{S}_l &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{l}(1-q_i^{2k})}\end{aligned}$$

である. したがって, $L_l \simeq P_l \otimes_{\mathbb{S}_l} \Bbbk$ より $\operatorname{qdim} L_i = \dfrac{\operatorname{qdim} P_l}{\operatorname{qdim} \mathbb{S}_l} = q_i^{l(l-1)/2}[l]_i!$ である. これから

$$\operatorname{qdim} L(i^l) = [l]_i!$$

となる. よって $\operatorname{qdim}\Big(\mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(L(i^l), \Bbbk\big)\Big) = \operatorname{qdim} L(i^l)$ である. 一方, $\mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(L(i^l), \Bbbk\big)^{\psi}$ も $L(i^l)$ も単純 $R(l\alpha_i)$ 加群で, 単純 $R(l\alpha_i)$ 加群の同型類は次数を除いて唯一なので, (ii) を得る.

(iii) 系 5.6.2 によって $\mathrm{Hom^{gr}}_{R(l\alpha_i)}\big(P(i^l), R(l\alpha_i)\big)$ は, $\mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}\big(L(i^l), \Bbbk\big)$ の射影被覆である. 従って, (ii) より (iii) が導かれる.

(iv) は (iii) と $\mathrm{Hom^{gr}}_{R(l\alpha_i)}\big(P(i^l), L(i^l)\big) \simeq \Bbbk$ より従う.

また, 次のように直接に証明もできる. $P_l = R_l b_l$ と $b_l^2 = b_l$ (補題 7.2.1 (ii)) より $\mathrm{Hom^{gr}}_{R_l}(P_l, R_l) \simeq b_l R_l$ である. 補題 7.2.1 (iii) をもちいれば $b_l R_l = \tau_{w_l} R_l$ である. $\psi(w_l) = w_l$ だから,

$$\mathrm{Hom^{gr}}_{R_l}(P_l, R_l)^{\psi} \simeq (\tau_{w_l} R_l)^{\psi} \simeq R_l \tau_{w_l}$$

となる. 一方, $x_2 \cdots x_n^{n-1}$ を右から掛けることにより得られる写像 $a\tau_{w_l} \mapsto (a\tau_{w_l})(x_2 \cdots x_n^{n-1}) = ab_l$ は, 同型 $R_l \tau_{w_l} \xrightarrow{\sim} R_l b_l \langle \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_i, \alpha_i)\rangle$ を与える. よって, $\mathrm{Hom^{gr}}_{R_l}(P_l, R_l)^{\psi} \simeq P_l\langle \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_i, \alpha_i)\rangle$ となり (iv) を得る.

(v) $R(l\alpha_i) \simeq \mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}{}_{\mathbb{S}_l}(P(i^l), P(i^l))$ より,

$$\mathrm{qdim}\, R(l\alpha_i) = (\mathrm{qdim}\, P(i^l))\Big(\frac{\mathrm{qdim}\, P(i^l)}{\mathrm{qdim}\, \mathbb{S}_l}\Big)^-$$

である．ここに $f(q)^- = f(q^{-1})$ である．

$$\frac{\mathrm{qdim}\, P(i^l)}{\mathrm{qdim}\, \mathbb{S}_l} = \frac{q_i^{-l(l-1)/2} \prod_{k=1}^{l}(1-q_i^{2k})}{(1-q_i^2)^l} = [l]_i!$$

とあわせて, $\mathrm{qdim}\, R(l\alpha_i) = \mathrm{qdim}\big([l]_i! P(i^l)\big)$ を得る．$R(l\alpha_i)$, $[l]_i! P(i^l)$ はともに有限生成射影 $R(l\alpha_i)$ 加群で, 直既約射影 $R(l\alpha_i)$ 加群の同型類は次数を除いて唯一なので, (v) を得る．

□

8章　量子群の categorification

全ての準備が整ったので, いよいよ主定理の証明を行う．引き続き $\Bbbk$ を体とし, ルート系などに関する記号はこれまでのものを踏襲し, KLR 代数は, ルート系に付随したものとする．即ち, $Q_{ij}(u,v)$ は (4.2.1) を満たすものと仮定する．

8.1　関手の定義

全ての $\beta \in \mathsf{Q}_+$ にわたる Grothendieck 群の直和

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\big(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\big)$$

を考える．この節ではまず, この加群の上に作用素 e_i', f_i $(i \in I)$ を定義する．これらの作用素は, Grothendieck 群を取る前の圏のレベルで構成することができる．それには前章で構成した nilHecke 代数 $R(l\alpha_i)$ の表現 $P(i^l)$ と $L(i^l)$ を用いる．

ここで $\beta \in \mathsf{Q}_+$, $l \geq 0$ とする． さらに $\beta - l\alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ と仮定する．$R(\beta - l\alpha_i) \circ P(i^l)$ は $R(\beta - l\alpha_i)$ 自身の右 $R(\beta - l\alpha_i)$ 加群構造を使うことで $\big(R(\beta), R(\beta - l\alpha_i)\big)$ 双加群になる．KLR 代数の anti-involution ψ (補題 2.1.4) でこの作用をひねったものを $\big(R(\beta - l\alpha_i) \circ P(i^l)\big)^\psi$ と書くと, これは $\big(R(\beta - l\alpha_i), R(\beta)\big)$ 双加群である．

定義 8.1.1. 関手 $E_i^{(l)}$ を

$$\begin{aligned} E_i^{(l)}\colon R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod} &\longrightarrow R(\beta-l\alpha_i)\text{-}\mathsf{gmod} \\ M &\longmapsto \big(R(\beta-l\alpha_i)\circ P(i^l)\big)^{\psi}\otimes_{R(\beta)} M \end{aligned}$$

で定義する. $l=1$ の時は単に $E_i:=E_i^{(1)}$ と書く.

$R(\beta)$ 加群 $R(\beta-l\alpha_i)\circ P(i^l)$ は射影的なので特に平坦であり, したがって関手 $E_i^{(l)}$ は完全関手である. よって $E_i^{(l)}$ は Grothendieck 群の間の写像 $e_i'^{(l)}\colon K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod})\to K(R(\beta-l\alpha_i)\text{-}\mathsf{gmod})$ を誘導する. $E_i^{(l)}$ は次数シフトと可換なので, $e_i'^{(l)}$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 準同型である.

合成積の定義と自然な同型 $\psi\colon R(\beta)^{\mathrm{op}}\simeq R(\beta)$ を用いると, M を $R(\beta-l\alpha_i)\otimes_{\Bbbk}R(l\alpha_i)$ 加群に制限して

$$E_i^{(l)}M\simeq\big(R(\beta-l\alpha_i)\otimes_{\Bbbk}P(i^l)^{\psi}\big)\otimes_{R(\beta-l\alpha_i)\otimes_{\Bbbk}R(l\alpha_i)}M \tag{8.1.1}$$

とも書ける. これから特に E_i の別の表示が導かれる.

$$n:=\mathrm{ht}(\beta),\qquad e(n-1,i):=\sum_{\nu\in I^n,\,\nu_n=i}e(\nu)$$

とおくと, $P(i)=R(\alpha_i)=R_1e(i)$ なので,

$$\big(R(\beta-\alpha_i)\circ P(i)\big)^{\psi}=e(n-1,i)R(\beta)$$

である. よって左 $R(\beta-\alpha_i)$ 加群として

$$E_iM\simeq e(n-1,i)M$$

となる.

記号 $E_i^{(l)}$ は divided power を連想させるが, 実際にそうなっていることを確認しておく.

補題 8.1.2. 関手の自然同値

$$[l]_i!E_i^{(l)}\simeq E_i^l\ :\ R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\to R(\beta-l\alpha_i)\text{-}\mathsf{gmod}$$

が成り立つ (記号については命題 7.4.1 参照). 特に Grothendieck 群に移行すると, $\bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+}K\big(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\big)$ 上の作用素として $[l]_i!E_i^{(l)}=E_i^l$ が成り立つ.

Proof.

$$e(n-l, i^l) := \sum_{\nu \in I^n, \nu_{l+1} = \cdots = \nu_n = i} e(\nu)$$

とおくと, $E_i M = e(n-1, i)M$ を繰り返し適用することで

$$E_i^l M = e(n-l, i^l)M \simeq \bigl(R(\beta - l\alpha_i) \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)\bigr) \otimes_{R(\beta - l\alpha_i) \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)} M$$

を得る. 命題 7.4.1 より $R(l\alpha_i)$ 加群として $R(l\alpha_i) \simeq [l]_i! P(i^l)$ なので, 上の表示と (8.1.1) を見比べて望む結論を得る. □

続いて関手 F_i' を, 単純 $R(\alpha_i)$ 加群 $L(i)$ を用いて

$$\begin{aligned} F_i' \colon R(\beta)\text{-gmod} &\longrightarrow R(\beta + \alpha_i)\text{-gmod} \\ M &\longmapsto M \circ L(i) \end{aligned}$$

で定義する. 命題 2.7.5 で示した通り, 合成積 $\circ$ は完全関手である. よって関手 F_i' は完全で, Grothendieck 群の間の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 準同型

$$f_i \colon K\bigl(R(\beta)\text{-gmod}\bigr) \to K\bigl(R(\beta + \alpha_i)\text{-gmod}\bigr)$$

を誘導する.

我々の最初の目標は次の定理である.

定理 8.1.3. 以上で定義した作用素 e_i', f_i $(i \in I)$ により,

$$\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} \mathbb{Q}(q) \underset{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}{\otimes} K\bigl(R(\beta)\text{-gmod}\bigr)$$

は Q_--ウェイト $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群となる. また $R_0 \simeq \Bbbk$ の自然な 1 次元表現を $\Bbbk$ と書くとき, $[\Bbbk] \in K(R_0\text{-gmod})$ を $1^* \in U_q^-(\mathfrak{g})_0^*$ に写す $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群の同型

$$\mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\bigl(R(\beta)\text{-gmod}\bigr) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})^*$$

が存在する.

必要な命題の証明は後に回して, 証明の粗筋を述べよう. まず e_i', f_i たちが q-Boson 関係式を満たすことを確認する (定理 8.2.3). これにより上記の空間に Q_--ウェイト $\mathcal{B}'(\mathfrak{g})$ 加群の構造が定まる. 次に e_i' たちが q-Serre 関係式を満たすことを証明し (定理 8.3.3), 最後に全ての e_i' で消される元は $[\Bbbk]$ の定数倍に限られることを示す (系 8.4.12). よって定理 6.4.8 が適用でき, 上の同型が得られる.

8.2　q-Boson 関係式

まずは関手から誘導された準同型 e'_i, f_i が q-Boson 関係式を満たすことを確かめる.

命題 8.2.1. R_n は次の分解をもつ.

(i) $R_{n+1} = R_n\tau_n R_n \oplus (R_n \boxtimes R_1)$ である.

