

Masaki Kashiwara

rédigé par Charles Cochet

**BASES CRISTALLINES DES
GROUPES QUANTIQUES**

M. Kashiwara

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University,
Kyoto, 606-8502, Japan.

E-mail : masaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

Url : <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kashiwara/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 17B37.

Mots clefs. — base cristalline, groupe quantique.

Ce cours a été dispensé alors que l'auteur bénéficiait d'une « Chaire de Recherche Internationale Blaise Pascal » de l'État et de la Région Ile-de-France, gérée par la Fondation de l'École Normale Supérieure.

**BASES CRISTALLINES DES GROUPES
QUANTIQUES**

Masaki Kashiwara

rédigé par Charles Cochet

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	vii
1. Représentations de l'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$	1
1.1. Définition	1
1.2. Entiers q -analogues	4
1.3. Modules de dimension finie sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$	8
1.4. Intégrabilité des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules	12
2. Bases cristallines des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-modules	17
2.1. Bases locales en $q = 0$	17
2.2. Bases cristallines	18
2.3. Cristaux sur \mathfrak{sl}_2	23
3. L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$	31
3.1. Définition de $U_q(\mathfrak{g})$	31
3.2. Modules de plus haut poids sur $U_q(\mathfrak{g})$	37
3.3. La catégorie \mathcal{O}_{int}	43
3.4. Groupe de Weyl et ordre de Bruhat	45
3.5. Semi-simplicité de la catégorie \mathcal{O}_{int}	47
4. Bases cristallines des $U_q(\mathfrak{g})$-modules	53
4.1. Bases cristallines	53
4.2. Cristaux sur \mathfrak{g}	56
4.3. Exemples de cristaux	58
5. Cas de \mathfrak{gl}_n	63
5.1. La représentation vectorielle	63
5.2. Tableaux de Young	65

5.3. Règle de Littlewood-Richardson	70
6. Bases globales des $U_q(\mathfrak{g})$-modules	79
6.1. Triplet équilibré	79
6.2. Propriétés des bases globales	84
7. Base cristalline $B(\infty)$ de l'algèbre $U_q^-(\mathfrak{g})$	89
7.1. Construction de la base $B(\infty)$	89
7.2. Description de $B(\infty)$	94
7.3. Exemple dans le cas de \mathfrak{sl}_3	98
8. Réalisation des bases cristallines par des chemins	101
8.1. Gonflage de cristaux	101
8.2. Structure cristalline sur l'ensemble des chemins	106
8.3. Plongement de $B(\lambda)$ dans le cristal des chemins	111
9. Cristaux et groupe de Weyl	119
9.1. Décomposition des bases cristallines selon W	119
9.2. Formule du caractère de Demazure-Littelmann	122
9.3. Cristaux normaux	124
9.4. Action du groupe de Weyl sur les cristaux normaux	127
Bibliographie	131
Index des notations	135
Index terminologique	139

INTRODUCTION

Depuis leur introduction par Drinfeld ([4]) et Jimbo ([8]) en 1985 lors de l'étude des modèles exacts solubles, les algèbres enveloppantes quantiques sont devenues un des outils principaux pour décrire de nouvelles symétries. L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} contient un paramètre q . Lorsque $q = 1$, on retrouve l'algèbre enveloppante classique. Dans le contexte des modèles exacts solubles, le paramètre q représente la température et $q = 0$ correspond au zéro absolu.

À l'origine des bases cristallines est l'idée que la situation devait être plus simple au zéro absolu. Effectivement, en $q = 0$ on peut trouver une bonne base (dite *base cristalline*) des représentations de $U_q(\mathfrak{g})$. De plus, une action modifiée des vecteurs racines envoie la base cristalline sur elle-même, lui conférant une structure combinatoire riche. Nous pouvons ainsi réduire de nombreuses propriétés des représentations à la combinatoire des bases cristallines.

La notion de base cristalline fut introduite dans [11]. À la même période, G. Lusztig ([24]) définit les bases canoniques en analysant le travail de Ringel ([30]), qui construit le groupe quantique comme l'algèbre de Hall associée à un carquois. Il est intéressant de remarquer que ces notions similaires ont été cependant introduites avec des motivations très différentes.

Dans ce cours, nous présenterons les bases cristallines ainsi que leur application au calcul des multiplicités des poids et des coefficients du produit tensoriel de deux représentations.

Ce texte a été rédigé par Charles Cochet à partir d'un cours donné à l'Université Paris VI dans le cadre du DEA « Méthodes Algébriques »

à l'automne 2000. Je tiens à le remercier chaleureusement pour son excellent travail. Je tiens également à remercier Pierre Schapira, Michèle Vergne, Andrea D'Agnolo, Bernard Leclerc ainsi que tous les membres de l'Équipe d'Analyse Algébrique de Paris VI, grâce auxquels mon séjour à Paris fut fructueux et agréable.

Masaki Kashiwara
à Kyoto
septembre 2001

CHAPITRE 1

REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE QUANTIQUE $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

L'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est une déformation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} . Puisque toute algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est engendrée par ses sous-algèbres isomorphes à $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ est fondamental. Nous commencerons donc par son étude.

1.1. Définition

Fixons un corps K de caractéristique arbitraire. L'algèbre $\mathfrak{sl}_2(K)$ classique est l'algèbre de Lie sur K engendrée par les éléments

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dans l'espace des matrices 2×2 à coefficients dans K . Leurs crochets sont donnés par

$$(1.1.1) \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{sl}_2(K)) = U(\mathfrak{sl}_2)$ est la K -algèbre engendrée par trois symboles e, f, h avec (1.1.1) pour relations de définition, où $[x, y]$ s'interprète comme $xy - yx$. Les représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{sl}_2)$ sont bien comprises, comme l'atteste le

Théorème 1.1.1. — *Supposons K de caractéristique nulle.*

(1) *Les $U(\mathfrak{sl}_2)$ -modules simples (dont les seuls sous-modules sont 0 et eux-mêmes) sont les produits symétriques $S^n(K^2)$ de K^2 , $n \geq 0$.*

(2) *Tout $U(\mathfrak{sl}_2)$ -module de dimension finie est semi-simple, c'est-à-dire somme directe de modules simples.*

Le produit tensoriel de deux $U(\mathfrak{sl}_2)$ -modules M et N est muni d'une structure de $U(\mathfrak{sl}_2)$ -module définie par $x \cdot (u \otimes v) = (xu) \otimes v + u \otimes (xv)$ pour $u \in M$, $v \in N$ et $x = e, f, h$.

Fixons un élément q de K non nul et non racine de l'unité. L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ de \mathfrak{sl}_2 est la K -algèbre engendrée par quatre symboles e, f, t, t^{-1} avec les relations de définition

$$\begin{aligned} tt^{-1} &= t^{-1}t = 1, \\ tet^{-1} &= q^2e, \\ tft^{-1} &= q^{-2}f, \\ [e, f] &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

En posant $t = q^h$ et en faisant tendre q vers 1, nous retrouvons l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{sl}_2)$ (voir page 41 pour le sens précis).

Lemme 1.1.2. — *Il existe un unique homomorphisme de K -algèbres $\Delta = \Delta_-$ de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dans $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$, appelé co-produit, tel que*

$$(1.1.2) \quad e \mapsto e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e,$$

$$(1.1.3) \quad f \mapsto f \otimes 1 + t \otimes f,$$

$$(1.1.4) \quad t^{\pm 1} \mapsto t^{\pm 1} \otimes t^{\pm 1}.$$

Ici la multiplication dans $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est donnée par $(a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2)$.

Démonstration. — Il nous faut prouver que

$$\begin{aligned} \Delta(t)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(t^{-1})\Delta(t) = 1, \\ \Delta(t)\Delta(e)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(q^2e), \\ \Delta(t)\Delta(f)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(q^{-2}f), \\ [\Delta(e), \Delta(f)] &= \Delta((t - t^{-1})/(q - q^{-1})). \end{aligned}$$

Vérifions la dernière égalité. Nous avons $\Delta(e)\Delta(f) = ef \otimes t^{-1} + et \otimes t^{-1}f + f \otimes e + t \otimes ef$ d'une part, et $\Delta(f)\Delta(e) = fe \otimes t^{-1} + te \otimes ft^{-1} + f \otimes e + t \otimes fe$

d'autre part. Or $te = q^2et$ et $t^{-1}f = q^2ft^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} [\Delta(e), \Delta(f)] &= [e, f] \otimes t^{-1} + t \otimes [e, f] \\ &= (q - q^{-1})^{-1}((t - t^{-1}) \otimes t^{-1} + t \otimes (t - t^{-1})) \\ &= (q - q^{-1})^{-1}(t \otimes t - t^{-1} \otimes t^{-1}) \\ &= \Delta([e, f]). \end{aligned}$$

Les autres assertions se vérifient facilement. \square

Corollaire 1.1.3. — *Le produit tensoriel de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules est muni d'une structure de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module grâce au co-produit Δ .*

Pour deux $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules M_1 et M_2 , l'action de $a \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est ainsi définie par

$$a(x_1 \otimes x_2) = \sum_i (a_1^{(i)} x_1) \otimes (a_2^{(i)} x_2) \text{ pour } x_\nu \in M_\nu,$$

si $\Delta(a) = \sum_i a_1^{(i)} \otimes a_2^{(i)}$.

Remarque 1.1.4. — Bien que ce soit le cas pour les algèbres enveloppantes classiques, le produit tensoriel de modules sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ n'est pas en général symétrique. En effet, l'application $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ définie par $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ n'est pas $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -linéaire.

Remarque 1.1.5. — Il existe en fait six choix distincts de co-produit dans la littérature, à savoir

$$\begin{aligned} \Delta_0 &: e \mapsto e \otimes t^{-1/2} + t^{1/2} \otimes e, \quad f \mapsto f \otimes t^{-1/2} + t^{1/2} \otimes f, \quad t \mapsto t \otimes t, \\ \Delta_+ &: e \mapsto e \otimes 1 + t \otimes e, \quad f \mapsto f \otimes t^{-1} + 1 \otimes f, \quad t \mapsto t \otimes t, \end{aligned}$$

et Δ_- , ainsi que les trois co-produits obtenus en remplaçant $a \otimes b$ par $b \otimes a$ dans les définitions de $\Delta_0, \Delta_+, \Delta_-$. Aucun des choix n'est canonique ; ils sont cependant presque équivalents (voir à ce propos la remarque 3.5.5). Notre choix de Δ_- comme co-produit a pour avantage de bien se comporter avec les bases cristallines que nous allons introduire.

Proposition 1.1.6. — *Soient M_1, M_2, M_3 trois $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. Alors l'application $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \rightarrow M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$ qui à $(u \otimes v) \otimes w$ associe $u \otimes (v \otimes w)$ est un isomorphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. Ainsi, le produit tensoriel de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules est associatif.*

Ce résultat découle du

Lemme 1.1.7. — *Le co-produit vérifie $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ (égalité en tant qu'applications de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dans $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$).*

Démonstration. — En effet, les éléments $(\Delta \otimes 1)\Delta e = (\Delta \otimes 1)(e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e) = (e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e) \otimes t^{-1} + (1 \otimes 1) \otimes e$ et $(1 \otimes \Delta)\Delta e = (1 \otimes \Delta)(e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e) = e \otimes (t^{-1} \otimes t^{-1}) + 1 \otimes (e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e)$ sont égaux. Les égalités pour f et t se démontrent de façon analogue. \square

Définissons un morphisme de K -algèbres $\varepsilon: U_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow K$, appelé *co-unité*, par $\varepsilon(t^{\pm 1}) = 1$ et $\varepsilon(e) = \varepsilon(f) = 0$. Le corps K est alors un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module pour l'action $a \cdot 1 = \varepsilon(a)$.

Proposition 1.1.8. — *Si M est un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module, les applications*

$$\begin{aligned} K \otimes M &\xrightarrow{\sim} M, & 1 \otimes u &\mapsto u, \\ M \otimes K &\xrightarrow{\sim} M, & u \otimes 1 &\mapsto u, \end{aligned}$$

sont des isomorphismes de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules.

C'est une conséquence du résultat immédiat suivant :

Lemme 1.1.9. — *Nous avons $(\varepsilon \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta = 1$ en tant qu'endomorphismes de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.*

Remarque 1.1.10. — Les applications Δ et ε munissent $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ d'une structure de co-gèbre. En fait, l'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est une *algèbre de Hopf*.

1.2. Entiers q -analogues

Les équivalents des entiers, factorielles et coefficients binomiaux apparaissent naturellement lors de l'étude du monde q -analogue. Les q -entiers sont définis par $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ ($n \in \mathbb{Z}$), les q -factorielles par $[n]! = [1] \cdots [n]$ ($n \in \mathbb{N}$) et les q -coefficients binomiaux par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}$ ($0 \leq k \leq n$). Notons que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est un polynôme de Laurent en q à coefficients entiers.

Remarque 1.2.1. — Certains auteurs prennent $(q^n - 1)/(q - 1)$ pour définition de $[n]$. Notre convention a pour avantage d'être invariante par $q \mapsto q^{-1}$.

Ces éléments satisfont la

Proposition 1.2.2. — (1) Deux éléments x et y dans une K -algèbre et tels que $yx = q^2xy$ vérifient $y^b x^a = q^{2ab} x^a y^b$ ainsi que la formule du binôme q -analogue

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(n-k)} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k(n-k)} y^{n-k} x^k.$$

(2) Pour tout x dans une K -algèbre, nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + q^{1-n+2\nu} x) &:= (1 + q^{1-n} x)(1 + q^{3-n} x) \cdots (1 + q^{n-1} x) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \end{aligned}$$

pour $n \in \mathbb{N}$. En particulier

$$(1.2.1) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{mk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$$

pour tout entier m tel que $|m| \leq n - 1$ et $m \equiv n - 1 \pmod{2}$.

(3) Pour tous entiers m, n, k , on a $[n][m] + [k][n + m + k] = [n + k][m + k]$.

En remarquant que $(1 \otimes e)(e \otimes t^{-1}) = q^2(e \otimes t^{-1})(1 \otimes e)$ et $(f \otimes 1)(t \otimes f) = q^2(t \otimes f)(f \otimes 1)$, nous en déduisons le

Corollaire 1.2.3. — Le co-produit vérifie

$$\begin{aligned} \Delta(e^n) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k(n-k)} e^k \otimes e^{n-k} t^{-k}, \\ \Delta(f^n) &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k(n-k)} f^{n-k} t^k \otimes f^k. \end{aligned}$$

Les puissances divisées de e et f sont définies par $e^{(n)} = e^n/[n]!$ et $f^{(n)} = f^n/[n]!$, par convention de valeur 1 (resp. nulle) si l'entier n est

zéro (resp. strictement négatif). Les formules du corollaire précédent se réécrivent alors

$$(1.2.2) \quad \Delta(e^{(n)}) = \sum_{k=0}^n q^{-k(n-k)} e^{(k)} \otimes e^{(n-k)} t^{-k},$$

$$(1.2.3) \quad \Delta(f^{(n)}) = \sum_{k=0}^n q^{-k(n-k)} f^{(n-k)} t^k \otimes f^{(k)}.$$

Notons $\{x\} = (x - x^{-1})/(q - q^{-1})$ et $\left\{ \begin{matrix} x \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{\{x\}\{q^{-1}x\} \cdots \{q^{1-k}x\}}{[k]!}$.

En particulier $\{q^n\} = [n]$ et $\left\{ \begin{matrix} q^n \\ k \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

On utilise souvent la formule : pour x, y dans une algèbre et a dans son centre tels que $xy = ayx$, on a

$$f(x)y = yf(ax) \text{ et } xf(y) = f(ay)x \text{ pour tout polynôme } f.$$

$$\text{Par exemple } \left\{ \begin{matrix} q^n t \\ k \end{matrix} \right\} e^{(m)} = e^{(m)} \left\{ \begin{matrix} q^{n+2m} t \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Proposition 1.2.4. — *Nous avons*

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} e^{(m)} f^{(n)} &= \sum_{k \geq 0} f^{(n-k)} e^{(m-k)} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n} t \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} q^{n-m} t \\ k \end{matrix} \right\} f^{(n-k)} e^{(m-k)} \\ &= \sum_{k \geq 0} f^{(n-k)} \left\{ \begin{matrix} q^{2k-m-n} t \\ k \end{matrix} \right\} e^{(m-k)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Effectuons une récurrence sur m . Pour $m = 1$, l'égalité $e f^{(n)} = f^{(n)} e + f^{(n-1)} \{q^{1-n} t\}$ entraîne

$$\begin{aligned} [n+1] e f^{(n+1)} &= e f \cdot f^{(n)} = (f e + \{t\}) f^{(n)} \\ &= f(f^{(n)} e + f^{(n-1)} \{q^{1-n} t\}) + f^{(n)} \{q^{-2n} t\} \\ &= [n+1] f^{(n+1)} e + f^{(n)} ([n] \{q^{1-n} t\} + \{q^{-2n} t\}) \\ &= [n+1] f^{(n+1)} e + [n+1] f^{(n)} \{q^{-n} t\}, \end{aligned}$$

et la formule est vérifiée. Supposons-la vraie jusqu'au rang m . Alors l'opérateur $[m+1]e^{(m+1)}f^{(n)} = e \cdot e^{(m)}f^{(n)}$ est égal à

$$\begin{aligned}
& e \sum_{k \geq 0} f^{(n-k)} e^{(m-k)} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{k \geq 0} (f^{(n-k)}e + f^{(n-k-1)}\{q^{1-n+k}t\}) e^{(m-k)} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} \\
&= \sum_{k \geq 0} \left(f^{(n-k)} e^{(m-k+1)} [m-k+1] \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} \right. \\
&\quad \left. + f^{(n-k-1)} e^{(m-k)} \{q^{1-n+2m-k}t\} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} \right) \\
&= \sum_{k \geq 0} f^{(n-k)} e^{(m-k+1)} \\
&\quad \left([m-k+1] \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} + \delta_{k \geq 1} \{q^{2-n+2m-k}t\} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Le résultat escompté découle de l'égalité

$$[m-k+1] \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k \end{matrix} \right\} + \delta_{k \geq 1} \{q^{2-n+2m-k}t\} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n}t \\ k-1 \end{matrix} \right\} = [m+1] \left\{ \begin{matrix} q^{m+1-n}t \\ k \end{matrix} \right\}.$$

□

Théorème 1.2.5 (Poincaré-Birkhoff-Witt). — *L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ vérifie*

$$\begin{aligned}
U_q(\mathfrak{sl}_2) &= K[f] \cdot K[e] \cdot K[t, t^{-1}] = K[f] \cdot K[t, t^{-1}] \cdot K[e] \\
&= K[e] \cdot K[f] \cdot K[t, t^{-1}] = \dots
\end{aligned}$$

Démonstration. — Vérifions par exemple que $U_q(\mathfrak{sl}_2) = K[f] \cdot K[e] \cdot K[t, t^{-1}]$. Notons V le second membre. Il est évident que $V \subset U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Si nous prouvons que $eV, fV, t^{\pm 1}V \subset V$, alors $U_q(\mathfrak{sl}_2)V \subset V$ et V est un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module, d'où $U_q(\mathfrak{sl}_2) \subset V$. Or il est clair que $fV \subset V$ et $t^{\pm 1}V \subset V$; puisque $ef^{(n)} = f^{(n)}e + f^{(n-1)}\{q^{1-n}t\}$, nous avons également $eV \subset V$. □

1.3. Modules de dimension finie sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Supposons le corps K algébriquement clos et de caractéristique différente de 2 (voir la remarque 1.4.9). Soit M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de dimension finie. Afin d'étudier M , utilisons la stratégie de É. Cartan : décomposer selon l'action de t puis considérer des vecteurs de plus haut poids (annulés par e).

Pour tout $a \in K$, notons $M\langle a \rangle = \{u \in M; (t-a)^n u = 0 \text{ pour } n \gg 0\}$ l'espace propre généralisé pour la valeur propre a . Le module M se décompose alors en $M = \bigoplus_{a \in K \setminus \{0\}} M\langle a \rangle$.

Lemme 1.3.1. — Les espaces propres généralisés vérifient $eM\langle a \rangle \subset M\langle q^2 a \rangle$ et $fM\langle a \rangle \subset M\langle q^{-2} a \rangle$.

Démonstration. — L'égalité $et = q^{-2}te$ implique $e(t-a)^n = (q^{-2}t-a)^n e$. Donc pour tout $u \in M\langle a \rangle$ nous avons pour n assez grand $0 = e(t-a)^n u = (q^{-2}t-a)^n eu$, d'où $(t-q^2 a)^n eu = 0$, c'est-à-dire $eu \in M\langle q^2 a \rangle$. \square

Rappelons que q est supposé non racine de l'unité. Donc les q^n sont distincts deux à deux.

Corollaire 1.3.2 (nilpotence locale de e et f)

Tout vecteur $u \in M$ satisfait à $e^n u = f^n u = 0$ pour n assez grand.

Démonstration. — Le spectre $S := \{a; M\langle a \rangle \neq 0\}$ de t est fini, donc pour tout $a \in S$ nous avons $q^n a \notin S$ et $M\langle q^n a \rangle = 0$ pour $n \gg 0$. Il découle du lemme précédent que tout $u \in M\langle a \rangle$ vérifie $e^n u = 0$ pour $n \gg 0$. L'assertion pour f se démontre de même. \square

Supposons $M \neq 0$; il existe alors $a \in K \setminus \{0\}$ tel que $M\langle a \rangle \neq 0$. Pour $u \in M\langle a \rangle$ non nul, soit n le plus grand entier tel que $e^n u \neq 0$. Posons $v = e^n u$; ce vecteur non nul vérifie $ev = 0$ et $v \in M\langle q^{2n} a \rangle$.

Définition 1.3.3. — Un vecteur $u \in M$ est de plus haut poids s'il existe $a \in K \setminus \{0\}$ tel que $u \in M\langle a \rangle$ et $eu = 0$.

Ainsi, tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module non nul de dimension finie possède un vecteur non nul de plus haut poids.

Rappelons que la caractéristique de K est supposée non égale à 2.

Proposition 1.3.4. — Soit $u \in M\langle a \rangle$ un vecteur non nul de plus haut poids. Prenons un entier ℓ tel que $f^\ell u \neq 0$ et $f^{\ell+1}u = 0$.

(1) L'élément a est égal à $\pm q^\ell$.

(2) Le vecteur u vérifie $tu = au$.

(3) Les $f^{(n)}u$ ($0 \leq n \leq \ell$) forment une K -base de $U_q(\mathfrak{sl}_2)u$, c'est-à-dire $U_q(\mathfrak{sl}_2)u = \bigoplus_{n=0}^{\ell} Kf^{(n)}u$; de plus ils vérifient

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} tf^{(n)}u &= \pm q^{\ell-2n}f^{(n)}u, \\ ff^{(n)}u &= [n+1]f^{(n+1)}u, \\ ef^{(n)}u &= \pm[\ell-n+1]f^{(n-1)}u. \end{aligned}$$

(4) Le module $U_q(\mathfrak{sl}_2)u$ est simple (ses seuls sous-modules sont 0 et lui-même).

Démonstration. — (1) L'élément $ef^{(\ell+1)}u$ est nul et par ailleurs égal à $(f^{(\ell+1)}e + \{q^\ell t\}f^{(\ell)})u$. Or $eu = 0$, d'où $\{q^\ell t\}f^{(\ell)}u = 0$. Ainsi $((q^\ell t)^2 - 1)f^{(\ell)}u = 0$. Puisque $f^{(\ell)}u \in M\langle q^{-2\ell}a \rangle$ est non nul, on obtient $(q^{-\ell}a)^2 = 1$; au final $a = \pm q^\ell$.

(2) Nous avons $0 = e^{(\ell+1)}f^{(\ell+1)}u = \sum_{k=0}^{\ell+1} \begin{Bmatrix} t \\ k \end{Bmatrix} f^{(\ell+1-k)}e^{(\ell+1-k)}u$, d'où $\begin{Bmatrix} t \\ \ell+1 \end{Bmatrix} u = 0$. Donc

$$(t^2 - 1)((q^{-1}t)^2 - 1) \cdots ((q^{-\ell}t)^2 - 1)u = 0.$$

Puisque $a = \pm q^\ell$, le produit $(t^2 - 1)((q^{-1}t)^2 - 1) \cdots ((q^{-\ell}t)^2 - 1)$ est inversible sur $M\langle a \rangle$. Donc $((q^{-\ell}t)^2 - 1)u = 0$, c'est-à-dire $(t+a)(t-a)u = 0$. La caractéristique de K n'étant pas 2, nous en déduisons $tu = au$.

(3) Les $f^{(n)}u \in M\langle q^{-2n}a \rangle$ ($0 \leq n \leq \ell$) étant linéairement indépendants, il nous suffit de démontrer (1.3.1). La première égalité découle de $tf^{(n)}u = q^{-2n}f^{(n)}tu = \pm q^{\ell-2n}f^{(n)}u$, et la deuxième de $ff^{(n)}u = [n+1]f^{(n+1)}u$. Enfin

$$\begin{aligned} ef^{(n)}u &= (f^{(n)}e + f^{(n-1)}\{q^{1-n}t\})u \\ &= f^{(n-1)}\{q^{1-n}t\}u = \{q^{1-n}a\}f^{(n-1)}u \\ &= \pm[\ell-n+1]f^{(n-1)}u. \end{aligned}$$

(4) Soit W un sous-module non nul de $U_q(\mathfrak{sl}_2)u$. Puisque W est invariant par t , il existe un entier $k \leq \ell$ tel que $f^{(k)}u \in W$. Alors $e^{(k)}f^{(k)}u = \begin{Bmatrix} t \\ k \end{Bmatrix} u = \begin{Bmatrix} a \\ k \end{Bmatrix} u$ appartient à W . Or q n'est pas racine de unité, donc $\begin{Bmatrix} a \\ k \end{Bmatrix} \neq 0$, d'où $u \in W$ et $W = U_q(\mathfrak{sl}_2)u$. □

Définissons pour tout entier ℓ un espace vectoriel $V_\ell^\pm = \bigoplus_{k=0}^\ell K u_k^{(\ell)\pm}$ de dimension $\ell + 1$. On vérifie facilement que l'action

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} t u_k^{(\ell)\pm} &= \pm q^{\ell-2k} u_k^{(\ell)\pm}, \\ f u_k^{(\ell)\pm} &= [k+1] u_{k+1}^{(\ell)\pm}, \\ e u_k^{(\ell)\pm} &= \pm [\ell-k+1] u_{k-1}^{(\ell)\pm}, \end{aligned} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq \ell,$$

qui reproduit (1.3.1), lui confère une structure de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module. Ici $u_k^{(\ell)\pm}$ est nul à moins que $0 \leq k \leq \ell$. Le vecteur $u_k^{(\ell)\pm}$ est obtenu à partir de $u_0^{(\ell)\pm}$ par application de l'opérateur $f^{(k)}$, c'est-à-dire

$$f^{(k)} u_0^{(\ell)\pm} = u_k^{(\ell)\pm}.$$

Proposition 1.3.5. — *L'espace V_ℓ^\pm est un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple.*

Démonstration. — Le vecteur $u_0^{(\ell)\pm}$ est de plus haut poids dans V_ℓ^\pm , d'où le résultat d'après la proposition précédente. □

Proposition 1.3.6. — *Tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module simple de dimension finie est isomorphe à l'un des V_ℓ^\pm .*

Démonstration. — Un tel module M admet un vecteur u de plus haut poids, donc contient un des V_ℓ^\pm . La simplicité de M implique alors $M = V_\ell^\pm$. □

Théorème 1.3.7. — *Tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de dimension finie est une somme directe de V_ℓ^\pm .*

Afin de démontrer ce résultat, nous avons besoin du

Lemme 1.3.8. — *Soient M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de dimension finie et $a = \pm q^n$ ($n \geq 0$). Alors les opérateurs e^n et f^n induisent des isomorphismes K -linéaires $e^n: M\langle a^{-1} \rangle \xrightarrow{\sim} M\langle a \rangle$ et $f^n: M\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} M\langle a^{-1} \rangle$.*

Démonstration. — Effectuons une récurrence sur $\dim(M)$. Le résultat est clair par examen direct lorsque $M = V_\ell^\pm$. Supposons le module $M \neq 0$ quelconque. Il contient un sous- $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M' simple. Posons $M'' = M/M'$. Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'\langle a \rangle & \longrightarrow & M\langle a \rangle & \longrightarrow & M''\langle a \rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr \downarrow f^n & & \downarrow f^n & & \wr \downarrow f^n & & \\ 0 & \longrightarrow & M'\langle a^{-1} \rangle & \longrightarrow & M\langle a^{-1} \rangle & \longrightarrow & M''\langle a^{-1} \rangle & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

les suites horizontales sont exactes et les première et troisième flèches verticales sont des isomorphismes d'après l'hypothèse de récurrence. La seconde flèche verticale est un isomorphisme grâce au lemme du serpent, et ainsi $f^n: M\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} M\langle a^{-1} \rangle$. L'isomorphisme pour e^n se démontre de façon analogue. \square

Démonstration du théorème 1.3.7. — Soit M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de dimension finie. Effectuons une récurrence sur $\dim(M)$. Le théorème est vrai si $M = 0$. Supposons donc $M \neq 0$ quelconque. Il contient un sous- $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M' tel que la suite

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

soit exacte et M'' simple. Ainsi $M'' \simeq V_\ell^\pm$ est engendré par un vecteur $u_0^{(\ell)\pm} \in M''\langle a \rangle$ avec $a = \pm q^\ell$. Soit alors $u \in M\langle a \rangle$ tel que $\psi(u) = u_0^{(\ell)\pm}$. Le fait que $e\psi(u) = 0$ implique $eu \in M'_{\pm q^{2+\ell}}$. Or nous avons

$$\begin{array}{ccc} M'\langle \pm q^{-(2+\ell)} \rangle & \xrightarrow[\sim]{e^{2+\ell}} & M'\langle \pm q^{2+\ell} \rangle \\ & \searrow e^{1+\ell} & \nearrow e \\ & & M'\langle \pm q^\ell \rangle \end{array}$$

donc il existe $u' \in M'\langle a \rangle$ tel que $eu = eu'$. Ainsi $e(u - u') = 0$ et $\psi(u - u') = u_0^{(\ell)\pm}$. Le vecteur $v = u - u'$ est de plus haut poids, et $U_q(\mathfrak{sl}_2)v \rightarrow M''$ est un isomorphisme d'après la proposition 1.3.4; d'où un isomorphisme $M \simeq M' \oplus V_\ell^\pm$ et la conclusion d'après l'hypothèse de récurrence. \square

Par conséquent, un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M de dimension finie s'écrit $M = M_+ \oplus M_-$, où M_+ (resp. M_-) est une somme directe de V_ℓ^+ (resp. V_ℓ^-).

1.4. Intégrabilité des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules

Définition 1.4.1. — Un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M est *intégrable* s'il est somme directe de modules isomorphes aux V_ℓ^+ .

D'après le théorème 1.3.7, le module M est intégrable si et seulement si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ avec $M_n := \{u \in M ; tu = q^n u\}$, et pour tout $u \in M$ la dimension de $U_q(\mathfrak{sl}_2)u$ est finie. Le sous-espace M_n est appelé *espace de poids n* .