(ii) また次数付きを除いて, 両側 R_n 加群としての準同型

$$R_n \otimes_{R_{n-1}} R_n \longrightarrow R_n\tau_n R_n, \quad (a \otimes b \mapsto a\tau_n b)$$

は同型である.

Proof. (ii) の写像は, τ_n が任意の R_{n-1} の元と交換するので, well-defined である.

さて KLR 代数の基底定理から, 右 R_n 加群としての同型

$$R_{n+1} = \bigoplus_{k=1}^{n+1} \tau_k \cdots \tau_{n-1}\tau_n \Bbbk[x_{n+1}]^{\oplus I} R_n$$

が成り立つ. この右辺の表示のもと, $R_n \boxtimes R_1 = \Bbbk[x_{n+1}]^{\oplus I} R_n$ である. 従って,

$$\frac{R_{n+1}}{R_n \boxtimes R_1} \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} \tau_k \cdots \tau_{n-1}\tau_n \Bbbk[x_{n+1}]^{\oplus I} R_n$$

となる.

一方

$$\begin{aligned} R_n \otimes_{R_{n-1}} R_n &\simeq \bigoplus_{k=1}^{n} \tau_k \cdots \tau_{n-1} \Bbbk[x_n]^{\oplus I} R_{n-1} \otimes_{R_{n-1}} R_n \\ &\simeq \bigoplus_{k=1}^{n} \tau_k \cdots \tau_{n-1} \Bbbk[x_n]^{\oplus I} \otimes R_n \end{aligned}$$

であり, これは上記の写像で

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \tau_k \cdots \tau_{n-1} \Bbbk[x_n]^{\oplus I} \tau_n R_n \subset R_{n+1}$$

に送られる.

$1 \leq k \leq n$ となる k と任意の $a(x_n) \in \Bbbk[x_n]$ に対して

$$\tau_k \cdots \tau_{n-1} a(x_n) \tau_n \equiv \tau_k \cdots \tau_{n-1} \tau_n a(x_{n+1}) \mod \tau_k \cdots \tau_{n-1} \Bbbk[x_n, x_{n+1}]$$

かつ $\tau_k \cdots \tau_{n-1} \Bbbk[x_n, x_{n+1}] \subset R_n \boxtimes R_1$ なので $R_n \otimes_{R_{n-1}} R_n \to \dfrac{R_{n+1}}{R_n \boxtimes R_1}$ は同型となる．従って, (i) と (ii) が得られた. □

系 8.2.2. $e(n-1, i, j) = \sum_{\nu \in I^{n+1}, \nu_n = i, \nu_{n+1} = j} e(\nu)$ とおくと,

$$e(n, i) R_{n+1} e(n, j) = \begin{cases} R_n \tau_n e(n-1, i, j) R_n & \text{if } i \neq j, \\ R_n \tau_n e(n-1, i, j) R_n \oplus \big(R_n \boxtimes R(\alpha_i)\big) & \text{if } i = j \end{cases}$$

である．また次数付き両側 R_n 加群として同型

$$R_n e(n-1, j) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1, i) R_n \simeq (R_n \tau_n e(n-1, i, j) R_n) \langle -(\alpha_i, \alpha_j) \rangle$$

が成り立つ.

Proof. 最後の同型が次数を保つこと以外は命題 8.2.1 より直ちに従う．この同型射は

$$\begin{aligned} R_n e(n-1, j) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1, i) R_n \to R_n \tau_n e(n-1, i, j) R_n, \\ x \otimes y \mapsto x \tau_n y = x \tau_n e(n-1, i, j) y \end{aligned}$$

として定義されており, 次数を $\deg \tau_n e(n-1, i, j) = -(\alpha_i, \alpha_j)$ だけ動かす．よって次数付けを込めて上の同型が成立する. □

この命題より次が従う.

定理 8.2.3. 関手 E_i, F'_i はつぎの交換関係をもつ.

(i) $i \neq j$ のとき関手の自然同値 $E_i F'_j \simeq F'_j E_i \langle (\alpha_i, \alpha_j) \rangle$ が成り立つ.

(ii) 自然変換による関手の短完全列

$$0 \to \mathrm{Id} \to E_i F'_i \to F'_i E_i \langle (\alpha_i, \alpha_i) \rangle \to 0$$

が存在する.

特に, e'_i, f_i は q-Boson 関係式を満たす.

Proof. R_n 加群 M に対し,

$$\text{(8.2.1a)} \qquad E_iF_j'M = e(n,i)\big(M \circ L(j)\big) \simeq e(n,i)R_{n+1}e(n,j) \underset{R_n\otimes_{\Bbbk}R(\alpha_j)}{\otimes} \big(M \otimes_{\Bbbk} L(j)\big),$$

(8.2.1b)

$$\begin{aligned} F_j'E_iM &= R_ne(n-1,j) \underset{R_{n-1}\underset{\Bbbk}{\otimes}R(\alpha_j)}{\otimes} \Big(\big(e(n-1,i)R_n \underset{R_n}{\otimes} M\big) \underset{\Bbbk}{\otimes} L(j)\Big) \\ &\simeq \Big(R_ne(n-1,j) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1,i)R_n\Big) \underset{R_n\otimes R(\alpha_j)}{\otimes} \big(M \otimes L(j)\big) \end{aligned}$$

である.

(i) $i \neq j$ のとき： 系 8.2.2 より

$$e(n,i)R_{n+1}e(n,j) \simeq \Big(R_ne(n-1,j) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1,i)R_n\Big)\langle(\alpha_i,\alpha_j)\rangle$$

が従う. これと (8.2.1a),(8.2.1b) より (i) が従う.

(ii) $i = j$ のとき：

$$e(n,i)R_{n+1}e(n,i) = R_n\tau_ne(n-1,i,i)R_n \oplus \big(R_n \boxtimes R(\alpha_i)\big)$$

である. これは $(R_n, R_n \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i))$ 両側加群としての等式ではないが, $e(n,i)R_{n+1}e(n,i)$ は $R_n \boxtimes R(\alpha_i)$ を部分 $(R_n, R_n \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i))$ 両側加群として含み,

$$\begin{array}{c} 0 \to R_n \boxtimes R(\alpha_i) \to e(n,i)R_{n+1}e(n,i) \to R_n\tau_ne(n-1,i,i)R_n \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr\!\uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big(R_ne(n-1,i) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1,i)R_n\Big)\langle(\alpha_i,\alpha_i)\rangle \end{array}$$

という $(R_n, R_n \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i))$ 両側加群としての完全列がある. この各項は $R_n \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i)$ 加群として平坦であるから, 関手 $\bullet \otimes_{R_n\otimes_{\Bbbk}R(\alpha_i)} \big(M \otimes_{\Bbbk} L(\alpha_i)\big)$ を施して, R_n 加群の完全列

$$\begin{aligned} 0 &\to \big(R_n \otimes R(\alpha_i)\big) \underset{R_n\otimes R(\alpha_i)}{\otimes} \big(M \otimes L(\alpha_i)\big) \\ &\to e(n,i)R_{n+1}e(n,i) \underset{R_n\otimes R(\alpha_i)}{\otimes} \big(M \otimes_{\Bbbk} L(\alpha_i)\big) \\ &\to \Big(R_ne(n-1,i) \otimes_{R_{n-1}} e(n-1,i)R_n\Big)\langle(\alpha_i,\alpha_i)\rangle \underset{R_n\otimes R(\alpha_i)}{\otimes} \big(M \otimes L(\alpha_i)\big) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

を得る. R_n 加群として, 第 1 項は M に同型, 第 2 項は $E_iF_i'M$ に同型, 第 3 項は $F_i'E_iM\langle(\alpha_i,\alpha_i)\rangle$ に同型なので求める完全列が得られた. □

8.3 q-Serre 関係式

続いて e'_i たちが q-Serre 関係式を満たすことを示そう.

定義 8.3.1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $w = s_{k_1} \cdots s_{k_l} \in \mathfrak{S}_n$ (最短表示) と $i \in I$ に対し, $\tau_w(i) := \tau_{k_1} \cdots \tau_{k_l} e(i^n) \in R(n\alpha_i)$ は well-defined である. そこで定義 7.2.1 における定義と同様に $b_n(i) := \tau_{w_n}(i) x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ とおく. $i, j \in I$ $(i \neq j)$ と $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $\alpha^+_{k,k'}(i,j)$, $\alpha^-_{k,k'}(i,j) \in R\bigl((k+k')\alpha_i + \alpha_j\bigr)$ を

$$\begin{aligned}
\alpha^+_{k,k'}(i,j) &:= \tau_{k+k'} \cdots \tau_{k+2}\tau_{k+1}\bigl(b_{k+1}(i) \boxtimes e(j) \boxtimes b_{k'-1}(i)\bigr),\\
\alpha^-_{k,k'}(i,j) &:= \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k\bigl(b_{k-1}(i) \boxtimes e(j) \boxtimes b_{k'+1}(i)\bigr)
\end{aligned}$$

で与える. 但し, 上の $\alpha^\pm_{k,k'}(i,j)$ の定義中に負の添字 s をもつ $b_s(i)$ が現れたときは, $\alpha^\pm_{k,k'}(i,j) = 0$ とする.

$$\alpha^\pm_{k,k'}(i,j) = \bigl((e(i^k) \boxtimes e(j) \boxtimes e(i^{k'})\bigr)\alpha^\pm_{k,k'}(i,j)$$

となることに注意しよう.

補題 8.3.2. $i, j \in I$, $i \neq j$ とする. $\alpha^\pm_{k,k'} := \alpha^\pm_{k,k'}(i,j)$ に対し以下の等式が成り立つ.

(i) $\bigl(b_k(i) \boxtimes e(j) \boxtimes b_{k'}(i)\bigr)\alpha^\pm_{k,k'} = \alpha^\pm_{k,k'}$.

(ii) $\alpha^+_{k,k'}\alpha^+_{k+1,k'-1} = 0$, $\alpha^-_{k,k'}\alpha^-_{k-1,k'+1} = 0$.

(iii) $k + k' = 1 - \langle h_i, \alpha_j\rangle$ を満たすとき, $\alpha^+_{k,k'}\alpha^-_{k+1,k'-1} - \alpha^-_{k,k'}\alpha^+_{k-1,k'+1} \in \Bbbk^\times\bigl(b_k(i) \otimes e(j) \otimes b_{k'}(i)\bigr)$.

Proof. 以下 $b_n = b_n(i)$ と略して書く.