Puisque $V_\ell^- \simeq V_\ell^+ \otimes V_0^-$, tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M de dimension finie s'écrit $M = M_+ \oplus (M_- \otimes V_0^-)$ avec M_\pm intégrables, et l'on est donc ramené à l'étude des modules intégrables. Désormais, nous noterons V_ℓ le module V_ℓ^+ et $u_k^{(\ell)}$ ses générateurs $u_k^{(\ell)+}$ définis en (1.3.2).

Donnons un critère d'intégrabilité pour les $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules.

Lemme 1.4.2. — Soit M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module de décomposition en espaces de poids $M = \bigoplus_n M_n$. Si pour tout $u \in M$ il existe un entier $m > 0$ tel que $e^m u = f^m u = 0$, alors M est intégrable.

Démonstration. — Il est suffisant de prouver que $U_q(\mathfrak{sl}_2)u$ est de dimension finie pour tout $u \in M$. Or le vecteur

$$e^{(m+k)} f^{(k)} u = \sum_{\nu=0}^k \begin{Bmatrix} q^{-m} t \\ \nu \end{Bmatrix} f^{(k-\nu)} e^{(m+k-\nu)} u$$

est nul, donc le module

$$\begin{aligned} U_q(\mathfrak{sl}_2)u &= \sum_{0 \leq j, k} K e^{(j)} f^{(k)} u \\ &= \sum_{0 \leq j, 0 \leq k < m} K e^{(j)} f^{(k)} u \\ &= \sum_{0 \leq j < m+k, 0 \leq k < m} K e^{(j)} f^{(k)} u \end{aligned}$$

est de dimension finie. □

Pour tout module intégrable M de dimension finie, le *caractère* de M est $\chi(M)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim(M_n) z^n \in \mathbb{Z}[z, z^{-1}]$. Ce polynôme de Laurent vérifie $\chi(M)(z) = \chi(M)(z^{-1})$ d'après l'isomorphisme $f^n : M_n \xrightarrow{\sim} M_{-n}$.

On a $\chi(V_\ell)(z) = z^\ell + z^{\ell-2} + \dots + z^{-\ell} = (z^{\ell+1} - z^{-(\ell+1)})/(z - z^{-1})$. Les $\chi(V_\ell)$ sont donc linéairement indépendants.

Proposition 1.4.3. — Soient M, M' deux $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules intégrables.

- (1) Si $\chi(M) = \chi(M')$, alors M et M' sont isomorphes.
- (2) Le caractère de $M \otimes M'$ vérifie $\chi(M \otimes M') = \chi(M) \cdot \chi(M')$.

Démonstration. — Le premier point est immédiat. Le second provient du fait que $(M \otimes M')_n = \bigoplus_{m+m'=n} M_m \otimes M'_{m'}$. \square

Corollaire 1.4.4 (Clebsch-Gordan). — Nous avons

$$(1.4.1) \quad V_\ell \otimes V_{\ell'} \simeq \bigoplus_{\substack{|\ell-\ell'| \leq i \leq \ell+\ell' \\ i \equiv \ell+\ell' \pmod{2}}} V_i \simeq \bigoplus_{j=0}^{\min(\ell, \ell')} V_{\ell+\ell'-2j}.$$

Démonstration. — Ceci découle de l'égalité des caractères des modules en question. \square

Pour tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module M , l'application $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_\ell, M) \otimes V_\ell \longrightarrow M$ définie par $\varphi \otimes v \mapsto \varphi(v)$ est $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -linéaire.

Proposition 1.4.5. — Pour tout $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M , l'application

$$(1.4.2) \quad \bigoplus_{\ell} \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_\ell, M) \otimes V_\ell \longrightarrow M$$

est un isomorphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules.

Démonstration. — Si M est une somme directe $\bigoplus_j M_j$ de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules M_j et si la formule (1.4.2) est vraie pour tout M_j , alors elle est vraie pour M ; nous pouvons donc uniquement considérer le cas $M = V_{\ell_0}$. Le lemme de Schur implique $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_\ell, V_{\ell_0}) = K$ si $\ell = \ell_0$ et $\{0\}$ sinon, d'où $\bigoplus_{\ell} \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_\ell, M) \otimes V_\ell = K \otimes V_{\ell_0} \simeq V_{\ell_0} = M$. \square

Remarque 1.4.6. — L'espace vectoriel $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_\ell, M)$ est isomorphe par l'application $\varphi \mapsto \varphi(u_0^{(\ell)})$ à l'espace des $u \in M_\ell$ tels que $eu = 0$. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.4.

D'après la proposition 1.4.5, nous avons un isomorphisme $V_\ell \otimes V_m \simeq \bigoplus_p E_{\ell,m}^p \otimes V_p$ où $E_{\ell,m}^p = \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_p, V_\ell \otimes V_m)$ est de dimension 0 ou 1 d'après le corollaire 1.4.4. Les $E_{\ell,m}^p$ sont appelés *coefficients de Racah* ou *symboles 6-j*.

Considérons trois $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules V_ℓ, V_m, V_n et calculons leur produit tensoriel de deux façons différentes. D'une part

$$(V_\ell \otimes V_m) \otimes V_n \simeq \left(\bigoplus_p E_{\ell,m}^p \otimes V_p \right) \otimes V_n \simeq \bigoplus_{p,k} (E_{\ell,m}^p \otimes E_{p,n}^k) \otimes V_k.$$

D'autre part

$$V_\ell \otimes (V_m \otimes V_n) \simeq V_\ell \otimes \left(\bigoplus_r E_{m,n}^r \otimes V_r \right) \simeq \bigoplus_{r,k} (E_{\ell,r}^k \otimes E_{m,n}^r) \otimes V_k.$$

D'où un isomorphisme canonique

$$(1.4.3) \quad \bigoplus_p E_{\ell,m}^p \otimes E_{p,n}^k \xrightarrow{\sim} \bigoplus_r E_{\ell,r}^k \otimes E_{m,n}^r \quad \text{pour tous } \ell, m, n, k.$$

On a aussi des isomorphismes canoniques

$$E_{0,n}^n \cong E_{n,0}^n \cong K.$$

Remarque 1.4.7. — En examinant le cas $\ell = m = n = k = 1$, nous constatons que l'isomorphisme (1.4.3) dépend de q . Vérifions que l'application induite par (1.4.3) de $E_{1,1}^0 \otimes E_{0,1}^1 \cong E_{1,1}^0$ dans $E_{1,0}^1 \otimes E_{1,1}^0 \cong E_{1,1}^0$ est donnée par la multiplication par $-1/(q + q^{-1})$.

Le corollaire 1.4.4 implique $V_1 \otimes V_1 \simeq V_2 \oplus V_0$. Notons θ l'isomorphisme $(V_1 \otimes V_1) \otimes V_1 \xrightarrow{\theta} V_1 \otimes (V_1 \otimes V_1)$. Tout d'abord $(V_1 \otimes V_1) \otimes V_1 \simeq (V_2 \oplus V_0) \otimes V_1 \simeq (V_2 \otimes V_1) \oplus (V_0 \otimes V_1) \xrightarrow{\varphi} V_0 \otimes V_1 \simeq V_1$; par ailleurs $V_1 \otimes (V_1 \otimes V_1) \simeq V_1 \otimes (V_2 \oplus V_0) \simeq (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_0) \xrightarrow{\psi} V_1 \otimes V_0 \simeq V_1$. Soit $\zeta: V_1 \rightarrow V_1$ la composition $V_1 \xrightarrow{\varphi} (V_1 \otimes V_1) \otimes V_1 \xrightarrow{\theta} V_1 \otimes (V_1 \otimes V_1) \xrightarrow{\psi} V_1$. D'après le lemme de Schur, ce morphisme ζ est la multiplication par une constante $a \in K$, que nous allons maintenant déterminer. Rappelons que $V_1 = \langle u_0, u_1 \rangle$ avec $tu_0 = qu_0$, $tu_1 = q^{-1}u_1$, $u_1 = fu_0$, $u_0 = eu_1$. Puisque le vecteur $u_0 \otimes u_0 \in V_1 \otimes V_1$ est de plus haut poids, (c'est-à-dire annulé par e), le produit tensoriel $V_1 \otimes V_1$ contient le module

$$\langle u_0 \otimes u_0, f(u_0 \otimes u_0) = u_1 \otimes u_0 + qu_0 \otimes u_1, f^{(2)}(u_0 \otimes u_0) = u_1 \otimes u_1 \rangle \simeq V_2.$$

Le vecteur $w = u_0 \otimes u_1 - qu_1 \otimes u_0 \in V_1 \otimes V_1$ est de plus haut poids nul. Donc $V_1 \otimes V_1$ contient un sous-module Kw isomorphe à V_0 . On a ainsi construit un isomorphisme $V_2 \oplus V_1 \simeq V_1 \otimes V_1$. Considérons l'image de u_0 par $\zeta = \psi \circ \theta \circ \varphi$ afin de calculer a . Tout d'abord

$$\varphi(u_0) = w \otimes u_0 = (u_0 \otimes u_1 - qu_1 \otimes u_0) \otimes u_0$$

est envoyé par θ sur le vecteur $\theta \circ \varphi(u_0) = u_0 \otimes (u_1 \otimes u_0) - qu_1 \otimes (u_0 \otimes u_0)$. Or

$u_1 \otimes u_0 = (- (u_0 \otimes u_1 - qu_1 \otimes u_0) + q^{-1}(u_1 \otimes u_0 + qu_0 \otimes u_1))/(q + q^{-1})$, donc la composante de $u_1 \otimes u_0$ selon w est $-1/(q + q^{-1})$, et $\psi(u_0 \otimes (u_1 \otimes u_0)) = -1/(q + q^{-1})u_0$. Par contre, la composante de $u_0 \otimes u_0$ selon w est nulle et $\psi(u_1 \otimes (u_0 \otimes u_0)) = 0$. D'où finalement $\zeta(u_0) = -1/(q + q^{-1})u_0$ et $a = -1/(q + q^{-1})$.

On a vu précédemment que la catégorie des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules intégrables est équivalente à celle des $U(\mathfrak{sl}_2)$ -modules de dimension finie. L'observation ci-dessus souligne cependant qu'elles ne sont pas équivalentes en tant que catégories tensorielles.

Remarque 1.4.8. — Nous avons démontré que $V_1 \otimes V_1$ se décompose en composantes simples sous la forme

$$V_1 \otimes V_1 \simeq \langle u_0 \otimes u_0, u_1 \otimes u_0 + qu_0 \otimes u_1, u_1 \otimes u_1 \rangle \oplus \langle u_0 \otimes u_1 - qu_1 \otimes u_0 \rangle.$$

Pour $q \rightarrow 0$, cette expression se simplifie en $V_1 \otimes V_1 \simeq \langle u_0 \otimes u_0, u_1 \otimes u_0, u_1 \otimes u_1 \rangle \oplus \langle u_0 \otimes u_1 \rangle$. Représentons le produit tensoriel dans $V_1 \otimes V_1$ par le diagramme

$$\begin{array}{c|cc} & u_0 & u_1 \\ \hline u_0 & \circ & \longrightarrow \circ \\ & & \downarrow \\ u_1 & \circ & \circ \end{array}$$

dans lequel la non-symétrie du produit tensoriel est apparente. La théorie des bases cristallines permet de généraliser cette construction.

Remarque 1.4.9. — Dans cette section, on a supposé que K est algébriquement clos. Mais la plupart des résultats, notamment la proposition 1.3.6 et le théorème 1.3.7, sont encore vrais sous la seule hypothèse de caractéristique différente de 2.

C'est en effet une conséquence des résultats correspondants pour $\overline{K} \otimes_K U_q(\mathfrak{sl}_2)$, où \overline{K} est une clôture algébrique de K .

Remarque 1.4.10. — Quand q est une racine de l'unité, la théorie des représentations de dimension finie de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est complètement différente. Par exemple, il existe des représentations non complètement réductibles.

Exercice 1.1. — Vérifiez que (1.3.2) munit l'espace vectoriel V_ℓ^\pm d'une structure de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module.

CHAPITRE 2

BASES CRISTALLINES DES $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -MODULES

Dans ce chapitre, nous allons introduire dans le cas $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ l'objet principal de cet ouvrage, à savoir les bases cristallines. En formalisant leurs propriétés, nous définirons les cristaux. Nous constaterons en particulier que ces deux objets se comportent bien vis-à-vis du produit tensoriel.

2.1. Bases locales en $q = 0$

Considérons le corps $K = k(q)$, où k est un corps et q est une indéterminée. Le sous-anneau $A = \{f \in K ; f \text{ régulière en } q = 0\}$ de K est local, d'unique idéal maximal qA . L'application $A \rightarrow k$ définie par $f \mapsto f(0)$ induit un isomorphisme $A/qA \xrightarrow{\sim} k$. De plus $K = \bigcup_{n \geq 0} q^{-n}A$. L'anneau A est un anneau de valuation discrète ; en particulier tout sous- A -module d'un A -module libre est un A -module libre.

Soit V un K -espace vectoriel.

Définition 2.1.1. — Une *base locale* en $q = 0$ de V est une paire (L, B) où L est un sous- A -module libre de V tel que $K \otimes_A L = V$ et B est une base du k -espace vectoriel L/qL .

Remarque 2.1.2. — Pour toute base $\{u_i\}_{i \in I}$ de V , le couple (L, B) avec $L = \sum_i Au_i$ et $B = \{u_i \bmod qL\}_{i \in I}$ est une base locale de V . Réciproquement, toute base locale (L, B) de V est obtenue de la sorte. En fait, soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une base de L . On peut écrire $b \equiv \sum_i a_{b,i}u_i \bmod qL$ et $u_i \equiv \sum_b c_{i,b}b \bmod qL$ avec $a_{b,i}, c_{i,b} \in k$. Alors $(a_{b,i})$ et $(c_{i,b})$ sont des

matrices inverses l'une de l'autre. Donc $v_b := \sum_i a_{b,i} u_i$ est une base de L et $b \equiv v_b \pmod{qL}$.

Remarque 2.1.3. — Soient deux bases $\{u_i\}_{i \in I}$ et $\{v_j\}_{j \in J}$ de V . Alors $v_j = \sum_i a_{j,i} u_i$ avec $a_{j,i} \in K$. Elles sont égales en tant que bases locales si et seulement si $a_{j,i} \in A$ et s'il existe une bijection $\varphi: J \xrightarrow{\sim} I$ telle que $a_{j,i}(0) = \delta_{\varphi(j),i}$.

Remarque 2.1.4. — (1) Soit $\{V_j\}_{j \in J}$ une famille de K -espaces vectoriels munis de bases locales (L_j, B_j) . La somme directe $\bigoplus_j V_j$ admet pour base locale $(\bigoplus_j L_j, \bigsqcup_j B_j)$. Elle est notée $\bigoplus_j (L_j, B_j)$.

(2) Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur K munis de bases locales (L_1, B_1) et (L_2, B_2) . Le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ admet $(L_1 \otimes_A L_2, B_1 \otimes B_2)$ pour base locale. Ici

$$\begin{aligned} B_1 \otimes B_2 &:= \{b_1 \otimes b_2; b_1 \in B_1 \text{ et } b_2 \in B_2\} \\ &\subset (L_1/qL_1) \otimes_k (L_2/qL_2) \simeq (L_1 \otimes_A L_2)/q(L_1 \otimes_A L_2). \end{aligned}$$

Cette base locale est notée $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$.

2.2. Bases cristallines

Dès maintenant et jusqu'à la fin de ce livre on suppose que $K = k(q)$, où k est un corps de caractéristique nulle et q est une indéterminée.

Revenons aux $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules intégrables. Le module simple V_ℓ , de base $\{u_\nu^{(\ell)}\}_{0 \leq \nu \leq \ell}$, admet pour base locale le couple

$$(L(V_\ell), B(V_\ell)) := \left(\sum_{\nu} A u_\nu^{(\ell)}, \{u_\nu^{(\ell)} \pmod{qL(V_\ell)}\} \right).$$

Définition 2.2.1. — Soient M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable et (L, B) une base locale en $q = 0$ de M . Elle est dite *base cristalline* s'il existe un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\nu} V_{\ell_\nu}$ par lequel les bases locales (L, B) de M et $\bigoplus_{\nu} (L(V_{\ell_\nu}), B(V_{\ell_\nu}))$ de $\bigoplus_{\nu} V_{\ell_\nu}$ soient en bijection.

Cette définition est peu maniable; cherchons une autre caractérisation des bases cristallines.

Lemme 2.2.2. — Soient M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable et $u \in M_n$ un élément de poids $n \in \mathbb{Z}$. Alors u s'écrit de manière unique sous la forme

$$(2.2.1) \quad u = \sum_{m \geq 0, -n} f^{(m)} v_m \quad \text{avec } v_m \in M_{n+2m} \text{ tel que } ev_m = 0.$$

Démonstration. — On se ramène au cas $M = V_\ell$, dans lequel le lemme est évident. \square

Remarque 2.2.3. — Lorsque $m < -n$, on a $m > n + 2m$ et ainsi $f^{(m)} v_m = 0$.

Définition 2.2.4. — Définissons deux endomorphismes \tilde{e}, \tilde{f} de M par

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{e}u &= \sum_{m \geq 1, -n} f^{(m-1)} v_m = \sum_{m \geq 0, -n-1} f^{(m)} v_{m+1}, \\ \tilde{f}u &= \sum_{m \geq 0, -n} f^{(m+1)} v_m = \sum_{m \geq 0, -n+1} f^{(m+1)} v_m \\ &= \sum_{m \geq 1, -n+2} f^{(m)} v_{m-1} \end{aligned}$$

pour tout $u \in M_n$. Ici v_m est donné par (2.2.1).

Cette construction est en fait fonctorielle : tout morphisme $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -linéaire $M \rightarrow M'$ commute avec \tilde{e} et \tilde{f} . Par ailleurs, dans le cas de $M = V_\ell$ nous avons $\tilde{e}u_\nu^{(\ell)} = u_{\nu-1}^{(\ell)} = [\ell - \nu + 1]^{-1} e u_\nu^{(\ell)}$ et $\tilde{f}u_\nu^{(\ell)} = u_{\nu+1}^{(\ell)} = [\nu + 1]^{-1} f u_\nu^{(\ell)}$.

L'image et le noyau de \tilde{e} (resp. \tilde{f}) sont égaux à ceux de e (resp. f). Notons que \tilde{e} et \tilde{f} sont deux opérateurs localement nilpotents.

Théorème 2.2.5. — Soit (L, B) une base locale en $q = 0$ d'un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M . Alors (L, B) est une base cristalline si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

(1) Soient $L_n = L \cap M_n$ et $B_n = B \cap (L_n/qL_n)$. Alors $L = \bigoplus_n L_n$ et $B = \bigsqcup_n B_n$.

(2) Nous avons $\tilde{e}L \subset L$ et $\tilde{f}L \subset L$ (et ainsi \tilde{e}, \tilde{f} induisent des endomorphismes de L/qL , désignés par les mêmes symboles).

(3) Nous avons $\tilde{e}B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}B \subset B \sqcup \{0\}$.

(4) Soient $b, b' \in B$; alors $b' = \tilde{e}b$ si et seulement si $\tilde{f}b' = b$.

Remarque 2.2.6. — Remarquons que les conditions (3) et (4) impliquent pour tout entier positif n les conditions

- (3)_n Nous avons $\tilde{e}^n B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}^n B \subset B \sqcup \{0\}$.
 (4)_n Soient $b, b' \in B$; alors $b' = \tilde{e}^n b$ si et seulement si $\tilde{f}^n b' = b$.

Les conditions du théorème sont clairement nécessaires. Par contre, démontrer leur suffisance est délicat et nécessite plusieurs étapes.

Notons B^h l'ensemble des éléments de plus haut poids de la base cristalline B , c'est-à-dire $B^h := \{b \in B; \tilde{e}b = 0\}$.

Posons de façon similaire

$$M^h = \{u \in M; eu = 0\}.$$

L'espace M^h se décompose en espaces de poids

$$M^h = \bigoplus_{n \geq 0} M_n^h.$$

Alors $M_n^h \simeq \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(V_n, M)$ et

$$\bigoplus_{n \geq 0} M_n^h \otimes V_n \xrightarrow{\simeq} M.$$

Lemme 2.2.7. — *Supposons réunies les conditions du théorème 2.2.5. Soit $u = \sum_{m \geq 0, -n} f^{(m)}v_m$ avec $v_m \in M_{n+2m}^h$. Si $u \in L_n$, alors $v_m \in L$ et $f^{(k)}v_m \in L$ pour tout k .*

Démonstration. — Puisque $u = \sum_{-n, 0 \leq m \leq r} f^{(m)}v_m$ pour un r , effectuons une récurrence sur r . Pour $r = 0$, le résultat est clair. Supposons donc le lemme vrai jusqu'au rang $r - 1$. L'élément $\tilde{e}u = \sum_{-n, 1 \leq m \leq r} f^{(m-1)}v_m = \sum_{-n-1, 0 \leq m \leq r-1} f^{(m)}v_{m+1}$ est dans L . L'hypothèse de récurrence implique que $v_m \in L$ pour tout $m > 0$. Les vecteurs $f^{(m)}v_m = \tilde{f}^m v_m$ sont dans L , d'où $u - v_0 = \sum_{m > 0} f^{(m)}v_m \in L$ et $v_0 \in L$. \square

Lemme 2.2.8. — (1) *Les éléments de plus haut poids B^h de la base cristalline vérifient $B^h \subset (M^h \cap L)/(M^h \cap qL) \subset L/qL$.*

(2) *Si $b \in B_n^h := B^h \cap B_n$, alors $n \geq 0$; de plus $\tilde{f}^k b \in B$ pour $0 \leq k \leq n$ et $\tilde{f}^{n+1} b = 0$.*

(3) *La base B est partitionnée en $B = \bigsqcup_{n \geq 0, b \in B_n^h} \{\tilde{f}^k b; 0 \leq k \leq n\}$.*

Démonstration. — (1) Soit $b \in B_n^h$. Prenons un représentant $u \in L_n$ de b . Ecrivons $u = \sum_{m \geq 0, -n} f^{(m)} v_m$ avec $v_m \in M_{n+2m}^h$. Puisque $\tilde{e}b = 0$, le vecteur $\tilde{e}u = \sum_{m \geq 1, -n} f^{(m-1)} v_m$ appartient à qL . Ainsi $v_m \in qL$ pour $m \geq 1$ d'après le lemme précédent, d'où $b \equiv v_0 \pmod{qL}$.

(2) L'inégalité $n \geq 0$ découle de (1). Prenons $u \in M_n^h \cap L$ tel que $b \equiv u \pmod{qL}$. Alors $\tilde{f}^n b \equiv f^{(n)} u$ et $\tilde{e}^n \tilde{f}^n b \equiv u$, donc $\tilde{e}^n \tilde{f}^n b = b$. Par conséquent $\tilde{f}^k b \neq 0$ pour $0 \leq k \leq n$, d'où $\tilde{f}^k b$ appartient à B d'après (3)_k. Enfin $\tilde{f}^{n+1} b \equiv f^{(n+1)} u = 0$.

(3) Puisque l'endomorphisme \tilde{e} est localement nilpotent, il existe pour tout $b \in B$ un entier n tel que $\tilde{e}^n b = 0$. Donc nous pouvons trouver $n \geq 0$ vérifiant $\tilde{e}^n b \neq 0$ et $\tilde{e}^{n+1} b = 0$. D'après (3)_n, le vecteur $b' = \tilde{e}^n b$ appartient à B et ainsi à B^h ; finalement $b = \tilde{f}^n b'$ d'après (4)_n.

Il nous reste à démontrer que si $b, b' \in B^h$ sont tels que $\tilde{f}^k b = \tilde{f}^{k'} b' \in B$, alors $b = b'$ et $k = k'$. Mais ceci est évident d'après les hypothèses du théorème 2.2.5.

□

Lemme 2.2.9. — *Le couple $(M^h \cap L, B^h)$ est une base locale de M^h .*

Démonstration. — Puisqu'un sous- A -module d'un A -module libre est libre, le sous- A -module $L^h := M^h \cap L$ de M^h est libre; il vérifie par ailleurs $M^h = K \cdot L^h$. Donc il est suffisant de vérifier que B^h est une base de l'espace vectoriel L^h/qL^h sur k . Or nous savons déjà que B^h est contenu dans L^h/qL^h . Il nous suffit ainsi de démontrer que B^h engendre L^h/qL^h . Remarquons que tout $x \in L^h/qL^h$ satisfait à $\tilde{e}x = 0$. Donc si l'on écrit $x = \sum_{b \in B} c_b b$ avec $c_b \in k$, alors $0 = \sum_{b \in B} c_b \tilde{e}b = \sum_{\tilde{e}b \neq 0} c_b \tilde{e}b$. Les éléments de B sont tous distincts, ainsi $\{\tilde{e}b\}_{b \in B \setminus B^h}$ est libre. La constante c_b est alors nulle si $\tilde{e}b \neq 0$ et x s'exprime sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de B^h . □

Démonstration du théorème 2.2.5. — La conjonction du lemme 2.2.9 et de la remarque 2.1.2 nous assure de l'existence d'une base $\{u_b\}_{b \in B^h}$ de $M^h \cap L$ telle que $b \equiv u_b \pmod{qL}$. Le *poids* de b est l'entier $n = \text{wt}(b)$ tel que $b \in B_n$; ainsi $u_b \in L_{\text{wt}(b)}$. Puisque les u_b sont des vecteurs de plus haut poids, l'application $u_0^{(\text{wt}(b))} \mapsto u_b$ s'étend en un morphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules $V_{\text{wt}(b)} \hookrightarrow M$; cette injection vérifie $L(V_{\text{wt}(b)}) \longrightarrow L$. Nous en

déduisons un isomorphisme $\varphi : M' \xrightarrow{\sim} M$, en notant $M' = \bigoplus_{b \in B^h} V_{\text{wt}(b)}$. Nous identifierons M et M' par φ .

Posons $(L', B') = \bigoplus_{b \in B^h} (L(V_{\text{wt}(b)}), B(V_{\text{wt}(b)}))$. Alors le lemme 2.2.7 implique $L = \sum_n f^{(n)}(M^h \cap L)$, d'où $L' = L$. Le fait que les bases cristallines B' et B soient égales est une conséquence du lemme 2.2.8 (3). \square

Remarque 2.2.10. — La condition (4) du théorème 2.2.5 est nécessaire. Prenons par exemple $M = V_2 \oplus V_0$, $L = \langle u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)} \rangle \oplus \langle u_0^{(0)} \rangle$ et $B = \{u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_0^{(0)} + u_1^{(2)}\}$. Alors (L, B) est une base locale de V satisfaisant à toutes les conditions du théorème 2.2.5, exceptée (4).

Considérons B comme un graphe orienté avec $b \longrightarrow b'$ si $b' = \tilde{f}b$. Le lemme 2.2.8 (3) implique que B est une réunion disjointe de ses composantes connexes

$$\circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \dots \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ$$

appelées *chaînes* (par analogie avec la théorie des algèbres de Lie). Rappelons que le poids de $b \in B$ est l'entier $n = \text{wt}(b)$ tel que $b \in B_n$. Notons $\varepsilon(b) = \max\{n \in \mathbb{N}; \tilde{e}^n b \neq 0\}$ et $\varphi(b) = \max\{n \in \mathbb{N}; \tilde{f}^n b \neq 0\}$. Ces entiers correspondent à

$$(2.2.3) \quad \circ \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\varepsilon(b)}} \dots \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\varphi(b)}} \overset{b}{\circ} \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\varphi(b)}} \dots \xrightarrow{\quad \quad \quad} \circ$$

La *longueur* de la chaîne contenant b est l'entier $\varepsilon(b) + \varphi(b)$.

Lemme 2.2.11. — *Le poids wt et les fonctions ε , φ sont reliés par $\varphi(b) - \varepsilon(b) = \text{wt}(b)$ pour tout $b \in B$.*

Démonstration. — Ramenons-nous au cas $M = V_\ell = \langle u_\nu; 0 \leq \nu \leq \ell \rangle$ avec $u_\nu = u_\nu^{(\ell)}$. Alors $B = \{u_\nu; 0 \leq \nu \leq \ell\}$ et $\text{wt}(u_\nu) = \ell - 2\nu$. Or la chaîne est de longueur ℓ , donc $\varepsilon(u_\nu) = \nu$ et $\varphi(u_\nu) = \ell - \nu$.

$$\overset{u_0}{\circ} \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\nu=\varepsilon(u_\nu)}} \dots \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\ell-\nu=\varphi(u_\nu)}} \overset{u_\nu}{\circ} \xrightarrow{\underbrace{\quad \quad \quad}_{\ell-\nu=\varphi(u_\nu)}} \dots \xrightarrow{\quad \quad \quad} \overset{u_\ell}{\circ}$$

D'où $\varphi(u_\nu) - \varepsilon(u_\nu) = (\ell - \nu) - \nu = \ell - 2\nu = \text{wt}(u_\nu)$. \square

Le lemme ci-dessous nous sera utile dans la suite.

Lemme 2.2.12. — Soit (L, B) une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B(n) = \{b \in B; \varepsilon(b) \geq n\}$. Alors $B(n) \subset (f^n M \cap L)/(f^n M \cap qL)$ et $(f^n M \cap L, B(n))$ est une base locale de $f^n M$.

Démonstration. — On se ramène au cas $M = V_\ell$, dans lequel l'assertion est évidente. \square

Corollaire 2.2.13. — Soit M un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable de dimension finie muni d'une base cristalline (L, B) . Pour $n \in \mathbb{N}$, les dimensions des images et noyaux des opérateurs e^n et f^n sont reliées par

$$\begin{aligned} \dim(e^n M) &= \dim(f^n M) = \#\{b \in B; \varepsilon(b) \geq n\} = \#\{b \in B; \varphi(b) \geq n\}, \\ \dim \text{Ker}(e^n : M \rightarrow M) &= \dim \text{Ker}(f^n : M \rightarrow M) \\ &= \#\{b \in B; \varepsilon(b) < n\} = \#\{b \in B; \varphi(b) < n\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.14. — Soit (L_ν, B_ν) une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M_ν ($\nu = 1, 2$). Alors la base locale $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$ de $M_1 \otimes M_2$ est une base cristalline de $M_1 \otimes M_2$.

Ce résultat sera repris et étendu dans le théorème 2.3.5.

Le diagramme (2.1) illustre le produit tensoriel de deux $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules simples (ici $V_3 \otimes V_2$).

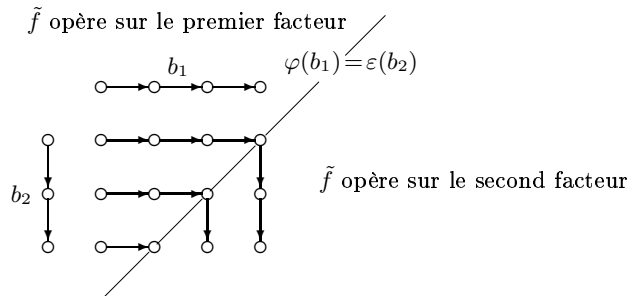


FIGURE 2.1. Produit tensoriel de V_3 et V_2 pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

2.3. Cristaux sur \mathfrak{sl}_2

La notion de cristal provient de la formalisation de l'aspect combinatoire des bases cristallines.