(i) $\bigl(b_k \boxtimes e(j) \boxtimes b_{k'}\bigr)\alpha^+_{k,k'} = \alpha^+_{k,k'}$ を言おう. $\bigl(b_k \boxtimes e(i)\bigr)b_{k+1} = b_{k+1}$ (補題 7.2.2 (v)) より $\bigl(b_k \boxtimes e(j) \boxtimes e(i^{k'})\bigr)\alpha^+_{k,k'} = \alpha^+_{k,k'}$ が成り立つ. よって, $\bigl(e(i^k) \boxtimes e(j) \boxtimes b_{k'}\bigr)\alpha^+_{k,k'} = \alpha^+_{k,k'}$ をいうとよい. 定義により

$$\begin{aligned}
\alpha^+_{k,k'} &= \tau_{k+k'} \cdots \tau_{k+2} \\
&\quad \cdot \bigl(e(i^k) \boxtimes e(j) \boxtimes e(i) \boxtimes b_{k'-1}\bigr)\tau_{k+1}\bigl(b_{k+1} \boxtimes e(j) \boxtimes e(i^{k'-1})\bigr)\\
&= \Bigl(e(i^k) \boxtimes e(j) \boxtimes \tau_{k'-1} \cdots \tau_1\bigl(e(i) \boxtimes b_{k'-1}\bigr)\Bigr)\\
&\qquad\qquad \cdot \tau_{k+1}\bigl(b_{k+1} \boxtimes e(j) \boxtimes e(i^{k'-1})\bigr)
\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

となる．従って

$$\big(e(i^k)\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'}\big)\alpha^+_{k,k'}=\Big(e(i^k)\boxtimes e(j)\boxtimes\big(b_{k'}\tau_{k'-1}\cdots\tau_1\big(e(i)\boxtimes b_{k'-1}\big)\Big)$$
$$\cdot\tau_{k+1}\big(b_{k+1}\boxtimes e(j)\boxtimes e(i^{k'-1})\big)$$

である．一方 補題 7.2.2 (vii) より

$$b_{k'}\tau_{k'-1}\cdots\tau_1\big(e(i)\boxtimes b_{k'-1}\big)=\tau_{k'-1}\cdots\tau_1\big(e(i)\boxtimes b_{k'-1}\big)$$

故，$\big(e(i^k)\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'}\big)\alpha^+_{k,k'}=\alpha^+_{k,k'}$ となる．

$\big(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'}\big)\alpha^-_{k,k'}=\alpha^-_{k,k'}$ も，

$$\begin{aligned}&b_k\tau_1\cdots\tau_{k-1}\big(b_{k-1}\boxtimes e(i)\big)=\tau_1\cdots\tau_{k-1}\big(b_{k-1}\boxtimes e(i)\big),\\&\big(e(i)\boxtimes b_{k'}\big)b_{k'+1}=b_{k'+1}\end{aligned}$$

をもちいて同様に証明できる．

(ii) (a) $\alpha^+_{k,k'}\alpha^+_{k+1,k'-1}=0$ を証明しよう．$k\geq 0$, $k'\geq 2$ としてよい．

(i) をもちいて

$$\begin{aligned}\alpha^+_{k,k'}\alpha^+_{k+1,k'-1}&=\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+1}\big(b_{k+1}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'-1}\big)\cdot\alpha^+_{k+1,k'-1}\\&=\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+1}\cdot\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+2}\big(b_{k+2}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'-2}\big)\end{aligned}$$

となる．一方，$w=(s_{k'}\cdots s_1)\cdot(s_{k'}\cdots s_2)=(s_{k'-1}\cdots s_1)\cdot(s_{k'}\cdots s_1)s_k$ はともに最短表示で，$w(3)=1$ を満たすので，補題 2.5.3 より

$$\begin{aligned}&\tau_{k'}\cdots\tau_1\cdot\tau_{k'}\cdots\tau_2\big(e(i^2)\boxtimes e(j)\boxtimes e(i^{k'-2})\big)\\&\quad=\tau_{k'-1}\cdots\tau_1\cdot\tau_{k'}\cdots\tau_1\big(e(i^2)\boxtimes e(j)\boxtimes e(i^{k'-2})\big)\in R_{k'+1}\end{aligned}$$

である．

よって $\tau_{k+1}b_{k+2}=0$ より

$$\begin{aligned}\alpha^+_{k,k'}\alpha^+_{k+1,k'-1}&=\tau_{k+k'-1}\cdots\tau_{k+1}\cdot\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+1}\big(b_{k+2}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'-2}\big)\\&=\tau_{k+k'-1}\cdots\tau_{k+1}\cdot\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+2}\big(\tau_{k+1}b_{k+2}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'-2}\big)\\&=0\end{aligned}$$

となる．

(b) $\alpha^-_{k,k'}\alpha^-_{k-1,k'+1}=0$ の証明も同様である. (i) をもちいて

$$\begin{aligned}\alpha^-_{k,k'}\alpha^-_{k-1,k'+1} &= \tau_1\tau_2\cdots\tau_k\big(b_{k-1}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'+1}\big)\cdot\alpha^-_{k-1,k'+1}\\ &= \tau_1\tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1}(b_{k-2}\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'+2})\end{aligned}$$

となる. 一方, 最短表示 $w=(s_1\cdots s_k)\cdot(s_1\cdots s_{k-1})=(s_2\cdots s_k)\cdot(s_1\cdots s_k)$ は $w(k-1)=k+1$ を満たすので補題 2.5.3 より

$$\begin{aligned}&\tau_1\tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1}(e(i^{k-2})\boxtimes e(j)\boxtimes e(i^2))\\ &\quad=\tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_1\cdots\tau_k(e(i^{k-2})\boxtimes e(j)\boxtimes e(i^2))\in R_{k+1}\end{aligned}$$

である.

よって $\tau_1 b_{k'+2}=0$ より

$$\begin{aligned}\alpha^-_{k,k'}\alpha^-_{k-1,k'+1} &= \tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1}\tau_k(b_{k-2}\otimes e(j)\otimes b_{k'+2})\\ &= \tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1}(b_{k-2}\otimes e(j)\otimes \tau_1 b_{k'+2})=0\end{aligned}$$

となる.

(iii) まず $k,k'\geq 1$ のときを考える. (ii) と同様に計算すると,

$$\begin{aligned}\alpha^+_{k,k'}\alpha^-_{k+1,k'-1} &= (\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+2}\tau_{k+1})\cdot(\tau_1\cdots\tau_k\tau_{k+1})(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\\ &= (\tau_1\cdots\tau_{k-1})\cdot(\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+2})\cdot\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^-_{k,k'}\alpha^+_{k-1,k'+1} &= (\tau_1\tau_2\cdots\tau_k)\cdot(\tau_{k+k'}\cdots\tau_k)(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\\ &= (\tau_1\cdots\tau_{k-1})\cdot(\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+2})\cdot\tau_k\tau_{k+1}\tau_k(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\end{aligned}$$

となる. $(\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}-\tau_k\tau_{k+1}\tau_k)e(i^k,j,i^{k'})=\overline{Q}_{ij}(x_k,x_{k+1},x_{k+2})e(i^k,j,i^{k'})$ より

$$\begin{aligned}&\alpha^+_{k,k'}\alpha^-_{k+1,k'-1}-\alpha^-_{k,k'}\alpha^+_{k-1,k'+1}\\ &=\tau_1\tau_2\cdots\tau_{k-1}\cdot\tau_{k+k'}\cdots\tau_{k+3}\tau_{k+2}\overline{Q}_{ij}(x_k,x_{k+1},x_{k+2})(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\\ &=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{k-1}\cdot\partial_{k+k'}\cdots\partial_{k+3}\partial_{k+2}\overline{Q}_{ij}(x_k,x_{k+1},x_{k+2})(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})\end{aligned}$$

である. ここで $Q_{ij}(u,v)$ の u について最高次の項が $tu^{k+k'-1}$ $(t\in\Bbbk^\times)$ であったことを思い出すと,

$$\overline{Q}_{ij}(x_k,x_{k+1},x_{k+2})-\sum_{l+l'=k+k'-2}tx_k^l x_{k+2}^{l'}\in\sum_{l+l'\leq k+k'-3}\Bbbk[x_{k+1}]x_k^l x_{k+2}^{l'}$$

となる．一方，$\Bbbk[x_{k+1}]x_k^l x_{k+2}^{l'}$ $(l+l' \le k+k'-3)$ は，$\partial_1\partial_2\cdots\partial_{k-1}\cdot\partial_{k+k'}\cdots\partial_{k+3}\partial_{k+2}$ を施すと消えるので，

$$
\begin{aligned}
&\partial_1\partial_2\cdots\partial_{k-1}\cdot\partial_{k+k'}\cdots\partial_{k+3}\partial_{k+2}\overline{Q}_{ij}(x_k,x_{k+1},x_{k+2})\\
&=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{k-1}\cdot\partial_{k+k'}\cdots\partial_{k+3}\partial_{k+2}\Bigl(\sum_{l+l'=k+k'-2} t x_k^l x_{k+2}^{l'}\Bigr)\\
&=(-1)^{k'-1}t\in\Bbbk^\times
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\alpha^+_{k,k'}\alpha^-_{k+1,k'-1}-\alpha^-_{k,k'}\alpha^+_{k-1,k'+1}=(-1)^{k'-1}t(b_k\boxtimes e(j)\boxtimes b_{k'})
$$

である．また $k'=0$ のときは

$$
\begin{aligned}
\alpha^-_{k,0}\alpha^+_{k-1,1}&=\tau_1\tau_2\cdots\tau_k\cdot\tau_k\bigl(b_k\boxtimes e(j)\bigr)\\
&=\partial_1\partial_2\cdots\partial_{k-1}Q_{ij}(x_k,x_{k+1})\bigl(b_k\boxtimes e(j)\bigr)\\
&=t\bigl(b_k\boxtimes e(j)\bigr)
\end{aligned}
$$

となるため求める値は上と同じ結果になる．$k=0$ のときも同様である．これで命題が証明できた． □

定理 8.3.3. $i,j\in I$, $i\neq j$ とし，$b:=1-\langle h_i,\alpha_j\rangle$ とおく．このとき分裂する完全列

$$
0\to E_jE_i^{(b)}\to E_iE_jE_i^{(b-1)}\to E_i^{(2)}E_jE_i^{(b-2)}\to\cdots\to E_i^{(b)}E_j\to 0
$$

が存在する．したがって $\bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+}K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr)$ 上で e_i' $(i\in I)$ たちは q-Serre 関係式を満たす．

Proof. $b=k+k'$ を満たす $k,k'\ge 0$ に対し，R_{b+1} 加群 $P_{k,k'}(i,j)$ を $P_{k,k'}(i,j):=P(i^k)\circ P(j)\circ P(i^{k'})$ で定義する．補題 7.2.4 より，次数付き R_k 加群の同型 $P(i^k)\simeq R_kb_k(i)\langle d_k(i)\rangle$ が成立する ($d_k(i)$ については (7.4.1) 参照)．したがって R_{b+1} 加群として

$$
P_{k,k'}(i,j)\simeq R_{b+1}\bigl(b_k(i)\boxtimes e(j)\boxtimes b'_k(i)\bigr)\langle d_k(i)+d_{k'}(i)\rangle
$$

である．この同型を元に，R_{b+1} 準同型

$$
\alpha^+(i,j)\colon P_{k,k'}(i,j)\to P_{k+1,k'-1}(i,j)
$$

を右から $\alpha^+_{k,k'}(i,j)$ を掛ける写像として定義する．ここで $1-k-k' = \langle h_i, \alpha_j\rangle = 2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)$ を用いると, $\alpha^+_{k,k'}(i,j)$ の次数は

$$\begin{aligned}\deg \alpha^+_{k,k'}(i,j) &= -(k'-1)(\alpha_i,\alpha_i) - (\alpha_i,\alpha_j)\\ &= (k-k'+1)(\alpha_i,\alpha_i)/2\\ &= -d_k(i) - d_{k'}(i) + d_{k+1}(i) + d_{k'-1}(i)\end{aligned}$$

となり, 次数のずれとちょうど一致する．よって $\alpha^+(i,j)$ は次数を保つ R_{b+1} 準同型である．補題 8.3.2 (i) より $\big(\alpha^+(i,j)\big)^2 = 0$ なので, $\alpha^+(i,j)$ を用いて R_{b+1} 加群の複体

$$0 \to P_{0,b}(i,j) \to P_{1,b-1}(i,j) \to P_{2,b-2}(i,j) \to \cdots \to P_{b,0}(i,j) \to 0$$

が定義される．

さらに $\alpha^-_{k,k'}(i,j)$ を用いて同様に R_{b+1} 準同型

$$\alpha^-(i,j)\colon P_{k,k'}(i,j) \to P_{k-1,k'+1}(i,j)$$

を定義すると, 補題 8.3.2 (ii) より $\alpha^+(i,j)\alpha^-(i,j) - \alpha^-(i,j)\alpha^+(i,j)$ は各 $P_{k,k'}(i,j)$ の自己同型写像を与える．従って, この複体は分裂する完全列である．

ここで R_n 加群 M $(n \geq b+1)$ をとる．すると定義より, $m = n-b-1$ とおくと R_m 加群として

$$E_i^{(k)} E_j E_i^{(k')} M \simeq \big(R_m \otimes_{\Bbbk} P_{k,k'}(i,j)^{\psi}\big) \otimes_{R_m \otimes R_{b+1}} M$$

である．したがって上の完全列は, R_m 加群の分裂する完全列

$$0 \longrightarrow E_j E_i^{(b)} M \longrightarrow E_i E_j E_i^{(b-1)} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_i^{(b)} E_j M \longrightarrow 0$$

を導く． □

注意 8.3.4. 以上で得られた関手の自然同値や完全列自体は $\Bbbk$ が可換環の場合にも成立する．

8.4 単純加群へのクリスタル作用素

あとは e'_i の作用で消える元全体のなす空間がどうなっているかを調べれば良い．そのために用いられるのは, 単純加群全体の集合の上に働くクリスタル作用素と呼ばれる写像 $\widetilde{E}_i$ と $\widetilde{F}_i$ である．

定義 8.4.1. 単純 $R(\beta)$ 加群 M に対し,

$$\varepsilon_i(M) := \max\{k \geq 0 \mid E_i^k M \neq 0\}$$

と定める. また $R(\beta - \alpha_i)$ 加群 $\widetilde{E}_i M$ と $R(\beta + \alpha_i)$ 加群 $\widetilde{F}_i M$ を

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_i M &:= \mathrm{soc}(E_i M)\langle(\varepsilon_i(M) - 1)(\alpha_i, \alpha_i)/2\rangle, \\
\widetilde{F}_i M &:= \mathrm{hd}(F_i' M)\langle -\varepsilon_i(M)(\alpha_i, \alpha_i)/2\rangle
\end{aligned}$$

で定義する. (次数のずらしは, これらの写像が 双対性と可換になるようにとっている.)

これらの写像は後に示す命題 8.4.8 の性質を持ち, $n \geq 0$ にわたる全ての R_n の単純加群を集めた集合に (柏原) クリスタルと呼ばれる構造を定める. まずはこれらの $\widetilde{E}_i M$, $\widetilde{F}_i M$ が 0 または単純加群となることを示す.

補題 8.4.2. R_n 加群 M が $E_i M = 0$ を満たすと仮定し, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

(i) $0 \leq k \leq l$ なら

$$E_i^k\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) = (R_{n+l-k} \boxtimes e(i^k))(M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)).$$

が成り立つ.

(ii) $E_i^l\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) = M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ であり, R_n 加群として

$$E_i^{(l)}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \simeq M$$

が成り立つ.

(iii) さらに M が単純ならば, $\mathrm{hd}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr)$ は単純であり,

$$E_i^l \,\mathrm{hd}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \simeq M \otimes_{\Bbbk} L(i^l) \text{ と } E_i^{(l)} \,\mathrm{hd}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \simeq M$$

を満たす.

Proof. (i) $\nu \in I^{n+l}$ が, $\nu_{n+l+1-k} = \cdots = \nu_{n+l} = i$ を満たすとする. shuffle lemma 2.7.6 によって, $e(\nu)\bigl(M \circ L(i^l)\bigr)$ は

$$\tau_w \cdot \bigl(e(\nu_{w(1)}, \ldots, \nu_{w(n)})M \otimes e(\nu_{w(n+1)}, \ldots, \nu_{w(n+l)})L(i^l)\bigr) \quad (w \in \mathfrak{D}_{n,l})$$

の直和になる．$\nu_{w(n)} = i$ なら $e(\nu_{w(1)}, \dots, \nu_{w(n)})M = 0$ であるから，$\nu_{w(n)} \neq i$ としてよい．よって，$w(n) \leq n + l - k$ である．

$$[a, b] := \{p \in \mathbb{Z} \mid a \leq p \leq b\}$$

とおくと，$w[1, n] \subset [1, n + l - k]$ である．従って，$[n + l + 1 - k, n + l] \subset w[n + 1, n + l]$ となる．$w|_{[n+1,n+l]}$ は狭義単調増加だから，$w(p) = p$ が $p \in [n + l + 1 - k, n + l]$ についてなりたつ．即ち，$w \in \mathfrak{S}_{n+l-k}$ である．よって，

$$\begin{aligned}\tau_w \cdot \bigl(e(\nu_{w(1)}, \dots, \nu_{w(n)})M \otimes e(\nu_{w(n+1)}, \dots, \nu_{w(n+l)} L(i^l)\bigr)\\ \subset \bigl(R_{n+l-k} \boxtimes e(i^k)\bigr)\bigl(M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)\bigr)\end{aligned}$$

となり，(i) が言えた．

(ii) $E_i^l\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) = M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ は (i) の特別な場合である．またこれより命題 7.4.1 をもちいて

$$E_i^{(l)}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \simeq \bigl(R_n \otimes_{\Bbbk} P(i^l)^{\psi}\bigr) \otimes_{R_n \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)} \bigl(M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)\bigr) \simeq M$$

となる．

(iii) M は単純と仮定する．$N \subsetneq M \circ L(i^l)$ を真の R_n 部分加群とすると，$E_i^l N$ は $E_i^l\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) = M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ の部分 $R_n \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 部分加群である．$M \circ L(i^l)$ は R_n 上 $M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ で生成されるので，$E_i^l N \subsetneq M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ である．この右辺は単純 $R_n \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 加群なので $E_i^l N = 0$ が従う．この条件は和について閉じているので，$E_i^l N = 0$ を満たす最大の N がとれる．したがって $M \circ L(i^l)$ には極大部分 R_n 加群が唯一つしか存在せず，これが根基となるので head は単純である．また $E_i^l \operatorname{rad}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) = 0$ なので，完全列

$$0 \to \operatorname{rad}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \to M \circ L(i^l) \to \operatorname{hd}\bigl(M \circ L(i^l)\bigr) \to 0$$

に完全関手 E_i^l と $E_i^{(l)}$ を適用すれば (iii) の同型が得られる．□

補題 8.4.3. M を単純 R_n 加群とし，$l := \varepsilon_i(M)$ とおく．この時，

(i) $E_i^{(l)} M$ は単純 R_{n-l} 加群．

(ii) $E_i^l M$ は既約 $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 加群で，$E_i^l M \simeq E_i^{(l)} M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$．

(iii) R_n 加群として $M \simeq \mathrm{hd}\big(E_i^{(l)}M \circ L(i^l)\big)$ が成り立つ.

Proof. $E_i^l M \neq 0$ の部分 $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 加群 S' で単純なものを一つ取る. 補題 7.3.6 より, 単純 R_{n-l} 加群 S があって $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 加群として $S' \simeq S \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ が成り立つ. 従って, 単射 $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)$ 準同型 $S \otimes_{\Bbbk} L(i^l) \rightarrowtail M$ が得られる. これは 0 でない R_n 準同型 $S \circ L(i^l) \to M$ を誘導し, M の単純性から全射となる. よって

$$S \circ L(i^l) \twoheadrightarrow M$$

が得られた. これに完全関手 $E_i^{(l)}$ をほどこして, 全射 R_{n-l} 準同型

$$E_i^{(l)}\big(S \circ L(i^l)\big) \twoheadrightarrow E_i^{(l)}M \tag{8.4.1}$$

を得る. 一方 $l = \varepsilon_i(M)$ の仮定より $E_i S = 0$ なので, 補題 8.4.2 (ii) より同型 $S \simeq E_i^{(l)}\big(S \circ L(i^l)\big)$ が成り立つ. S は単純かつ $E_i^{(l)}M \neq 0$ であったので, (8.4.1) より $S \xrightarrow{\sim} E_i^{(l)}M$ となる. 補題 8.4.2 (iii) より $E_i^{(l)}M \circ L(i^l)$ は単純な head M を持つ. □

系 8.4.4. M が単純 R_n 加群ならば $\widetilde{F}_i M$ も単純であり, $l := \varepsilon_i(M)$ とおくと $\varepsilon_i(F_i M) = l+1$ を満たす. また任意の $k \geq 0$ に対し $\widetilde{F}_i^k M \simeq \mathrm{hd}\big(E_i^{(l)}M \circ L(i^{l+k})\big)$ が成り立つ.

Proof. $l := \varepsilon_i(M)$ とおく. すると補題 8.4.3 より全射

$$E_i^{(l)}M \circ L(i^l) \circ L(i) \twoheadrightarrow M \circ L(i) \tag{8.4.2}$$

が得られる. $L(i^l) \circ L(i) \simeq L(i^{l+1})\langle l(\alpha_i, \alpha_i)/2 \rangle$ なので, 補題 8.4.2 より (8.4.2) の左辺の head は単純である. したがってその 0 でない商である $M \circ L(i)$ も同じ head を持ち, (次数のずれはを打ち消しあって) $\widetilde{F}_i M \simeq \mathrm{hd}\big(E_i^{(l)}M \circ L(i^{l+1})\big)$ となる. よって $E_i^{(l+1)}\widetilde{F}_i M \simeq E_i^{(l)}M$ なので $\varepsilon_i(F_i M) = l+1$ である. これを帰納的に繰り返せば後半の命題が得られる. □

定理 8.4.5. M を単純 R_n 加群とし, $l := \varepsilon_i(M) > 0$ と仮定する. そのとき次が成り立つ.