Définition 2.3.1. — Un *cristal* sur \mathfrak{sl}_2 est un ensemble B muni d'une application poids $\text{wt}: B \rightarrow \mathbb{Z}$, d'applications $\varepsilon, \varphi: B \rightarrow \mathbb{Z}$ et de deux applications $\tilde{e}, \tilde{f}: B \sqcup \{0\} \rightarrow B \sqcup \{0\}$ (où 0 est un élément fantôme) vérifiant :

$$(2.3.1) \quad \text{wt}(b) = \varphi(b) - \varepsilon(b) \quad \text{pour tout } b \in B,$$

$$(2.3.2) \quad \tilde{e}0 = \tilde{f}0 = 0,$$

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \varphi(\tilde{e}b) = \varphi(b) + 1 \\ \varepsilon(\tilde{e}b) = \varepsilon(b) - 1 \\ \text{wt}(\tilde{e}b) = \text{wt}(b) + 2 \end{cases} \quad \text{si } b, \tilde{e}b \in B,$$

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} \varphi(\tilde{f}b) = \varphi(b) - 1 \\ \varepsilon(\tilde{f}b) = \varepsilon(b) + 1 \\ \text{wt}(\tilde{f}b) = \text{wt}(b) - 2 \end{cases} \quad \text{si } b, \tilde{f}b \in B,$$

$$(2.3.5) \quad b = \tilde{e}b' \text{ si et seulement si } \tilde{f}b = b', \text{ pour tous } b, b' \in B.$$

Par exemple, une base cristalline est un cristal.

Pour des cristaux B_1, B_2 , un *morphisme de cristaux* $\psi: B_1 \rightarrow B_2$ est une application $\psi: B_1 \rightarrow B_2$ telle que (voir la remarque 4.2.1) :

(1) Pour tout $b \in B_1$, on a $\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b)$, $\varepsilon(\psi(b)) = \varepsilon(b)$ et $\varphi(\psi(b)) = \varphi(b)$.

(2) Pour tous $b, b' \in B_1$, si $b' = \tilde{f}b$ alors $\psi(b') = \tilde{f}\psi(b)$.

Il est facile de vérifier que les cristaux forment une catégorie.

Nous avons déjà affirmé que le produit tensoriel de bases cristallines est une base cristalline. En fait, sa structure de cristal est obtenue comme suit.

Définition 2.3.2. — Soient B_1, B_2 deux cristaux. Leur produit tensoriel est l'ensemble $B_1 \otimes B_2 = \{b_1 \otimes b_2; b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\} \simeq B_1 \times B_2$ muni d'une structure de cristal par :

$$\begin{aligned} \text{wt}(b_1 \otimes b_2) &= \text{wt}(b_1) + \text{wt}(b_2), \\ \varepsilon(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varepsilon(b_1), \varepsilon(b_2) - \text{wt}(b_1)), \\ \varphi(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varphi(b_1) + \text{wt}(b_2), \varphi(b_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} (\tilde{e}b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}b_2) & \text{si } \varphi(b_1) < \varepsilon(b_2), \end{cases} \\
\tilde{f}(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} (\tilde{f}b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi(b_1) > \varepsilon(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{f}b_2) & \text{si } \varphi(b_1) \leq \varepsilon(b_2), \end{cases} \\
0 &= 0 \otimes b_2 = b_1 \otimes 0.
\end{aligned}$$

La vérification du fait que $B_1 \otimes B_2$ est bien un cristal est aisée.

Proposition 2.3.3. — Soient trois cristaux B_1, B_2, B_3 . L'application

$$(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \longrightarrow B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3), \quad (b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 \mapsto b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3),$$

est un isomorphisme de cristaux.

Démonstration. — La bijectivité de l'application est claire. Vérifions que c'est un isomorphisme de cristaux. Pour $b_\nu \in B_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$), les deux expressions

$$\begin{aligned}
\varepsilon((b_1 \otimes b_2) \otimes b_3) &= \max(\varepsilon(b_1 \otimes b_2), \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_1 \otimes b_2)) \\
&= \max\left(\max(\varepsilon(b_1), \varepsilon(b_2) - \text{wt}(b_1)), \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_1) - \text{wt}(b_2))\right) \\
&= \max(\varepsilon(b_1), \varepsilon(b_2) - \text{wt}(b_1), \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_1) - \text{wt}(b_2))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon(b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3)) &= \max(\varepsilon(b_1), \varepsilon(b_2 \otimes b_3) - \text{wt}(b_1)) \\
&= \max\left(\varepsilon(b_1), \max(\varepsilon(b_2), \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_2)) - \text{wt}(b_1)\right)
\end{aligned}$$

sont égales.

On a d'une part

$$\begin{aligned}
\tilde{e}((b_1 \otimes b_2) \otimes b_3) &= \begin{cases} (\tilde{e}(b_1 \otimes b_2)) \otimes b_3 & \text{si } \varphi(b_1 \otimes b_2) \geq \varepsilon(b_3), \\ (b_1 \otimes b_2) \otimes \tilde{e}b_3 & \text{si } \varphi(b_1 \otimes b_2) < \varepsilon(b_3), \end{cases} \\
&= \begin{cases} ((\tilde{e}b_1) \otimes b_2) \otimes b_3 & \text{si } \varphi(b_1) + \text{wt}(b_2) \geq \varphi(b_2), \varepsilon(b_3), \\ (b_1 \otimes (\tilde{e}b_2)) \otimes b_3 & \text{si } \varphi(b_1) + \text{wt}(b_2) < \varphi(b_2) \geq \varepsilon(b_3), \\ (b_1 \otimes b_2) \otimes \tilde{e}b_3 & \text{si } \varphi(b_1) + \text{wt}(b_2), \varphi(b_2) < \varepsilon(b_3). \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \tilde{e}(b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3)) \\ &= \begin{cases} (\tilde{e}b_1) \otimes (b_2 \otimes b_3) & \text{si } \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2 \otimes b_3), \\ b_1 \otimes \tilde{e}(b_2 \otimes b_3) & \text{si } \varphi(b_1) < \varepsilon(b_2 \otimes b_3), \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\tilde{e}b_1) \otimes (b_2 \otimes b_3) & \text{si } \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2), \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_2), \\ b_1 \otimes ((\tilde{e}b_2) \otimes b_3) & \text{si } \varphi(b_1) < \varepsilon(b_2) \geq \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_2), \\ b_1 \otimes (b_2 \otimes \tilde{e}b_3) & \text{si } \varphi(b_1), \varepsilon(b_2) < \varepsilon(b_3) - \text{wt}(b_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'application $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \longrightarrow B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3)$ commute à \tilde{e} . La vérification des autres axiomes des morphismes de cristaux est similaire. \square

Corollaire 2.3.4. — *Le produit tensoriel $B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_m$ de cristaux est bien défini et est associatif.*

Des formules existent pour le calcul de wt , φ , ε , \tilde{e} et \tilde{f} dans le cas du produit tensoriel de cristaux. Pour $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$, nous avons d'une part

$$(2.3.6) \quad \text{wt}(b) = \sum_{k=1}^m \text{wt}(b_k),$$

$$(2.3.7) \quad \varepsilon(b) = \max\{\varepsilon(b_k) - \sum_{1 \leq \mu < k} \text{wt}(b_\mu); 1 \leq k \leq m\},$$

$$(2.3.8) \quad \varphi(b) = \max\{\varphi(b_k) + \sum_{k < \mu \leq m} \text{wt}(b_\mu); 1 \leq k \leq m\},$$

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} \tilde{e}b &= b_1 \otimes \cdots \otimes (\tilde{e}b_{k_e}) \otimes \cdots \otimes b_m, \\ \tilde{f}b &= b_1 \otimes \cdots \otimes (\tilde{f}b_{k_f}) \otimes \cdots \otimes b_m, \end{aligned}$$

où k_e (resp. k_f) est le plus petit (resp. grand) entier k tel que

$$\varepsilon(b) = \varepsilon(b_k) - \sum_{1 \leq \mu < k} \text{wt}(b_\mu) \quad \left(\iff \varphi(b) = \varphi(b_k) + \sum_{k < \mu \leq m} \text{wt}(b_\mu) \right).$$

D'autre part nous avons

$$(2.3.10) \quad \tilde{e}^n(b_1 \otimes b_2)$$

$$= \begin{cases} (\tilde{e}^n b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2), \\ \tilde{e}^{n-\varepsilon(b_2)+\varphi(b_1)} b_1 \otimes \tilde{e}^{\varepsilon(b_2)-\varphi(b_1)} b_2 & \text{si } \varepsilon(b_2) \geq \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2) - n, \\ b_1 \otimes \tilde{e}^n b_2 & \text{si } \varepsilon(b_2) - n \geq \varphi(b_1), \end{cases}$$

$$(2.3.11) \quad \tilde{f}^n(b_1 \otimes b_2)$$

$$= \begin{cases} (\tilde{f}^n b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2) + n, \\ \tilde{f}^{\varphi(b_1)-\varepsilon(b_2)} b_1 \otimes \tilde{f}^{n-\varphi(b_1)+\varepsilon(b_2)} b_2 & \text{si } \varepsilon(b_2) + n \geq \varphi(b_1) \geq \varepsilon(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}^n b_2 & \text{si } \varepsilon(b_2) \geq \varphi(b_1). \end{cases}$$

Ces formules se démontrent par récurrence.

La première partie du théorème suivant est une relecture du théorème 2.2.14. Sa démonstration utilise les formules

$$(2.3.12) \quad [n] \in q^{1-n}(1+qA) \quad \text{pour } n > 0,$$

$$(2.3.13) \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \in q^{-k(n-k)}(1+qA) \quad \text{pour } n \geq k \geq 0.$$

Théorème 2.3.5. — Soit (L_ν, B_ν) une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M_ν ($\nu = 1, 2$). Alors la base locale $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$ de $M_1 \otimes M_2$ est une base cristalline de $M_1 \otimes M_2$; de plus la structure de cristal sur $B_1 \otimes B_2$ induite par $M_1 \otimes M_2$ est égale au produit tensoriel des cristaux B_1 et B_2 .

Démonstration. — Ramenons-nous à $M_2 = V_\ell$. Effectuons une récurrence sur ℓ . Le cas $\ell = 0$ est évident.

Supposons $\ell = 1$. On peut se ramener au cas $M_1 = V_a$. L'assertion étant triviale pour $a = 0$, supposons $a \geq 1$. Alors on a $M_1 = \langle u_0, \dots, u_a \rangle$ et $M_2 = \langle v_0, v_1 \rangle$, avec $u_\nu = u_\nu^{(a)}$ et $v_\nu = u_\nu^{(1)}$. De plus $L_1 = \langle u_0, \dots, u_a \rangle$ et $L_2 = \langle v_0, v_1 \rangle$. Notons $L = L_1 \otimes L_2 = \sum_{n,m} A(u_n \otimes v_m)$. On a la décomposition

$$M_1 \otimes M_2 \simeq V_{a+1} \oplus V_{a-1}.$$

(1) Traitons d'abord la composante V_{a+1} . Le vecteur $u_0 \otimes v_0$ est de plus haut poids $a + 1$. D'après la formule (1.2.3), nous avons

$$\begin{aligned} f^{(n)}(u_0 \otimes v_0) &= (f^{(n)}u_0) \otimes v_0 + q^{-(n-1)}(f^{(n-1)}tu_0) \otimes (fv_0) \\ &= u_n \otimes v_0 + q^{a-n+1}u_{n-1} \otimes v_1 \end{aligned}$$

puisque $f^{(2)}v_0 = 0$. Donc

$$(2.3.14) \quad f^{(n)}(u_0 \otimes v_0) \equiv \begin{cases} u_n \otimes v_0 \bmod qL & \text{lorsque } n \leq a, \\ u_a \otimes v_1 \bmod qL & \text{lorsque } n = a + 1, \end{cases}$$

et $V_{a+1} = \langle f^{(n)}(u_0 \otimes v_0); 0 \leq n \leq a + 1 \rangle$.

(2) Maintenant, cherchons un élément de plus haut poids de V_{a-1} . Le vecteur $w = u_0 \otimes v_1 - \frac{q}{[a]}u_1 \otimes v_0$ vérifie $ew = 0$. D'après (2.3.12), il est égal à $u_0 \otimes v_1$ modulo qL . Les autres vecteurs de V_{a-1} sont obtenus par action de $f^{(n)}$ sur w . Puisque $fv_1 = 0$ et $f^{(2)}v_0 = 0$, le vecteur $f^{(n)}w$ s'exprime sous la forme

$$f^{(n)}w = (f^{(n)}u_0) \otimes v_1 - \frac{q}{[a]}((f^{(n)}u_1) \otimes v_0 + q^{-(n-1)}(f^{(n-1)}tu_1) \otimes (fv_0)).$$

Mais $f^{(n)}u_1 = f^{(n)}fu_0 = [n+1]f^{(n+1)}u_0 = [n+1]u_{n+1}$, d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}w &= u_n \otimes v_1 - \frac{q}{[a]}([n+1]u_{n+1} \otimes v_0 + q^{a-2-n+1}[n]u_n \otimes v_1) \\ &= \frac{[a] - q^{a-n}[n]}{[a]}u_n \otimes v_1 - \frac{q[n+1]}{[a]}u_{n+1} \otimes v_0. \end{aligned}$$

Par ailleurs $[a] - q^{a-n}[n] = (q^a - q^{-a} - q^{a-n}(q^n - q^{-n})) / (q - q^{-1}) = q^{-n}(q^{a-n} - q^{n-a}) / (q - q^{-1}) = q^{-n}[a - n]$, ce qui entraîne

$$(2.3.15) \quad f^{(n)}w = q^{-n} \frac{[a-n]}{[a]}u_n \otimes v_1 - \frac{q[n+1]}{[a]}u_{n+1} \otimes v_0 \begin{cases} \equiv u_n \otimes v_1 \bmod qL & \text{pour } n < a, \\ = 0 & \text{pour } n \geq a. \end{cases}$$

Notons $L' = \bigoplus_{n=0}^{a+1} Af^{(n)}(u_0 \otimes v_0) \oplus \bigoplus_{n=0}^{a-1} Af^{(n)}w$ et $B' = \{f^{(n)}(u_0 \otimes v_0); 0 \leq n \leq a + 1\} \sqcup \{f^{(n)}w; 0 \leq n \leq a - 1\} \subset L'/qL'$. Alors (L', B') est une base cristalline de $V_a \otimes V_1$. On a $L' \subset L$ et l'application $L'/qL' \rightarrow L/qL$ est surjective. Le lemme de Nakayama nous assure de la surjectivité de $L' \rightarrow L$, d'où finalement $L' = L$. De plus (2.3.14) et (2.3.15) entraînent $B' = B_1 \otimes B_2$. La base locale $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$

est donc une base cristalline de $M_1 \otimes M_2$ lorsque $M_1 = V_a$ et $M_2 = V_1$. Il est facile de voir que la structure de cristal sur $B_1 \otimes B_2$ induite par $M_1 \otimes M_2$ est égale au produit tensoriel des cristaux B_1 et B_2 .

Nous avons donc établi le théorème dans le cas $M_2 = V_\ell$ avec $\ell \leq 1$. Démontrons le théorème lorsque $M_2 = V_\ell$ avec $\ell > 1$ par récurrence sur ℓ . L'isomorphisme de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules $V_{\ell-1} \otimes V_1 \simeq V_\ell \oplus V_{\ell-2}$ induit d'après le premier cas un isomorphisme de bases cristallines

$$\begin{aligned} & (L(V_{\ell-1}), B(V_{\ell-1})) \otimes (L(V_1), B(V_1)) \\ & \simeq (L(V_\ell), B(V_\ell)) \oplus (L(V_{\ell-2}), B(V_{\ell-2})). \end{aligned}$$

et un isomorphisme de cristaux $B(V_{\ell-1}) \otimes B(V_1) \simeq B(V_\ell) \sqcup B(V_{\ell-2})$. Calculons $M_1 \otimes V_{\ell-1} \otimes V_1$ de deux façons. Le produit tensoriel

$$((L_1, B_1) \otimes (L(V_{\ell-1}), B(V_{\ell-1}))) \otimes (L(V_1), B(V_1))$$

est par hypothèse de récurrence une base cristalline de $(M_1 \otimes V_{\ell-1}) \otimes V_1$, et $(B_1 \otimes B(V_{\ell-1})) \otimes B(V_1)$ a une structure de cristal induite par le produit tensoriel des cristaux B_1 , $B(V_{\ell-1})$ et $B(V_1)$. Par conséquent

$$(L_1, B_1) \otimes ((L(V_{\ell-1}), B(V_{\ell-1})) \otimes (L(V_1), B(V_1)))$$

est une base cristalline de $M_1 \otimes (V_{\ell-1} \otimes V_1)$. Or $V_{\ell-1} \otimes V_1 \simeq V_\ell \oplus V_{\ell-2}$, donc $(M_1 \otimes V_\ell) \oplus (M_1 \otimes V_{\ell-2})$ admet pour base cristalline

$$\left((L_1, B_1) \otimes (L(V_\ell), B(V_\ell)) \right) \oplus \left((L_1, B_1) \otimes (L(V_{\ell-2}), B(V_{\ell-2})) \right).$$

Le lemme ci-dessous nous permet enfin d'affirmer que le produit tensoriel $(L_1, B_1) \otimes (L(V_\ell), B(V_\ell))$ est une base cristalline de $M_1 \otimes V_\ell$. Il est facile de voir que les deux structure de cristal sur $B_1 \otimes B(V_\ell)$, à savoir celle induite comme base cristalline de $M_1 \otimes V_\ell$ et celle du produit tensoriel de cristaux, coïncident. \square

Lemme 2.3.6. — Soit (L_ν, B_ν) une base locale en $q = 0$ d'un $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module intégrable M_ν ($\nu = 1, 2$). Si $(L_1, B_1) \oplus (L_2, B_2)$ est une base cristalline de $M_1 \oplus M_2$, alors (L_ν, B_ν) est une base cristalline de M_ν ($\nu = 1, 2$).

Démonstration. — Immédiate d'après le théorème 2.2.5. \square

Maintenant, généralisons la théorie des bases cristallines aux modules sur l'algèbre enveloppante quantique d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .

Exercice 2.1. — Soit $f: V \rightarrow V'$ un morphisme de K -espaces vectoriels. Soient (L, B) et (L', B') des bases locales en $q = 0$ de V et V' respectivement. Supposons que $f(L) \subset L'$ et que l'homomorphisme induit $L/qL \rightarrow L'/qL'$ se restreigne en une bijection $B \rightarrow B'$.

(1) Démontrez que f est un monomorphisme.

(2) Démontrez que (L, B) est isomorphe à (L', B') si V' est de dimension finie.

(3) Démontrez que (L, B) est isomorphe à (L', B') si $f: V \rightarrow V'$ est un isomorphisme. (Indication : vérifiez que $L' \cap q^{-n}f(L) \subset L' \cap q^{1-n}f(L)$ pour $n > 0$.)

(4) Donnez un exemple lorsque f n'est pas un isomorphisme.

Exercice 2.2. — Démontrez l'assertion de la remarque 2.1.3.

Exercice 2.3. — Vérifiez les formules (2.3.6)–(2.3.11).

CHAPITRE 3

L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE QUANTIQUE $U_q(\mathfrak{g})$

L'objet de ce chapitre est l'étude des modules sur l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$, généralisation de l'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ définie au premier chapitre. Nous effectuerons entre autres la décomposition des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules en modules simples $V(\lambda)$.

3.1. Définition de $U_q(\mathfrak{g})$

Soient P un \mathbb{Z} -module libre, appelé *treillis des poids*, et I un ensemble fini indexant un sous-ensemble d'éléments α_i de P , appelés *racines simples*. Pour tout $i \in I$, soit $\alpha_i^\vee = h_i \in P^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$, appelé *co-racine simple*. Soit enfin une forme bilinéaire symétrique $(\cdot, \cdot) : P \times P \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_i) &\in 2\mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ pour tout } i \in I, \\(\alpha_i, \alpha_j) &\leq 0 \text{ pour tout } i \neq j, \\ \langle h_i, \lambda \rangle &= \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \text{ pour tout } \lambda \in P.\end{aligned}$$

Par conséquent $\langle h_i, \alpha_j \rangle$ et (α_i, α_j) sont des entiers négatifs lorsque $i \neq j$ et $\langle h_i, \alpha_i \rangle = 2$. Appelons enfin $Q = \sum_i \mathbb{Z}\alpha_i$ le *treillis des racines*. On pose $Q_+ = \sum_i \mathbb{N}\alpha_i$ et $Q_- = -Q_+$.

Soient k un corps de *caractéristique nulle* et $K = k(q)$.

Définition 3.1.1. — L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est la K -algèbre engendrée par les symboles e_i, f_i et $q(h) = q^h$ pour $i \in I$ et

$h \in P^*$ avec les relations de définition suivantes :

$$\begin{aligned} q^h &= 1 \text{ si } h = 0 \text{ et } q^{h_1} q^{h_2} = q^{h_1+h_2}, \\ q^h e_i q^{-h} &= q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i \text{ et } q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i, \\ [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \text{ en notant } q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2} \text{ et } t_i = q^{(\frac{\alpha_i, \alpha_i}{2} h_i)}, \\ \sum_{k=0}^{c_{i,j}} (-1)^k e_i^{(k)} e_j e_i^{(c_{i,j}-k)} &= \sum_{k=0}^{c_{i,j}} (-1)^k f_i^{(k)} f_j f_i^{(c_{i,j}-k)} = 0 \text{ pour } i \neq j. \end{aligned}$$

Ici, nous avons écrit $e_i^{(n)} = e_i^n / [n]_i!$ et $f_i^{(n)} = f_i^n / [n]_i!$ avec $[n]_i! = [1]_i \cdots [n]_i$, et $[n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$. De plus $c_{i,j}$ est l'entier positif $1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$.

Les dernières égalités de la définition sont appelées *relations de Serre*. On a

$$t_i e_j t_i^{-1} = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} e_j = q_i^{\langle h_i, \alpha_j \rangle} e_j = q_j^{\langle h_j, \alpha_i \rangle} e_j.$$

On pose

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_i &= \frac{[n]_i!}{[k]_i! [n-k]_i!}, \\ \{x\}_i &= \frac{x - x^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad \left\{ \begin{matrix} x \\ k \end{matrix} \right\}_i = \frac{\{x\}_i \cdots \{q_i^{1-k} x\}_i}{[k]_i!}. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2. — Les relations de définition de l'algèbre quantique impliquent $t_i e_i t_i^{-1} = q_i^2 e_i$ et $t_i f_i t_i^{-1} = q_i^{-2} f_i$. Ainsi (e_i, f_i, t_i^\pm) est un \mathfrak{sl}_2 -triplet, c'est-à-dire qu'il engendre une algèbre isomorphe à $U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$, notée $U_q(\mathfrak{g})_i$.

On peut donc adapter à notre cadre les résultats déjà obtenus pour \mathfrak{sl}_2 ; par exemple, la proposition 1.2.4 implique l'égalité

$$(3.1.2) \quad e_i^{(m)} f_i^{(n)} = \sum_{k \geq 0} f_i^{(n-k)} e_i^{(m-k)} \left\{ \begin{matrix} q^{m-n} t_i \\ k \end{matrix} \right\}_i.$$

La *matrice de Cartan généralisée* est la matrice $A = (\langle h_i, \alpha_j \rangle)_{i,j}$. Elle est *symétrisable*, c'est-à-dire telle qu'il existe un vecteur $(d_i)_{i \in I}$ pour lequel la matrice de terme générique $d_i A_{i,j}$ soit symétrique (prendre (α_i, α_i) comme valeur de d_i).

La *partie positive* (resp. *négative*) de $U_q(\mathfrak{g})$ est la K -algèbre $U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) engendrée par les e_i (resp. f_i) avec les relations de Serre. Soit $U_q^0(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{h \in P^*} Kq^h$.

Théorème 3.1.3. — *Le produit induit un isomorphisme*

$$U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^+(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} U_q(\mathfrak{g}).$$

Esquisse de la démonstration. — Posons $E = U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^+(\mathfrak{g})$ et définissons des endomorphismes e_i, f_i, q^h sur E de sorte à ce que le morphisme $E \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ commute avec les actions de e_i, f_i, q^h . Il faut vérifier qu'ils satisfont aux relations de définition. Alors E est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche et l'application $U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow E$ définie par $a \mapsto a \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1)$ est $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaire à gauche. Cette application est clairement surjective; elle est également injective puisque l'application composée $U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow E \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ est l'identité. Pour les détails, on se reportera à [26]. \square

Pour simplifier la situation, *supposons les racines simples α_i linéairement indépendantes* et posons

$$U_q(\mathfrak{g})_\xi = \{a \in U_q(\mathfrak{g}); q^h a q^{-h} = q^{\langle h, \xi \rangle} a \text{ pour tout } h \in P^*\}$$

pour tout $\xi \in P$. Alors $U_q(\mathfrak{g})_\xi \cdot U_q(\mathfrak{g})_{\xi'} \subset U_q(\mathfrak{g})_{\xi+\xi'}$ et $U_q(\mathfrak{g})$ se décompose en somme directe $U_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\xi \in Q} U_q(\mathfrak{g})_\xi$.

Lemme 3.1.4. — *Pour tout $\xi \in Q$, l'espace $U_q^-(\mathfrak{g})_\xi$ est de dimension finie.*

Démonstration. — L'algèbre $U_q^-(\mathfrak{g})$ est égale à $\sum_{i_1, \dots, i_\ell} K f_{i_1} \cdots f_{i_\ell}$; donc l'espace $U_q^-(\mathfrak{g})_\xi$ est égal à $\sum K f_{i_1} \cdots f_{i_\ell}$, où la somme est sur l'ensemble des indices i_1, \dots, i_ℓ tels que $\xi = -\alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_\ell}$. Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de façons de décomposer ξ sous cette forme, la somme est finie et la dimension de même. \square

De même que dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, nous avons la

Proposition 3.1.5. — *Il existe un unique homomorphisme de K -algèbres Δ de $U_q(\mathfrak{g})$ dans $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$, appelé co-produit, tel que*

$$(3.1.3) \quad e_i \mapsto e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i,$$

$$(3.1.4) \quad f_i \mapsto f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i,$$

$$(3.1.5) \quad q^h \mapsto q^h \otimes q^h,$$

pour tous $i \in I$ et $h \in P^*$.

Démonstration. — Il nous faut prouver que Δ est compatible avec les axiomes de définition de $U_q(\mathfrak{g})$. Commençons par vérifier l'égalité entre $\Delta([e_i, f_j])$ et $[\Delta(e_i), \Delta(f_j)]$. Lorsque $i = j$, le calcul est analogue à celui du lemme 1.1.2 dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Supposons $i \neq j$. Alors d'une part $\Delta([e_i, f_j])$ est égal à $\Delta(0)$, donc nul. D'autre part

$$\begin{aligned} \Delta(e_i)\Delta(f_j) &= (e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i)(f_j \otimes 1 + t_j \otimes f_j) \\ &= (e_i f_j) \otimes t_i^{-1} + (e_i t_j) \otimes (t_i^{-1} f_j) + f_j \otimes e_i + t_j \otimes (e_i f_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta(f_j)\Delta(e_i) &= (f_j \otimes 1 + t_j \otimes f_j)(e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i) \\ &= (f_j e_i) \otimes t_i^{-1} + (t_j e_i) \otimes (f_j t_i^{-1}) + f_j \otimes e_i + t_j \otimes (f_j e_i), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} [\Delta(e_i), \Delta(f_j)] &= [e_i, f_j] \otimes t_i^{-1} + t_j \otimes [e_i, f_j] \\ &\quad + (e_i t_j) \otimes (t_i^{-1} f_j) - (t_j e_i) \otimes (f_j t_i^{-1}) \\ &= (e_i t_j) \otimes (t_i^{-1} f_j) - (t_j e_i) \otimes (f_j t_i^{-1}). \end{aligned}$$

Or $t_j e_i = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} e_i t_j$ et $t_i^{-1} f_j = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} f_j t_i^{-1}$, donc $(e_i t_j) \otimes (t_i^{-1} f_j) = (t_j e_i) \otimes (f_j t_i^{-1})$ et $[\Delta(e_i), \Delta(f_j)] = 0$.

Démontrons maintenant la compatibilité avec les relations de Serre, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)} e_j e_i^{(c-k)}) = 0$ avec $c = 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$. On a

$$\begin{aligned} (3.1.6) \quad & \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)} e_j e_i^{(c-k)}) \\ &= \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)}) (e_j \otimes t_j^{-1} + 1 \otimes e_j) \Delta(e_i^{(c-k)}). \\ &= \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)}) (e_j \otimes t_j^{-1}) \Delta(e_i^{(c-k)}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)}) (1 \otimes e_j) \Delta(e_i^{(c-k)}). \end{aligned}$$

Or $\Delta(e_i^{(k)})$ est égal à $\sum_{0 \leq \nu \leq k} q_i^{-\nu(k-\nu)} e_i^{(\nu)} \otimes e_i^{(k-\nu)} t_i^{-\nu}$ d'après (1.2.2). Donc le premier terme du dernier membre de (3.1.6) est

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)})(e_j \otimes t_j^{-1}) \Delta(e_i^{(c-k)}) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq c} (-1)^k \left(\sum_{0 \leq \nu \leq k} q_i^{-\nu(k-\nu)} e_i^{(\nu)} \otimes e_i^{(k-\nu)} t_i^{-\nu} \right) (e_j \otimes t_j^{-1}) \\ & \quad \left(\sum_{0 \leq \mu \leq c-k} q_i^{-\mu(c-k-\mu)} e_i^{(\mu)} \otimes e_i^{(c-k-\mu)} t_i^{-\mu} \right) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq k \\ 0 \leq \mu \leq c-k}} (-1)^k q_i^{-\nu(k-\nu)-\mu(c-k-\mu)} \\ & \quad (e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} \otimes e_i^{(k-\nu)} t_i^{-\nu} t_j^{-1} e_i^{(c-k-\mu)} t_i^{-\mu}). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} & e_i^{(k-\nu)} t_i^{-\nu} t_j^{-1} e_i^{(c-k-\mu)} t_i^{-\mu} \\ &= q_i^{-2\nu(c-k-\mu)-(1-c)(c-k-\mu)} e_i^{(k-\nu)} e_i^{(c-k-\mu)} t_i^{-\nu} t_j^{-1} t_i^{-\mu} \\ &= q_i^{(c-1-2\nu)(c-k-\mu)} \begin{bmatrix} c-\nu-\mu \\ k-\nu \end{bmatrix}_i e_i^{(c-\nu-\mu)} t_i^{-\nu-\mu} t_j^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

(3.1.7)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)})(e_j \otimes t_j^{-1}) \Delta(e_i^{(c-k)}) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \mu \\ 0 \leq \nu \leq k \leq c-\mu}} (-1)^k q_i^{-\nu(k-\nu)-\mu(c-k-\mu)+(c-1-2\nu)(c-k-\mu)} \begin{bmatrix} c-\nu-\mu \\ k-\nu \end{bmatrix}_i \\ & \quad (e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} \otimes e_i^{(c-\nu-\mu)} t_i^{-\nu-\mu} t_j^{-1}). \end{aligned}$$

L'exposant de q_i est $-\nu(k-\nu) + (c-1-2\nu-\mu)(c-k-\mu) = -(c-1-\nu-\mu)k + \nu^2 + (c-1-2\nu-\mu)(c-\mu)$. Alors le paquet indexé par k est

$\sum_{\nu \leq k \leq c-\mu} (-1)^k q_i^{-(c-1-\nu-\mu)k} \begin{bmatrix} c-\nu-\mu \\ k-\nu \end{bmatrix}_i$, qui s'annule pour $c-\nu-\mu > 0$ d'après (1.2.1). Ainsi, on peut poser $\nu + \mu = c$ et $k = \nu$ dans le membre de droite de (3.1.7), qui a alors pour expression

$$\sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)})(e_j \otimes t_j^{-1}) \Delta(e_i^{(c-k)}) = \sum_{\substack{0 \leq \nu, \mu \\ \nu + \mu = c}} (-1)^\nu (e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} \otimes t_i^{-c} t_j^{-1}),$$

et est nul.