(i) $l = \min\{k \geq 0 \mid x_n^k E_i M = 0\}$.

(ii) $\mathrm{soc}(E_i M) = x_n^{l-1} E_i M$ である.

(iii) x_n^k 倍写像 $E_iM \to E_iM$ の Ker を $\operatorname{Ker} x_n^k$ と書くとき, $\operatorname{rad}(E_iM) = \operatorname{Ker} x_n^{l-1}$ である.

(iv) $\operatorname{soc}(E_iM)$ と $\operatorname{hd}(E_iM)$ はどちらも単純であり, $d = (l-1)(\alpha_i, \alpha_i)/2$ とおくと同型 $\widetilde{E}_iM := \operatorname{soc}(E_iM)\langle d\rangle \simeq \operatorname{hd}(E_iM)\langle -d\rangle$ が成り立つ. さらに詳しく, 次の可換図式がある.

$$\begin{tikzcd} E_iM\langle -d\rangle \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "x_n^{l-1}"] & \operatorname{hd}(E_iM)\langle -d\rangle \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{soc}(E_iM)\langle d\rangle \arrow[r, tail] & E_iM\langle d\rangle \end{tikzcd}$$

Proof. 補題 8.4.3 によって, $S := E_i^{(l)}M$ は既約 R_{n-l} 加群であり, $M \simeq \operatorname{hd}\bigl(S \circ L(i^l)\bigr)$, $E_i^lM \simeq S \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ である.

補題 8.4.2 (i) によって $E_i(S \circ L(i^l)) = R_{n-1}E_i^l(S \circ L(i^l))$ である. 従って全射 $S \circ L(i^l) \twoheadrightarrow M$ の存在より,

$$E_iM = R_{n-1}E_i^lM \tag{8.4.3}$$

が成り立つ. 補題 7.3.4 によって $x_n^lE_i^lM \simeq S \otimes_{\Bbbk} x_l^lL(i^l) = 0$ である. 従って, $x_n^lE_iM = x_n^lR_{n-1}E_i^lM = 0$ となる. 一方, 同じ補題 7.3.4 によって $x_n^{l-1}E_i^lM \simeq S \otimes_{\Bbbk} x_l^{l-1}L(i^l) \neq 0$ であるから, (i) が得られた.

補題 7.3.7 より, $E_i^lM \simeq S \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ の $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R\bigl((l-1)\alpha_i\bigr)$ 加群としての head と socle はそれぞれ $\operatorname{Coker}(x_n \colon E_i^lM \to E_i^lM)$ と $x_n^{l-1}E_i^lM$ である. しかも, これらは既約 $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R\bigl((l-1)\alpha_i\bigr)$ 加群となる. これを用いて残りの主張を証明する.

任意の既約 R_{n-1} 部分加群 $N \subset E_iM$ をとる. $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $x_n^sN \neq 0$ となる最大の整数とすれば, $x_n^{s+1}N = 0$ となる. また, R_{n-1} 加群の (次数のずれを除いて) 同型 $x_n^s \colon N \xrightarrow{\sim} x_n^sN$ がある. すると, $N \xrightarrow{\sim} x_n^sN \to E_iM$ は, (次数のずれを除き) $R_{n-1} \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i)$ 準同型

$$N \otimes_{\Bbbk} L(i) \xrightarrow{\sim} x_n^sN \otimes_{\Bbbk} L(i) \rightarrowtail E_iM \tag{8.4.4}$$

をひきおこす. $l' := \varepsilon_i(N)$ とおく. このとき明らかに $l' \leq l-1$ である. (8.4.4) に $E_i^{l'}$ を作用させて, 単射 $R_{n-l'-1} \otimes_{\Bbbk} R(l'\alpha_i) \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i)$ 準同型

$$E_i^{l'}N \otimes_{\Bbbk} L(i) \rightarrowtail E_i^{l'+1}M$$

が得られる. これは, 非零な $R_{n-l'-1} \otimes_{\Bbbk} R((l'+1)\alpha_i)$ 準同型 $E_i^{(l')}N \otimes_{\Bbbk} L(i^{l'+1}) \to E_i^{l'+1}M$ に延長でき, さらに非零 R_n 準同型 $E_i^{(l')}N \circ L(i^{l'+1}) \to$

M を誘導する．M は既約であるから R_n 加群の全射 $E_i^{(l')}N \circ L(i^{l'+1}) \twoheadrightarrow M$ を得る．従って $E_i^{l'+2}M = 0$ が成り立つ．故に $l'+2 > l$ となる．$l' \le l-1$ とあわせて, $\varepsilon_i(N) = l' = l-1$ が得られた．

R_{n-1} 加群として $N \subset E_iM$ から $R_{n-l} \otimes R((l-1)\alpha_i)$ 加群の単射 $0 \neq E_i^{l-1}N \subset E_i^lM$ が得られる． $E_i^{l-1}N$ は既約 $R_{n-l} \otimes R((l-1)\alpha_i)$ 加群で, $x_n^{l-1}E_i^lM$ が E_iM の $R_{n-l} \otimes R((l-1)\alpha_i)$ 加群としての単純な socle であったから,

$$E_i^{l-1}N = x_n^{l-1}E_i^lM \tag{8.4.5}$$

が成り立つ．(8.4.5) と $N = R_{n-1}E_i^{l-1}N$ をあわせて, $x_n^{l-1}E_iM = N$ を得る．N は任意の E_iM の既約 R_{n-1} 部分加群であったから, $x_n^{l-1}E_iM$ は E_iM の単純な socle である．

次に, $L \subsetneq E_iM$ が E_iM の R_{n-1} 真部分加群なら, $x_n^{l-1}L = 0$ となることを証明しよう．$x_n^{l-1}L \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$x_n^{l-1}E_iM$ は E_iM の単純な socle であったので $x_n^{l-1}E_iM \subset x_n^{l-1}L$ である．これに, E_i^{l-1} を施して,$x_n^{l-1}E_i^lM \subset x_n^{l-1}E_i^{l-1}N$ となる．$x_n^{l-1}(x_nE_i^lM) = 0$ なので, $E_i^{l-1}L \subset x_nE_i^lM$ とはなり得ない．一方, $x_nE_i^lM$ は, E_i^lM の最大の $R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R((l-1)\alpha_i)$ 真部分加群なので, これから $E_i^{l-1}L = E_i^lM$ が結論される．(8.4.3) より $E_iM = R_{n-1}E_i^lM = R_{n-1}E_i^{l-1}N = N$ となって仮定に反する．従って, $x_n^{l-1}L = 0$ が結論された．即ち, $L \subset \operatorname{Ker} x_n^{l-1}$ である．L は任意の R_{n-1} 真部分加群であったので, $\operatorname{Ker} x_n^{l-1} \subsetneq E_iM$ は E_iM の唯一の極大真部分加群であり, それによる商 $\operatorname{hd}(E_iM)$ は単純となる．

最後に x_n^{l-1} 倍写像 $E_iM/\operatorname{Ker} x_n^{l-1} \to x_n^{l-1}E_i$ は次数 $\deg x_n^{l-1}e(n-1,i) = 2d$ のずれを除いて同型を与える． □

注意 8.4.6. 定理 8.4.5 のもとで, $x_n \operatorname{soc}(M) = 0$ であるが, 一般には $\operatorname{soc}(E_iM) = \operatorname{Ker}(x_n|_{E_iM})$ は成り立たない．例えば, $I = \{1,2\}$, $Q_{1,2}(u.,v) = u+v$ のとき $L(2,1) = \Bbbk u$ ($e(2,1)u = u$, $x_1u = \tau_1u = 0$) は既約 $R(\alpha_1+\alpha_2)$ 加群であり, $M = L(2,1) \circ L(1)$ は既約 $R(2\alpha_1+\alpha_2)$ 加群である．$E_1M = M$, $\varepsilon_1(M) = 2$, $\operatorname{soc}(E_1M) = L(2,1) \boxtimes L(1)$, $\operatorname{Ker}(x_3) = L(2,1) \boxtimes L(1) + \tau_1\tau_2\big(L(2,1) \boxtimes L(1)\big)$ である．

系 8.4.7. M を単純 R_n 加群とし, $l := \varepsilon_i(M) > 0$ と仮定する．このとき $\varepsilon_i(\widetilde{E}_iM) = l-1$ であり, $E_i^{(l-1)}(\widetilde{E}_iM) \simeq E_i^{(l)}M$ が成り立つ．

Proof. $d = (l-1)(\alpha_i, \alpha_i)/2$ とおくと

$$E_i^{l-1}(\widetilde{E}_i M) = x_n^{l-1} E_i^l M\langle d\rangle \simeq E_i^{(l)} M \otimes_{\Bbbk} x_l^{l-1} L(i^l)\langle d\rangle \simeq E_i^{(l)} M \otimes_{\Bbbk} L(i^{l-1})$$

となる．したがって $E_i^{(l-1)}(\widetilde{E}_i M) \simeq E_i^{(l)} M$ かつ $\varepsilon_i(\widetilde{E}_i M) = l-1$ である． □

$\widetilde{E}_i$ と $\widetilde{F}_i$ の交換関係は以下のように書ける[12].

命題 8.4.8. M を単純 R_n 加群とし, $l = \varepsilon_i(M)$ とおく．このとき以下が成り立つ．

(i) $l = \max\{k \geq 0 \mid \widetilde{E}_i^k M \neq 0\}$ である．また $\widetilde{E}_i^l M \simeq E_i^{(l)} M$ が成り立つ．

(ii) $\widetilde{E}_i \widetilde{F}_i M \simeq M$.

(iii) $l > 0$ ならば, $\widetilde{F}_i \widetilde{E}_i M \simeq M$.

Proof. (i) は系 8.4.7 を繰り返し適用して得られる．系 8.4.4 と合わせると $M \simeq \widetilde{F}_i^l \widetilde{E}_i^l M$ となるので, l について帰納的に (iii) が従う．(ii) は $\widetilde{E}_i^{l+1} \widetilde{F}_i M \simeq E_i^{(l+1)} \widetilde{F}_i M \simeq E_i^{(l)} M \simeq \widetilde{E}_i^l M$ となるので，両辺に $\widetilde{F}_i^l$ を掛ければ $\widetilde{E}_i \widetilde{F}_i M \simeq M$ となる． □

命題 8.4.9. 任意の既約 R_n 加群 M は, 絶対既約 $(\mathrm{End}_{R_n}(M) \simeq \Bbbk)$ である．

Proof. n に関する帰納法で証明する．$n = 0$ なら明らかであるから, $n > 0$ としてよい．$l := \varepsilon_i(M) > 0$ となる $i \in I$ をとる．M は R_n 加群として $E_i^l M \simeq E_i^{(l)} M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ で生成されるから,

$$\mathrm{End}_{R_n}(M) \rightarrowtail \mathrm{End}_{R_{n-l} \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)}(E_i^l M) \simeq \mathrm{End}_{R_{n-l}}(E_i^{(l)} M).$$

一方帰納法の仮定より $\mathrm{End}_{R_{n-l}}(E_i^{(l)} M) \simeq \Bbbk$. 従って, $\mathrm{End}_{R_n}(M) \simeq \Bbbk$ を得る． □

従って, 命題 5.6.3 とあわせて次の系が結論される．

[12] これらはクリスタルと呼ばれる構造の定義の一部である．

系 8.4.10. 任意の $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し,

$$\langle\!\langle\, [P], [M] \,\rangle\!\rangle = \mathrm{qdim}_{\Bbbk}(P^{\psi} \otimes_{R(\beta)} M) \quad (P \in R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj},\ M \in R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod})$$

は $Z[q, q^{-1}]$ 双線型写像 $K\big(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\big) \times K\big(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\big) \to Z[q, q^{-1}]$ を定義し, この双線型写像は同型

$$K\big(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\big(K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}), \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\big)$$

を与える.