Le second terme du dernier membre de (3.1.6) est

$$\begin{aligned}
(3.1.8) \quad & \sum_{k=0}^c (-1)^k \Delta(e_i^{(k)})(1 \otimes e_j) \Delta(e_i^{(c-k)}) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq c} (-1)^k \left(\sum_{0 \leq \nu \leq k} q_i^{-\nu(k-\nu)} e_i^{(k-\nu)} \otimes e_i^{(\nu)} t_i^{-k+\nu} \right) (1 \otimes e_j) \\
&\quad \left(\sum_{0 \leq \mu \leq c-k} q_i^{-\mu(c-k-\mu)} e_i^{(c-k-\mu)} \otimes e_i^{(\mu)} t_i^{-c+k+\mu} \right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq k \\ 0 \leq \mu \leq c-k}} (-1)^k q_i^{-\nu(k-\nu)-\mu(c-k-\mu)} \\
&\quad \left(e_i^{(k-\nu)} e_i^{(c-k-\mu)} \otimes e_i^{(\nu)} t_i^{-k+\nu} e_j e_i^{(\mu)} t_i^{-c+k+\mu} \right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
& e_i^{(\nu)} t_i^{-k+\nu} e_j e_i^{(\mu)} t_i^{-c+k+\mu} \\
&= q_i^{-2(k-\nu)\mu-(1-c)(k-\nu)} e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} t_i^{-k+\nu} t_i^{-c+k+\mu} \\
&= q_i^{(k-\nu)(c-1-2\mu)} e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} t_i^{-c+\nu+\mu},
\end{aligned}$$

l'égalité (3.1.8) devient

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq k \\ 0 \leq \mu \leq c-k}} (-1)^k q_i^{-\nu(k-\nu)-\mu(c-k-\mu)+(k-\nu)(c-1-2\mu)} \begin{bmatrix} c-\nu-\mu \\ k-\nu \end{bmatrix}_i \\
& \quad \left(e_i^{(c-\nu-\mu)} \otimes e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)} t_i^{-c+\nu+\mu} \right).
\end{aligned}$$

Comme lors du calcul du premier terme, on peut poser $k = \nu$ et $c = \nu + \mu$. Le second terme du dernier membre de (3.1.6) devient alors

$$\sum_{\substack{0 \leq \nu, \mu \\ c = \nu + \mu}} (-1)^\nu (1 \otimes e_i^{(\nu)} e_j e_i^{(\mu)}),$$

et est nul.

On démontre de même la compatibilité avec les relations de Serre pour les opérateurs f_i . \square

Corollaire 3.1.6. — *Le produit tensoriel de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules est muni d'une structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module grâce au co-produit Δ .*

Remarque 3.1.7. — Comme dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, le produit tensoriel de modules sur $U_q(\mathfrak{g})$ n'est pas en général symétrique.

Comme dans le cas des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules, le produit tensoriel des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules est associatif et admet un objet neutre.

Proposition 3.1.8. — Soient M_1, M_2, M_3 trois $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. L'application $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \longrightarrow M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$, $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$, est un isomorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. Ainsi, le produit tensoriel de modules sur $U_q(\mathfrak{g})$ est associatif.

Définissons un morphisme de K -algèbres $\varepsilon: U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow K$, appelé *co-unité*, par $\varepsilon(q^h) = 1$ et $\varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0$. Le corps K est alors un $U_q(\mathfrak{g})$ -module pour l'action $a \cdot 1 = \varepsilon(a)$.

Proposition 3.1.9. — Si M est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module, les applications

$$\begin{aligned} K \otimes M &\xrightarrow{\sim} M, & 1 \otimes u &\mapsto u, \\ M \otimes K &\xrightarrow{\sim} M, & u \otimes 1 &\mapsto u, \end{aligned}$$

sont des isomorphismes de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules.

Remarque 3.1.10. — Comme dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, les applications Δ et ε munissent l'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf.

3.2. Modules de plus haut poids sur $U_q(\mathfrak{g})$

On peut déduire des propriétés fondamentales de $U_q(\mathfrak{g})$ en utilisant les propriétés correspondantes des algèbres de Lie de Kac-Moody. Voir [10] pour des compléments sur ce sujet.

Définition 3.2.1. — L'algèbre de Lie de Kac-Moody \mathfrak{g} (sur le corps k) est l'algèbre de Lie engendrée par des symboles e_i, f_i ($i \in I$) et $\mathfrak{t} = k \otimes_{\mathbb{Z}} P^*$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) L'application $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie, où \mathfrak{t} est munie d'une structure d'algèbre de Lie abélienne.

(2) Nous avons $[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i$, $[h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i$ pour tout $h \in \mathfrak{t}$ et $[e_i, f_j] = \delta_{i,j} h_i$ pour tous i, j .

(3) Les e_i, f_i vérifient les relations de Serre :

$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-\langle h_i, \alpha_j \rangle} e_j = \mathrm{ad}(f_i)^{1-\langle h_i, \alpha_j \rangle} f_j = 0 \quad \text{pour } i \neq j \in I.$$

L'algèbre \mathfrak{g} est dite symétrisable quand la matrice de Cartan associée l'est, ce qui est le cas ici.

Citons sans le démontrer le

Théorème 3.2.2 (Gabber-Kac[10]). — Une telle algèbre de Lie \mathfrak{g} existe et est unique à isomorphisme près.

Rappelons que la forme bilinéaire symétrique sur P est définie positive si et seulement si l'algèbre \mathfrak{g} est de dimension finie ; elle correspond alors à une algèbre de Lie semi-simple.

Pour tout poids λ , posons $\mathfrak{g}_\lambda = \{a \in \mathfrak{g} ; [h, a] = \lambda(h)a \text{ pour tout } h \in \mathfrak{t}\}$. Le sous-ensemble

$$\Delta := \{\lambda \in Q \setminus \{0\} ; \mathfrak{g}_\lambda \neq 0\}$$

est appelé *système des racines* de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} . L'algèbre de Lie \mathfrak{g} se décompose sous la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda \right).$$

En posant $\Delta_\pm = \Delta \cap Q_\pm$, on vérifie que $\Delta_- = -\Delta_+$ et $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$.

Nous noterons $U(\mathfrak{g}) \supset U^+(\mathfrak{g}) = \langle e_i \rangle$, $U^-(\mathfrak{g}) = \langle f_i \rangle$ les algèbre enveloppante, partie positive et partie négative de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} .

Définition 3.2.3. — Soit $P_+ = \{\lambda \in P ; \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \text{ pour tout } i\}$ l'ensemble des poids dominants. Pour $\lambda \in P_+$, notons $V_{\mathfrak{g}}(\lambda) = U(\mathfrak{g})u_\lambda$ le $U(\mathfrak{g})$ -module engendré par un élément u_λ avec les relations de définition

$$(3.2.1) \quad hu_\lambda = \lambda(h)u_\lambda, \quad e_i u_\lambda = 0, \quad f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda = 0.$$

Théorème 3.2.4 (Kac[10]). — (1) *Le module $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{g})$ -module simple.*

(2) *La dimension de $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)_\mu := \{u \in V_{\mathfrak{g}}(\lambda) ; hu = \mu(h)u \text{ pour tout } h \in P^*\}$ est finie. Le caractère de $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ défini par*

$$\chi(V_{\mathfrak{g}}(\lambda)) = \sum_{\mu} \dim(V_{\mathfrak{g}}(\lambda)_\mu) e^\mu \in \prod_{\mu \in P} \mathbb{Z} e^\mu,$$

vérifie la formule du caractère de Weyl-Kac

$$(3.2.2) \quad \chi(V_{\mathfrak{g}}(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\dim(\mathfrak{g}_\alpha)}}.$$

Ici W désigne le groupe de Weyl et $\ell(w)$ la longueur de w (voir § 3.4) ; par ailleurs ρ est un élément de \mathfrak{t}^ satisfaisant à $\langle h_i, \rho \rangle = 1$ pour tout $i \in I$.*

Généralisons maintenant ces notions au cas quantique. Rappelons que $U_q(\mathfrak{g})$ est égal à $U(\mathfrak{g})$ lorsque $q = 1$.

Définition 3.2.5. — Soit λ un poids dominant. Définissons un $U_q(\mathfrak{g})$ -module $V(\lambda)$, appelé module de plus haut poids comme étant engendré par un vecteur u_λ avec les relations

$$(3.2.3) \quad q^h u_\lambda = q^{\langle h, \lambda \rangle} u_\lambda, \quad e_i u_\lambda = 0, \quad f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda = 0.$$

Le vecteur u_λ est dit vecteur de plus haut poids de $V(\lambda)$.

Lemme 3.2.6. — Soit λ un poids dominant.

- (1) Le module $V(\lambda)$ est égal à $U_q^-(\mathfrak{g})u_\lambda$.
- (2) La dimension de $V(\lambda)_\xi$ est finie pour tout $\xi \in P$.
- (3) Nous avons $U_q^+(\mathfrak{g})u_\lambda = Ku_\lambda$ et $U_q^0(\mathfrak{g})u_\lambda = Ku_\lambda$.

Démonstration. — (3) est évident, alors que (1) est une conséquence du théorème 3.1.3. Enfin (2) découle du lemme 3.1.4 et de la surjectivité du morphisme

$$U_q^-(\mathfrak{g})_{\xi-\lambda} \xrightarrow{\times u_\lambda} (U_q^-(\mathfrak{g})u_\lambda)_\xi \simeq V(\lambda)_\xi.$$

□

D'autres propriétés du module $V(\lambda)$ sont données dans le lemme suivant.

Lemme 3.2.7. — Soit λ un poids dominant. Alors

- (1) L'application $U_q^-(\mathfrak{g}) \rightarrow V(\lambda)$ définie par $a \mapsto au_\lambda$ induit un isomorphisme

$$U_q^-(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{i \in I} U_q^-(\mathfrak{g}) f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle + 1} \right) \xrightarrow{\simeq} V(\lambda).$$

- (2) On a $V(\lambda)_\lambda = Ku_\lambda \simeq K$.

Démonstration. — Introduisons la notion de *module de Verma*

$$(3.2.4) \quad M(\lambda) = U_q(\mathfrak{g}) / \left(\sum_h U_q(\mathfrak{g})(q^h - q^{\lambda(h)}) + \sum_i U_q(\mathfrak{g})e_i \right)$$

pour tout poids λ . Le générateur du module de Verma sera noté u_λ^M . Le module de Verma $M(\lambda)$ est isomorphe à $U_q^-(\mathfrak{g})$ d'après le théorème 3.1.3.

Supposons $n := \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0$. Alors, en posant $\mu = \lambda - (n+1)\alpha_i$, l'application $M(\mu) = U_q(\mathfrak{g})u_\mu^M \longrightarrow M(\lambda)$ définie par $u_\mu^M \mapsto f_i^{(n+1)}u_\lambda^M$ est un morphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. Il suffit en effet de vérifier que

$$\begin{aligned} (q^h - q^{\langle h, \mu \rangle})f_i^{(n+1)}u_\lambda^M &= 0, \\ e_j f_i^{(n+1)}u_\lambda^M &= 0. \end{aligned}$$

La première égalité est claire. La seconde est également vérifiée lorsque $i \neq j$ puisque dans ce cas $e_j f_i = f_i e_j$. Supposons $i = j$. Alors $e_i f_i^{(n+1)} = f_i^{(n+1)}e_i + f_i^{(n)}\{q_i^{-n}t_i\}$. Or $t_i u_\lambda^M = q_i^{\langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda^M$, donc

$$e_i f_i^{(n+1)}u_\lambda^M = f_i^{(n+1)}e_i u_\lambda^M + f_i^{(n)}\{q_i^{-n+\langle h_i, \lambda \rangle}\}u_\lambda^M = 0 + 0 = 0.$$

D'où pour tout poids dominant λ une suite exacte

$$\bigoplus_i M(\lambda - (1 + \langle h_i, \lambda \rangle)\alpha_i) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow V(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Puisque le module de Verma $M(\lambda)$ est isomorphe à $U_q^-(\mathfrak{g})$, nous obtenons la propriété (1). La seconde découle de la nullité de l'espace vectoriel $(\sum_{i \in I} U_q^-(\mathfrak{g})f_i^{\langle h_i, \lambda \rangle + 1})_0$. \square

Théorème 3.2.8. — (1) L'espace $V(\lambda)$ est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple.

(2) Pour tout $\mu \in P$, la dimension de

$$V(\lambda)_\mu := \{u \in V(\lambda); q^h u = q^{\mu(h)} u \text{ pour tout } h \in P^*\}$$

est finie et égale à celle de $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)_\mu$.

La démonstration du théorème nécessite la

Définition 3.2.9. — Notons $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ la sous- $k[q, q^{-1}]$ -algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments $e_i^{(n)}$, $f_i^{(n)}$, $\frac{q(h) - 1}{q - 1}$ et $\left\{ \begin{matrix} q(h) \\ n \end{matrix} \right\}$ pour tous $n \geq 1$, $i \in I$ et $h \in P^*$. Notons également $U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$) la sous- $k[q, q^{-1}]$ -algèbre engendrée par les $e_i^{(n)}$ (resp. $f_i^{(n)}$). Désignons enfin par $U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ la sous- $k[q, q^{-1}]$ -algèbre de $K[P^*]$ engendrée par $\frac{q(h) - 1}{q - 1}$ et $\left\{ \begin{matrix} q(h) \\ n \end{matrix} \right\}$.

Remarquons que $\left\{ \begin{matrix} t_i \\ n \end{matrix} \right\}_i$ appartient à $U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ d'après l'exercice 3.5 (4).
Alors

$$\begin{aligned} U_q(\mathfrak{g}) &\simeq K \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}, \\ U_q^+(\mathfrak{g}) &\simeq K \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}, \\ U_q^-(\mathfrak{g}) &\simeq K \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}, \\ U_q^0(\mathfrak{g}) &\simeq K \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

En outre, le résultat suivant est l'analogie du théorème 3.1.3.

Lemme 3.2.10 ([26]). — *L'algèbre $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ vérifie*

$$(3.2.5) \quad U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \simeq U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}.$$

Esquisse de la démonstration. — On a

$$\begin{aligned} &U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \\ &\subset K \otimes_{k[q, q^{-1}]} (U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \otimes_{k[q, q^{-1}]} U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}) \\ &\simeq U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes_K U_q^+(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1.3, le dernier membre est isomorphe à $U_q(\mathfrak{g})$. Donc il suffit de démontrer que le premier terme est invariant sous l'action des générateurs de $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$. Voir [26] pour les détails. \square

Soit $V(\lambda)_{\mathbb{Z}} := U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} u_{\lambda} \subset V(\lambda)$; ce module vérifie $V(\lambda) = K \otimes_{k[q, q^{-1}]} V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$.