さて, 我々が必要なのは Grothendieck 群の中で E_iM がどのように展開されるかということである. $\widetilde{E}_iM$ を用いてその展開を行うことで, 求めていた命題が証明できる.

定理 8.4.11. M を単純 R_n 加群とし, $l := \varepsilon_i(M)$ とおく. すると $\varepsilon_i(S_p) < l-1$ を満たす単純 R_{n-1} 加群 $S_1, S_2, \ldots, S_r$ が存在して ($l = 0$ のときは $r = 0$ と解釈する), Grothendieck 群 $K(R_{n-1}\text{-}\mathsf{mod})$ において

$$[E_iM] = [\varepsilon_i(M)]_i[\widetilde{E}_iM] + \sum_{p=1}^{r}[S_p]$$

と書ける.

Proof. 定理 8.4.5 より $x_n^l E_iM = 0$ であり,

$$x_n^k E_iM \subset \mathrm{Ker}\, x_n^{l-k} := \mathrm{Ker}(x_n^{l-k} \colon E_iM \to E_iM)$$

が成り立つ. そこで E_iM の R_{n-1} 部分加群の鎖

$$\begin{aligned}0 \subset x_n^{l-1}E_iM \subset (\mathrm{Ker}\, x_n \cap x_n^{l-2}E_iM) \subset x_n^{l-2}E_iM \\ \subset (\mathrm{Ker}\, x_n^2 \cap x_n^{l-3}E_iM) \subset \cdots \subset x_nE_iM \subset \mathrm{Ker}\, x_n^{l-1} \subset E_iM\end{aligned}$$

を考える. 各 $0 \le k < l-1$ に対し, x_n を掛ける写像

$$x_n^kE_iM/(\mathrm{Ker}\, x_n^{l-k-1} \cap x_n^kE_iM) \longrightarrow x_n^{k+1}E_iM/(\mathrm{Ker}\, x_n^{l-k-2} \cap x_n^{k+1}E_iM)$$

は次数 (α_i, α_i) のずれを除いて同型である. したがって

$$x_n^kE_iM/(\mathrm{Ker}\, x_n^{l-k-1} \cap x_n^kE_iM) \simeq \widetilde{E}_iM\big\langle \big((l-1)/2 - k\big)(\alpha_i, \alpha_i)\big\rangle$$

が成り立つ. 一方, $E_i^l M \simeq E_i^l M \otimes_{\Bbbk} L(i^l)$ と補題 7.3.4 をもちいて,

$$\begin{aligned} E_i^{l-1} \operatorname{Ker} x_n^{l-k} &= \operatorname{Ker}(x_n^{l-k} \colon E_i^l M \to E_i^l M) \\ &\simeq E_i^{(l)} M \otimes_{\Bbbk} x_l^k L(i^l) \simeq E_i^{l-1} x_n^k E_i M \end{aligned}$$

なので,

$$E_i^{l-1}\big((\operatorname{Ker} x_n^{l-k} \cap x_n^{k-1} E_i M)/x_n^k E_i M\big) = 0$$

である. よって $(\operatorname{Ker} x_n^{l-k} \cap x_n^{k-1} E_i M)/x_n^k E_i M$ の全ての組成因子 S_p は $\varepsilon_i(S_p) < l-1$ を満たす. これらを全て足しあげると

$$\begin{aligned} [E_i M] = \sum_{k=0}^{l-1} &[x_n^k E_i M/(\operatorname{Ker} x_n^{l-k-1} \cap x_n^k E_i M)] \\ &+ \sum_{k=1}^{l-1} [(\operatorname{Ker} x_n^{l-k} \cap x_n^{k-1} E_i M)/x_n^k E_i M] \\ = [&\varepsilon_i(M)]_i [\widetilde{E}_i M] + \sum_{p=1}^{r} [S_p] \end{aligned}$$

を得る. □

系 8.4.12. $\beta \in \mathsf{Q}_+ \setminus \{0\}$ とする. $u \in K\big(R(\beta)\text{-gmod}\big)$ が任意の $i \in I$ に対し $e_i' u = 0$ を満たすならば, $u = 0$ である.

Proof. $u \neq 0$ と仮定し, 次数のずれを含めても互いに同型でない単純 $R(\beta)$ 加群 $S_1, S_2, \ldots, S_r$ をとって u を $u = \sum_{k=1}^r a_k [S_k]$ $(a_k \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \setminus \{0\})$ と展開する. すると $\beta \neq 0$ よりある $i \in I$ と $1 \le k \le r$ が存在して $E_i S_k \neq 0$ となる. $l := \max\{\varepsilon_i(S_k) \mid 1 \le k \le r\} > 0$ とおけば,

$$e_i' u = [l]_i \sum_{k,\, \varepsilon_i(S_k) = l} a_k\, [\widetilde{E}_i S_k] + \sum_{\substack{S\colon \text{単純} \\ \varepsilon_i(S) < l-1}} b_S\, [S] \qquad (b_S \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}])$$

と展開される. $S_k \simeq \widetilde{F}_i \widetilde{E}_i S_k$ なので, $\widetilde{E}_i S_k$ たちは次数のずれを含めても互いに同型でない. よって $e_i' u \neq 0$ となり仮定に反する. □

以上の議論により, ついに主定理の一つである定理 8.1.3 の証明が完成した.

8.5 Kostant–Lusztig form の categorification

定理 8.1.3 の $\mathbb{Z}$ 型版も成り立つ.

定理 8.5.1.

$$\bigoplus_{\beta\in \mathsf{Q}_+} K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ.

Proof. 命題 6.5.6 により次の事実 (8.5.1) を証明すれば十分である. $\beta \in \mathsf{Q}_+ \setminus \{0\}$, $u = \sum_{k=1}^{r} c_k[S_k] \in \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr)$ とする. ここに S_k $(k = 1, \ldots, r)$ は, 次数のずれを含めても互いに同型でない単純 $R(\beta)$ 加群, $c_k \in \mathbb{Q}(q)$ である. そのとき

(8.5.1) 任意の $l > 0$ と $i \in I$ にたいして $e_i'^{(l)}u \in K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr)$ が成り立つならば, $c_k \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

任意の k に対して, $c_k \notin \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ と仮定しても一般性を失わない. さらに $r > 0$ としてよい. $l := \max\{\varepsilon_i(S_k) \mid 1 \le k \le r\} > 0$ となる $i \in I$ をとる. そのとき

$$e_i'^{(l)}u = \sum_{\varepsilon_i(S_k)=l} c_k[E_i^{(l)}S_k] \in K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr)$$

である. S_k $(\varepsilon_i(S_k) = l)$ は, 次数のずれも除いても互いに同型でない単純 $R(\beta - l\alpha_i)$ 加群であるから, $c_k \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ である. これは仮定に反する. 従って, (8.5.1) が成り立つ. □

これより次の系を得る.

系 8.5.2. $\beta \in \mathsf{Q}_+$, M, N を有限次元 $R(\beta)$ 加群とする. $\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(N)$ なら (即ち $\mathrm{qdim}\, e(\nu)M = \mathrm{qdim}\, e(\nu)N$ がすべての $\nu \in I^\beta$ に対して成り立つなら), $K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod})$ の元として, $[M] = [N]$ である.

(ch については (4.3.1) 参照.)

続いて $U_q^-(\mathfrak{g})^*$ の双対である $U_q^-(\mathfrak{g})$ がどのように categorify されるかを見よう. まず系 8.4.10 によって, 各 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し同型

$$\begin{aligned}\bigl(U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}\bigr)_{-\beta} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\bigl((U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}})_{-\beta}, \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\bigr)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\bigl(K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}), \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\bigr)\\ &\simeq K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\bigr)\end{aligned}$$

を得る．よって全ての $\beta \in \mathsf{Q}_+$ にわたって直和を取ることで，$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての同型写像

$$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \simeq \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\bigr) \tag{8.5.2}$$

が得られる．ここで左辺には e'_i, $f_i^{(l)}$ が作用した．右辺の空間にもやはり関手のレベルで作用素 e'_i, $f_i^{(l)}$ を定義することができる．

定義 8.5.3. 加法的関手 E'_i と $F_i^{(l)}$ を

$$\begin{aligned}
E'_i \colon R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj} &\longrightarrow R(\beta - \alpha_i)\text{-}\mathsf{gproj} \\
P &\longmapsto \bigl(R(\beta - \alpha_i) \circ L(i)\bigr)^{\psi} \otimes_{R(\beta)} P, \\
F_i^{(l)} \colon R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj} &\longrightarrow R(\beta + l\alpha_i)\text{-}\mathsf{gproj}, \\
P &\longmapsto P \circ P(i^l)
\end{aligned}$$

で定義する．これが誘導する $\bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj})$ 上の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 準同型をそれぞれ e'_i, $f_i^{(l)}$ と書く．

補題 8.5.4. ここで定めた e'_i, $f_i^{(l)}$ の作用は，同型 (8.5.2) を通じて $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ 上の作用と一致する．

Proof. $P \in R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}$, $M \in R(\beta + l\alpha_i)\text{-}\mathsf{gmod}$ とすれば，テンソル積の結合性から

$$\begin{aligned}
&\bigl(F_i^{(l)} P\bigr)^{\psi} \otimes_{R(\beta + l\alpha_i)} M \\
&\qquad \simeq P^{\psi} \underset{R(\beta)}{\otimes} (R(\beta) \otimes_{\Bbbk} P(i^l)^{\psi}) \underset{R(\beta) \otimes_{\Bbbk} R(l\alpha_i)}{\otimes} R(\beta + l\alpha_i) \underset{R(\beta + l\alpha_i)}{\otimes} M \\
&\qquad \simeq P^{\psi} \otimes_{R(\beta)} E_i^{(l)} M
\end{aligned}$$

となる．同様に $P \in R(\beta + \alpha_i)\text{-}\mathsf{gproj}$, $M \in R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&(E'_i P)^{\psi} \otimes_{R(\beta)} M \\
&\qquad \simeq P^{\psi} \underset{R(\beta + \alpha_i)}{\otimes} R(\beta + \alpha_i) \underset{R(\beta) \otimes_{\Bbbk} R(\alpha_i)}{\otimes} (R(\beta) \otimes_{\Bbbk} L(i)) \underset{R(\beta)}{\otimes} M \\
&\qquad \simeq P^{\psi} \otimes_{R(\beta + \alpha_i)} F'_i M
\end{aligned}$$

である．これらを Grothendieck 群に落とすと

$$\langle\!\langle\, f_i^{(l)}[P], [M] \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, [P], e_i'^{(l)}[M] \,\rangle\!\rangle, \quad \langle\!\langle\, e'_i[P], [M] \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, [P], f_i[M] \,\rangle\!\rangle$$

という等式になる. これは双対空間への $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ の作用の定義そのものである. $\square$

定理 8.5.5. $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ 加群として同型

$$U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \simeq \bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+} K\bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\bigr)$$

が成り立つ.

ところで $U_q^-(\mathfrak{g})$ は単なる $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群ではなく, 積を持つ $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 代数であった. 一方加群の圏には合成積で積構造が入っている. すると今の同型が代数としての同型になることが期待されるが, 実際それは正しい. ただし関手 F_i を右からの合成積で定義したため, 積の順序は逆になる.

系 8.5.6. $P \in R_m\text{-}\mathsf{gproj}$, $Q \in R_n\text{-}\mathsf{gproj}$ に対し, $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ 上の積で $[P]\cdot[Q] = [Q\circ P]$ が成り立つ.

Proof. 定義より $f_i^{(l)}\cdot[P] = [P\circ P(i^l)]$ である. $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ は $f_i^{(l)}$ たちで生成され, また合成積は結合法則を満たすので対応が成り立つ. $\square$

8.6 双対関手

最後にこの categorification と大域基底との関係を述べて, この章を締めくくろう.

定義 8.6.1. $\beta\in\mathsf{Q}_+$ とする. 加法的関手 D と完全関手 d を

$$\begin{aligned} D\colon \bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\bigr)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}, \\ P &\longmapsto {\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}}_{R(\beta)}\bigl(P, R(\beta)\bigr)^{\psi}, \\ d\colon \bigl(R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\bigr)^{\mathrm{op}} &\longrightarrow R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}, \\ M &\longmapsto {\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}}_{\Bbbk}(M,\Bbbk)^{\psi} \end{aligned}$$

で定める.

関手 D は $D^2\simeq \mathrm{Id}$, $D\circ\langle -1\rangle \simeq \langle 1\rangle\circ D$ を満たすことに注意しよう. d も同様である. Grothendieck 群においては, これらの関手は q を q^{-1} に写す bar involution になる.

補題 8.6.2. D と d が Grothendieck 群に誘導する $\mathbb{Z}$ 準同型は，上の同型のもとで定義 6.5.7 で定義した bar involution $\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g}) \to U_q^-(\mathfrak{g})$ と $\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g})^* \to U_q^-(\mathfrak{g})^*$ にそれぞれ一致する．

Proof. 命題 7.4.1 より $DP(i^l) \simeq P(i^l)$ である．また $P \in R_m$-gproj, $Q \in R_n$-gproj に対し，$P \otimes_{\Bbbk} Q$ は有限生成射影的 $R_m \otimes_{\Bbbk} R_n$ 加群なので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom^{gr}}_{R_{m+n}}(P \circ Q, R_{m+n}) \\
&\qquad \simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n}(P \otimes_{\Bbbk} Q, R_{m+n}) \\
&\qquad \simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n}(P \otimes_{\Bbbk} Q, R_m \otimes_{\Bbbk} R_n) \otimes_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n} R_{m+n} \\
&\qquad \simeq \big(\mathrm{Hom^{gr}}_{R_m}(P, R_m) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom^{gr}}_{R_n}(Q, R_n)\big) \otimes_{R_m \otimes_{\Bbbk} R_n} R_{m+n}
\end{aligned}$$

である．故に $D(P \circ Q) \simeq DP \circ DQ$ を満たす．したがって D が $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \simeq \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\big(R(\beta)\text{-gproj}\big)$ に誘導する準同型は $f^{(l)}$ を固定し q を q^{-1} に写す $\mathbb{Z}$ 代数の準同型であり，定義より $\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g}) \to U_q^-(\mathfrak{g})$ と一致する．

また $P \in R_n$-gproj, $M \in R_n$-gmod に対して

$$\begin{aligned}
(DP)^{\psi} \otimes_{R_n} dM &\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R_n}(P, R_n) \otimes_{R_n} dM \\
&\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R_n}(P, dM) \\
&\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R_n}\big(P^{\psi}, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}(P^{\psi} \otimes_{R_n} M, \Bbbk)
\end{aligned}$$

となる．ここで P が有限生成射影的であることを用いた．この自然同型を Grothendieck 群に移せば，$\overline{\bullet}\colon U_q^-(\mathfrak{g})^* \to U_q^-(\mathfrak{g})^*$ の定義 $\overline{\varphi}(\overline{u}) = \overline{\varphi(u)}$ と一致する． □

補題 8.6.3. 任意 $i \in I$ と $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$d \circ E_i^l \simeq E_i^l \circ d, \quad d \circ E_i^{(l)} \simeq E_i^{(l)} \circ d$$

が成り立つ．

Proof. $d \circ E_i^l \simeq E_i^l \circ d$ は明らかである．$E_i^{(l)}(M) \simeq P(i^l)^{\psi} \otimes_{R(l\alpha_i)} M$ だから，命題 7.4.1 をもちいて

$$\begin{aligned}
d \circ E_i^{(l)}(M) &\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}(P(i^l)^{\psi} \otimes_{R(l\alpha_i)} E_i^l M, \Bbbk) \\
&\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{(R(l\alpha_i))^{\mathrm{op}}}\big(P(i^l)^{\psi}, \mathrm{Hom^{gr}}_{\Bbbk}(E_i^l M, \Bbbk)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom^{gr}}_{R(l\alpha_i)}\big(P(i^l), R(l\alpha_i)\big) \otimes_{R(l\alpha_i)} d(E_i^l M) \\
&\simeq P(i^l)^{\psi} \otimes_{R(l\alpha_i)} E_i^l(dM) \simeq E_i^{(l)}(dM)
\end{aligned}$$

となる． □

命題 8.6.4. 単純 R_n 加群 M に対し，ある $k \in \mathbb{Z}$ が一意的に存在して $d(M\langle k\rangle) \simeq M\langle k\rangle$ を満たす．

Proof. n に関する帰納法で示す．まず $n=0$ のときは $d\Bbbk \simeq \Bbbk$ なので明らかに成立する．そこで $n>0$ とすると，$E_iM \neq 0$ となる $i \in I$ が存在する．$l := \varepsilon_i(M) > 0$ とおくと，$E_i^{(l)}M$ は既約であるから，帰納法の仮定から $d(E_i^{(l)}M\langle k\rangle) \simeq E_i^{(l)}M\langle k\rangle$ となる k が存在する．

$$E_i^{(l)}\big(d(M\langle k\rangle)\big) \simeq d(E_i^{(l)}M\langle k\rangle) \simeq E_i^{(l)}M\langle k\rangle \tag{8.6.1}$$

となる．一方，$d^2M \simeq M$ より dM も単純加群である．また E_i は d と可換だから，$\varepsilon_i(dM) = l$ である．従って，(8.6.1) より $d(M\langle k\rangle) \simeq M\langle k\rangle$ が従う．一意性は $d(M\langle j\rangle) \simeq (dM)\langle -j\rangle$ から明らかである． □

そこで $dM \simeq M$ を満たす単純 $R(\beta)$ 加群 M を集め，これを Grothendieck 群に落とした集合

$$B := \bigsqcup_{\beta\in \mathsf{Q}_+} \big\{[M] \mid M\colon \text{単純 } R(\beta) \text{ 加群},\ dM \simeq M\big\} \tag{8.6.2}$$

を考えよう．今までの議論から，これは $U_q(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上の基底である．また定理 6.5.9 中の大域基底の判定条件を，(iii), (iv) の係数に関する制限だけを除いて全て満たすことがわかる[13]．実際，9.2 節で詳しくのべるように，$\mathfrak{g}$ の一般化 Cartan 行列が対称なら，この B は大域基底と一致する．

しかし，一般化 Cartan 行列が対称化可能というだけではこの一致は成り立たない．これは大域基底の積が必ずしも大域基底の正係数線型結合では書けないことからもわかる．また，(8.6.2) の B は，$U_q^-(\mathfrak{g})^*_{\mathbb{Z}}$の 基底とみなしたとき，基礎体 $\Bbbk$, $Q_{ij}(u,v)$ のとり方に依り得る ([Kas12] 参照)．

9章　関連する話題

9.1　巡回 KLR 代数

アフィン Hecke 代数による categorification では，各支配的整ウェイト $\Lambda \in P_+$ ごとに対応する巡回 Hecke 代数が定義され，それにより Lie 代

[13] このような基底は完全基底 (perfect basis) と呼ばれる．

数の単純加群 $V(\Lambda)$ が categorify された．そこで KLR 代数による我々の categorification でも適当な商代数が量子群の単純加群 $V(\Lambda)$ を categorify することが期待される．A 型の場合この予想はアフィン Hecke 代数との同型 [BK09] により証明されていた．それを任意の型で確かめたのは Kang–柏原 [KK12] である．

$\Lambda \in P$ を, 任意の $i \in I$ に対し $\langle h_i, \Lambda \rangle \geq 0$ を満たす支配的整ウェイトとする．これに対し, KLR 代数 R_n の商代数

$$R_n^\Lambda := R_n \Big/ \sum_{\nu \in I^n} R_n x_1^{\langle h_{\nu_1}, \Lambda \rangle} e(\nu) R_n$$

を Λ に対応する巡回 KLR 代数という．これは体 $\Bbbk$ 上有限次元の代数である．各 $\beta \in \mathsf{Q}_+$ に対し, $R(\beta)$ の R^Λ における像を $R^\Lambda(\beta)$ と書く．このとき制限関手 E_i^Λ と誘導関手 F_i^Λ が

$$\begin{aligned} E_i^\Lambda \colon R^\Lambda(\beta)\text{-}\mathsf{gMod} &\longrightarrow R^\Lambda(\beta - \alpha_i)\text{-}\mathsf{gMod} \\ M &\longmapsto e(n-1, i)M, \\ F_i^\Lambda \colon R^\Lambda(\beta)\text{-}\mathsf{gMod} &\longrightarrow R^\Lambda(\beta + \alpha_i)\text{-}\mathsf{gMod} \\ M &\longmapsto R^\Lambda(\beta + \alpha_i)e(n, i) \otimes_{R^\Lambda(\beta)} M \end{aligned}$$

により定義される．これらの関手が Grothendieck 群に作用し, $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ 加群として同型

$$V(\Lambda)_{\mathbb{Z}} \simeq \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\big(R^\Lambda(\beta)\text{-}\mathsf{gproj}\big), \qquad V(\Lambda)_{\mathbb{Z}}^* \simeq \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}_+} K\big(R^\Lambda(\beta)\text{-}\mathsf{gmod}\big)$$

を与えるというのが KLR 代数の巡回 categorification 予想と呼ばれていた主張である．この予想を証明する上で障壁となったのは, $e(n,i)R^\Lambda(\beta+\alpha_i)$ と $R^\Lambda(\beta+\alpha_i)e(n,i)$ がそれぞれ左と右の $R^\Lambda(\beta)$ 加群として射影的であることが容易にはわからなかったことにある．Kang–柏原がこれを証明したことにより, 制限関手 E_i^Λ が加法的関手 $R(\beta)\text{-}\mathsf{gproj} \to R(\beta-\alpha_i)\text{-}\mathsf{gproj}$ を, 誘導関手 F_i^Λ が完全関手 $R(\beta)\text{-}\mathsf{gmod} \to R(\beta+\alpha_i)\text{-}\mathsf{gmod}$ を与え, Grothendieck 群の間の準同型を誘導することが明らかになった．これが実際に量子群の表現となることの証明はこれまでと大体同様である．

9.2 幾何学的構成

大域基底との対応の証明にも使われた, Varagnolo–Vasserot [VV11b] による KLR 代数の幾何学的構成について簡単に概略を記しておく．幾何学

的表現論で用いられる偏屈層などの道具については, たとえば [BBD82] を参照するとよい.

まず Lusztig [Lus91] による量子群の幾何学的 categorification を復習しよう. 自己ループのない有限箙 Ω を固定し, その頂点の集合を I, 矢の集合を H とおく. $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し, i から j に向かう矢の本数を h_{ij} とし, Ω に付随する対称な一般化 Cartan 行列 $(a_{ij})_{i,j\in I}$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -h_{ij} - h_{ji} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

と定める. $(a_{ij})_{i,j\in I}$ で定義される Kac–Moody Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とおく.

I で添字付けられた $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間 $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ に対し,

$$G_V \coloneqq \prod_{i\in I} GL(V_i), \qquad E_V \coloneqq \bigoplus_{(i\to j)\in H} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i, V_j)$$

と定める. E_V は $\mathbb{C}$ 線型空間であり, G_V はその上に作用する代数群である. $\mathcal{D}^b_{G_V}(E_V)$ で E_V 上の G_V 同変層のなす導来圏を表す.

V 上の旗とは, I で添字付けられた部分線型空間の列

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = V$$

であって, $\dim_{\mathbb{C}} F_k = k$ を満たすものである. 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し $\dim_{\mathbb{C}}\big(F_k \cap V_{\nu_k}\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(F_{k-1} \cap V_{\nu_k}\big) + 1$ を満たす唯一の元 $\nu_k \in I$ をとり, それを並べた $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in I^n$ を旗 $F = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$ の型と呼ぶ. $\mathcal{F}_V$ を V 上の旗全体の集合とする. また

$$\tilde{\mathcal{F}}_V \coloneqq \{(x, F) \in E_V \times \mathcal{F}_V \mid xF_k \subset F_{k-1} \ (k = 1, 2, \ldots, n)\}$$

と定める. これには smooth な代数多様体の構造が入り, 第 1 成分への射影 $p\colon \tilde{\mathcal{F}}_V \to E_V$ は G_V 同変な固有射である. したがって Beilinson–Bernstein–Deligne–Gabber の分解定理により, $\tilde{\mathcal{F}}_V$ 上の定数層 $\underline{\mathbb{C}}_{\tilde{\mathcal{F}}_V}$ の p による押し出しは, E_V 上の単純な G_V 同変偏屈層 L により

$$\mathbf{R}p_*\underline{\mathbb{C}}_{\tilde{\mathcal{F}}_V} \simeq \bigoplus_L W_L \otimes_{\mathbb{C}} L \quad (W_L\colon \text{次数付き } \mathbb{C} \text{ 線型空間})$$

と分解される. ここで $\mathcal{P}_V$ をこの分解に現れる単純 G_V 同変偏屈層 L を集めたクラスとし, $\mathcal{Q}_V$ を $L \in \mathcal{P}_V$ の鎖の次数をずらしたものの直和を全て集めた $\mathcal{D}^b_{G_V}(E_V)$ の充満部分圏とする. 言い換えると, $\mathcal{Q}_V$ は $\mathbf{R}p_*\underline{\mathbb{C}}_{\tilde{\mathcal{F}}_V}$ を

含み直和と直和分解と次数シフトで閉じている充満部分圏のうち最小のものである．Grothendieck 群 $K(\mathcal{Q}_V)$ には次数シフトにより $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ の作用が定まる．Lusztig はこの圏 $\mathcal{Q}_V$ が量子群の categorification を与えることを証明した．

定理 9.2.1 (Lusztig [Lus91])**.** 各 $\beta = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ に対し，$V(\beta) := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}^{n_i}$ とおく．すると各 $\beta, \gamma \in \mathsf{Q}_+$ に対し関手 $\mathcal{Q}_{V(\beta)} \times \mathcal{Q}_{V(\gamma)} \to \mathcal{Q}_{V(\beta+\gamma)}$ が定義され，これで誘導される積により $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 代数の同型

$$\bigoplus_{\beta\in\mathsf{Q}_+} K(\mathcal{Q}_{V(\beta)}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$$

が得られる．また $\{[L] \mid \beta \in \mathsf{Q}_+,\ L \in \mathcal{P}_{V(\beta)}\}$ は左辺の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の基底をなし，この同型により $U_q^-(\mathfrak{g})$ の下側大域基底と一致する．Verdier 双対は $U_q^-(\mathfrak{g})$ 上の bar involution に対応する．

これを基に Varagnolo–Vasserot は，KLR 代数がこの圏の上で Ext 代数として実現されることを見出した．

定理 9.2.2 (Varagnolo–Vasserot [VV11b])**.** $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し多項式 $Q_{ij}(u, v)$ を

$$Q_{ij}(u, v) := (u - v)^{h_{ji}}(v - u)^{h_{ij}}$$

と定め，これらで定義される $\mathbb{C}$ 上の KLR 代数を $R(\beta)$ とする．このとき次数付き $\mathbb{C}$ 代数の同型

$$\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{D}^b_{G_{V(\beta)}}(E_{V(\beta)})}(\mathbf{R}p_*\mathbb{C}_{\tilde{\mathcal{F}}_{V(\beta)}}) \simeq R(\beta)$$

が成り立つ． ここで層の鎖の次数シフトを $[k]$ と書き，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}(X, Y) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(X, Y[k])$, $\mathrm{End}^{\mathrm{gr}}(X) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{gr}}(X, X)$ などとおいた．

たとえば $R(\beta)$ での冪等元分解 $e(\beta) = \sum_{\nu\in I^\beta} e(\nu)$ は，旗の型に応じた $\tilde{\mathcal{F}}_{V(\beta)}$ の連結成分への分解 (によって引き起こされる $\mathbf{R}p_*\mathbb{C}_{\tilde{\mathcal{F}}_{V(\beta)}}$ の直和分解) に対応する．この定理から直ちに次の系が従う．

系 9.2.3. 圏同値 $\mathcal{Q}_{V(\beta)} \simeq R(\beta)$-gproj が成り立つ．特にそれぞれの直既約対象は 1:1 対応する．

Lusztig の結果と合わせると，一般化 Cartan 行列が対称な場合，KLR 代数の直既約射影的加群がちょうど大域基底に対応することがわかる．

9.3 KLR 代数のバリエーション

現在では KLR 代数の様々な類似物が考えられており, それぞれ動機や categorify する対象が異なる.

- KLR スーパー代数[14][KKT] はアフィン Hecke 代数のスーパー版であるアフィン Hecke–Clifford スーパー代数に対応するものである. この代数では各 $i \in I$ に偶奇の parity が付与され, それに応じて $x_k e(\nu)$ や $\tau_k e(\nu)$ の交換関係に符号がつく.
- B 型 [VV11a] と D 型 [SVV11] のアフィン Hecke 代数に対応する KLR 代数. これらは Cartan 行列の実現とその上の involution から定義される量子群の変種を categorify する.
- 一般化 Kac–Moody Lie 代数の量子群を categorify する KLR 代数 [KKO11]. この場合は虚単純ルートに対応する KLR 代数が nilHecke 代数とは同型にならず, 多項式表現の τ_k には差分商作用素の代わりにその多項式倍が当てられる.

参考文献

[Ari96] Susumu Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), no. 4, 789–808.

[Ari00] ———, **$A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論**, 上智大学数学講究録, vol. 43, 上智大学数学教室, 2000.

[BBD82] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, analyse et topologie sur les espaces singuliers, (I) (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171.

[BK09] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 451–484.

[14] あるいは箙 Hecke スーパー代数.

[DJ86] Richard Dipper and Gordon James, *Representations of Hecke algebras of general linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), no. 1, 20–52.

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, third ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Kas91] Masaki Kashiwara, *On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 465–516.

[Kas93] ———, *Global crystal bases of quantum groups*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 2, 455–485.

[Kas95] ———, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 155–197.

[Kas12] ———, *Notes on parameters of quiver Hecke algebras*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **88** (2012), no. 7, 97–102.

[KK12] Seok-Jin Kang and Masaki Kashiwara, *Categorification of highest weight modules via Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Invent. Math. **190** (2012), no. 3, 699–742.

[KKO11] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, and Se-jin Oh, *Categorification of highest weight modules over quantum generalized Kac-Moody algebras*, arXiv:1106.2635.

[KKO13] ———, *Supercategorification of quantum Kac-Moody algebras II*, arXiv:1303.1916.

[KKT] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, and Shunsuke Tsuchioka, *Quiver Hecke superalgebras*, arXiv:1107.1039.

[KL09] Mikhail Khovanov and Aaron D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups* I, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[KL11] ———, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups* II, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 5, 2685–2700.

[LLT96] Alain Lascoux, Bernard Leclerc, and Jean-Yves Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), no. 1, 205–263.

[Lec04] Bernard Leclerc, *Dual canonical bases, quantum shuffles and q-characters*, Math. Z. **246** (2004), no. 4, 691–732.

[Lus90a] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 447–498.

[Lus90b] ———, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras* II, Progr. Theoret. Phys. Suppl. (1990), no. 102, 175–201 (1991), Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990).

[Lus91] ———, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 2, 365–421.

[Lus94] ———, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, **110**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, xii+341 pp.

[Rou] Raphaël Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023.

[SVV11] P. Shan, M. Varagnolo, and E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type D*, Adv. Math. **227** (2011), no. 1, 267–291.

[VV11a] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type B*, Invent. Math. **185** (2011), no. 3, 593–693.

[VV11b] ———, *Canonical bases and KLR-algebras*, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 67–100.

索 引