Or $U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} u_{\lambda} = k[q, q^{-1}] u_{\lambda}$, $U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} u_{\lambda} = k[q, q^{-1}] u_{\lambda}$ et $(U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} u_{\lambda})_{\lambda} = (U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}})_0 u_{\lambda} = k[q, q^{-1}] u_{\lambda}$, d'où

$$(3.2.6) \quad (V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\lambda} = k[q, q^{-1}] u_{\lambda} \simeq k[q, q^{-1}].$$

Considérons la k -algèbre $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} / (q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$. Il existe un morphisme d'algèbres de Lie $g: \mathfrak{g} \rightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} / (q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ tel que

$$e_i \mapsto e_i, \quad f_i \mapsto f_i, \quad h \mapsto \{q^h\}.$$

En effet, nous avons par exemple $\{q^{h+h'}\} = q^h \{q^{h'}\} + \{q^h\} q^{-h'} \equiv \{q^h\} + \{q^{h'}\} \pmod{(q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}}$ d'après l'exercice 3.4; ainsi $g(h+h') = g(h) + g(h')$. Par ailleurs

$$[\{q^h\}, e_i] = e_i(\{q^{(h, \alpha_i)} q^h\} - \{q^h\}).$$

L'exercice 3.4 implique d'autre part

$$\begin{aligned} \{q^{\langle h, \alpha_i \rangle} q^h\} - \{q^h\} &= \{q^{\langle h, \alpha_i \rangle}\} q^{-h} + (q^{\langle h, \alpha_i \rangle} - 1) \{q^h\} \\ &\equiv \langle h, \alpha_i \rangle \pmod{(q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}}, \end{aligned}$$

et par conséquent $[g(h), g(e_i)] = \langle h, \alpha_i \rangle g(e_i)$.

En outre $[g(e_i), g(f_i)] - g([e_i, f_i]) = \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} - \{q^{h_i}\} \equiv \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} - q^{(\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle / 2 - 1) h_i} \{q^{h_i}\} \equiv 0 \pmod{(q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}}$, comme conséquence de l'exercice 3.5 (4).

Les autres égalités se vérifient de même.

Nous obtenons ainsi un morphisme de $U(\mathfrak{g})$ dans $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} / (q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$. Posons $\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}} = V(\lambda)_{\mathbb{Z}} / (q-1)V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$; c'est un $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} / (q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ -module donc un $U(\mathfrak{g})$ -module. En notant $\overline{u_\lambda} = u_\lambda \pmod{(q-1)V(\lambda)_{\mathbb{Z}}}$, il est clair que $\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}} = U(\mathfrak{g})\overline{u_\lambda}$. Le vecteur $\overline{u_\lambda}$ vérifie

$$h\overline{u_\lambda} = \lambda(h)\overline{u_\lambda}, \quad e_i\overline{u_\lambda} = 0, \quad f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle}\overline{u_\lambda} = 0,$$

d'où un morphisme surjectif $V_{\mathfrak{g}}(\lambda) \longrightarrow \overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}}$. Or $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ est un $U(\mathfrak{g})$ -module simple d'après le théorème 3.2.4. D'autre part (3.2.6) entraîne

$$(\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}})_{\lambda} = (V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\lambda} / (q-1)(V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\lambda} \simeq k[q, q^{-1}] / (q-1)k[q, q^{-1}] \simeq k.$$

Donc $\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}} \neq 0$, et le module $\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}} \simeq V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ est simple.

Démonstration du théorème 3.2.8. — La dimension de $V(\lambda)_{\mu}$ est égale au rang de $(V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\mu}$, donc à la dimension de $(\overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}})_{\mu}$; or cette dernière est égale à la dimension de $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)_{\mu}$, d'où le second point.

Soit S un sous- $U_q(\mathfrak{g})$ -module de $V(\lambda)$. Alors $S' = V(\lambda)_{\mathbb{Z}} \cap S$ est un $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ -module, donc $\overline{S} = S' / (q-1)S'$ est un $U(\mathfrak{g})$ -module inclus dans

$$V(\lambda)_{\mathbb{Z}} / (q-1)V(\lambda)_{\mathbb{Z}} = \overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}} \simeq V_{\mathfrak{g}}(\lambda).$$

Ce dernier $U(\mathfrak{g})$ -module étant simple, nous obtenons $\overline{S} = \{0\}$ ou $\overline{S} = \overline{V(\lambda)}_{\mathbb{Z}}$.

(1) Supposons $\overline{S} = \{0\}$. Alors $S' = (q-1)S'$. Par ailleurs, l'espace $V(\lambda)_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\xi} (V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi}$ est un $k[q, q^{-1}]$ -module libre. Puisque $S' \subset V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$, nous obtenons $S' \subset \bigcap_n (q-1)^n V(\lambda)_{\mathbb{Z}} = 0$, donc $S' = \{0\}$. Il s'ensuit que S est nul.

(2) Supposons $\overline{S} = \overline{V(\lambda)_{\mathbb{Z}}}$. Alors $\overline{S}_{\xi} = \overline{V(\lambda)_{\mathbb{Z},\xi}}$, d'où $(V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi} = S'_{\xi} + (q-1)(V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi}$. Donc $(q-1)((V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi}/S'_{\xi}) = (V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi}/S'_{\xi}$, et d'après le lemme de Nakayama il existe un $h \in k[q]$ tel que

$$(1 - (q-1)h)((V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi}/S'_{\xi}) = \{0\}.$$

Par conséquent on obtient $(V(\lambda)_{\mathbb{Z}})_{\xi} \subset S_{\xi}$ et finalement $S = V(\lambda)$.

Ainsi, le module $V(\lambda)$ n'admet aucun sous-module propre. \square

3.3. La catégorie \mathcal{O}_{int}

Définition 3.3.1. — Un $U_q(\mathfrak{g})$ -module M est *intégrable* si :

(1) Le module M est la somme directe des espaces de poids

$$M_{\lambda} := \{u \in M ; q^h u = q^{\langle h, \lambda \rangle} u \text{ pour tout } h \in P^*\} \quad (\lambda \in P).$$

(2) Le module M est intégrable en tant que $U_q(\mathfrak{g})_i$ -module pour tout $i \in I$.

Rappelons que le second point est équivalent au fait que $U_q(\mathfrak{g})_i u$ est de dimension finie pour tout $u \in M$.

Remarquons que l'on a

$$t_i u = q_i^{\langle h_i, \lambda \rangle} u = q^{\langle \alpha_i, \lambda \rangle} u \quad \text{pour tout } u \in M_{\lambda}.$$

Lemme 3.3.2. — Soient M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module et F un sous-espace vectoriel de M . Supposons que :

(1) Le $U_q(\mathfrak{g})$ -module M est engendré par F .

(2) F possède une décomposition en espaces de poids $F = \bigoplus_{\lambda \in P} F_{\lambda}$.

(3) Pour tout $u \in F$, la dimension de $U_q(\mathfrak{g})_i u$ est finie.

Alors M est intégrable.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que si $u \in M_{\lambda}$ est tel que la dimension de $U_q(\mathfrak{g})_i u$ est finie, alors les dimensions des modules $U_q(\mathfrak{g})_i e_j u$ et $U_q(\mathfrak{g})_i f_j u$ sont finies pour tout $j \in I$. Puisque l'assertion est évidente pour $j = i$, supposons $j \neq i$. Nous allons utiliser le lemme 1.4.2. Supposons $e_i^m u = f_i^m u = 0$. Démontrons qu'alors $f_i^n e_j u = e_i^n e_j u = 0$ pour n

assez grand. La première assertion résulte de la commutativité de f_i et e_j . Les relations de Serre impliquent la formule

$$(3.3.1) \quad e_i^{(n)} e_j = \sum_{k=0}^{-\langle h_i, \alpha_j \rangle} (-1)^{\langle h_i, \alpha_j \rangle + k} \begin{bmatrix} n-1-k \\ -\langle h_i, \alpha_j \rangle - k \end{bmatrix}_i e_i^{(k)} e_j e_i^{(n-k)}$$

pour $n \geq 1 - \langle h_i, \alpha_j \rangle$.

Donc $e_i^n e_j u = 0$ si $n > m - \langle h_i, \alpha_j \rangle$. La démonstration pour $f_j u$ est similaire. \square

Les modules $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) sont donc des exemples de modules intégrables.

Définition 3.3.3. — La catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules M intégrables tels que la dimension de $U_q^+(\mathfrak{g})u$ soit finie pour tout $u \in M$ est notée \mathcal{O}_{int} .

La proposition suivante se démontre aisément.

Proposition 3.3.4. — La catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules intégrables et la catégorie \mathcal{O}_{int} sont stables par produit tensoriel.

Théorème 3.3.5. — (1) Tout module simple dans \mathcal{O}_{int} est isomorphe à un $V(\lambda)$ pour un poids dominant λ .

(2) Tout module $M \in \mathcal{O}_{int}$ est isomorphe à une somme directe de $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$). En d'autres termes, la catégorie \mathcal{O}_{int} est semi-simple.

Démonstration de (1). — Soit $M \in \mathcal{O}_{int}$ un module simple. Prenons un vecteur $u \neq 0$ tel que $e_i u = 0$ pour tout i . Soit λ le poids dominant tel que $u \in M_\lambda$. Le module $U_q(\mathfrak{g})_i u$ est de dimension finie par hypothèse. Or d'après la théorie des $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules on a $f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} u_\lambda = 0$, d'où un morphisme $V(\lambda) \rightarrow M$ défini par $u_\lambda \mapsto u$ et induisant un isomorphisme $V(\lambda) \simeq U_q(\mathfrak{g})u$. \square

Nous reviendrons dans la section 3.5 à ce théorème afin d'en démontrer le second point.

3.4. Groupe de Weyl et ordre de Bruhat

Notons s_i l'endomorphisme de P défini par

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle h_i, \lambda \rangle \alpha_i \quad \text{pour } \lambda \in P.$$

C'est une involution, appelée *réflexion simple*. Elle vérifie $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$.

Définition 3.4.1. — Le *groupe de Weyl* W est le sous-groupe de $GL(P)$ engendré par les réflexions simples s_i .

Les s_i sont des involutions appartenant à

$$O(P) = \{g \in GL(P); (g\lambda, g\lambda') = (\lambda, \lambda') \text{ pour tous } \lambda, \lambda' \in P\},$$

et donc W est contenu dans $O(P)$. On a

$$w\Delta = \Delta \quad \text{pour tout } w \in W.$$

On se reportera avec profit à [2, 6, 10] pour les démonstrations des résultats de cette section. La longueur de $w \in W$ est le plus petit entier ℓ tel que w puisse s'écrire $s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$, et est notée $\ell(w)$. On vérifie aisément que $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$. Si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ avec $\ell = \ell(w)$, on dit que l'on a une *décomposition réduite* de w ; elle n'est pas unique en général. De fait, nous noterons $R(w)$ l'ensemble des suites d'indices (i_1, \dots, i_ℓ) telles que $s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ soit une décomposition réduite de w .

Pour tous $w \in W$ et $i \in I$, on a

$$\ell(s_i w) = \ell(w) \pm 1, \quad \ell(ws_i) = \ell(w) \pm 1.$$

Plus précisément

Lemme 3.4.2. — Soient $w \in W$ et $i \in I$.

- (1) La longueur de w est égale au cardinal de $\Delta_+ \cap w\Delta_-$.
- (2) On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 &\iff w\alpha_i \in \Delta_+, \\ \ell(ws_i) = \ell(w) - 1 &\iff w\alpha_i \in \Delta_-, \\ \ell(s_i w) = \ell(w) + 1 &\iff w^{-1}\alpha_i \in \Delta_+, \\ \ell(s_i w) = \ell(w) - 1 &\iff w^{-1}\alpha_i \in \Delta_-. \end{aligned}$$

Pour $w, w' \in W$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe une décomposition réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ et une suite croissante $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq \ell$ telles que $w' = s_{i_{a_1}} \cdots s_{i_{a_k}}$.

(b) Pour toute décomposition réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$, il existe une suite strictement croissante $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq \ell$ telle que $s_{i_{a_1}} \cdots s_{i_{a_k}}$ soit une décomposition réduite de w' .

Quand ces conditions équivalentes sont satisfaites, on écrit $w' \leq w$. La relation $w' \leq w$ en résultant est clairement un ordre sur le groupe de Weyl, appelé *ordre de Bruhat*. Cet ordre est compatible avec la fonction longueur, c'est-à-dire $\ell(w) \geq \ell(w')$ lorsque $w \geq w'$. Le plus petit élément pour l'ordre de Bruhat est l'identité 1.

Nous avons alors les équivalences :

- \mathfrak{g} est de dimension finie
- \iff la forme bilinéaire symétrique (\cdot, \cdot) sur P est définie positive
- \iff W est un groupe fini
- \iff W possède un élément maximal
- \iff il existe un élément w_0 de W tel que $\ell(w_0 s_i) < \ell(w_0)$ pour tout i .

Un élément w_0 satisfaisant à la dernière condition est unique et est forcément l'élément le plus long de W . Il vérifie $w_0^{-1} = w_0$.

Le groupe de Weyl est un groupe de Coxeter au sens suivant.

Lemme 3.4.3. — *Le groupe W est engendré par $\{s_i\}_{i \in I}$ avec les relations de définition :*

$$(3.4.1) \quad s_i^2 = 1,$$

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} s_i s_j = s_j s_i & \text{si } \langle h_i, \alpha_j \rangle = \langle h_j, \alpha_i \rangle = 0, \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{si } \langle h_i, \alpha_j \rangle \cdot \langle h_j, \alpha_i \rangle = 1, \\ (s_i s_j)^2 = (s_j s_i)^2 & \text{si } \langle h_i, \alpha_j \rangle \cdot \langle h_j, \alpha_i \rangle = 2, \\ (s_i s_j)^3 = (s_j s_i)^3 & \text{si } \langle h_i, \alpha_j \rangle \cdot \langle h_j, \alpha_i \rangle = 3. \end{cases}$$

Les conditions (3.4.2) sont appelées *relations de tresse*.

La proposition suivante (voir [2]) va même plus loin.

Proposition 3.4.4. — *Soit M un monoïde avec unité. Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de M satisfaisant aux relations de tresse (3.4.2). Alors il existe une unique application $f : W \rightarrow M$ telle que, pour tout $w \in W$ et pour toute décomposition réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$, l'on ait $f(w) = x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$.*

3.5. Semi-simplicité de la catégorie \mathcal{O}_{int}

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable. Choisissons un poids λ et posons $n := \langle h_i, \lambda \rangle$ pour un i fixé, de sorte que $s_i \lambda = \lambda - n\alpha_i$. D'après le lemme 1.3.8, nous avons des isomorphismes $f_i^n : M_\lambda \xrightarrow{\sim} M_{s_i \lambda}$ pour $n \geq 0$ et $e_i^{-n} : M_\lambda \xrightarrow{\sim} M_{s_i \lambda}$ pour $n \leq 0$; il s'ensuit que $\dim(M_\lambda) = \dim(M_{s_i \lambda})$. Ainsi l'ensemble $\text{wt}(M) := \{\lambda \in P; M_\lambda \neq 0\}$ des poids de M est stable sous l'action des s_i et par conséquent sous celle du groupe de Weyl W . On a

$$\dim(M_\lambda) = \dim(M_{w\lambda}) \text{ pour tous } \lambda \in P \text{ et } w \in W.$$

Les applications suivantes sont des automorphismes de $U_q(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} \mu_a &: q \mapsto q, & e_i &\mapsto a_i e_i, & f_i &\mapsto a_i^{-1} f_i, & q^h &\mapsto q^h, \\ H_n &: q \mapsto q, & e_i &\mapsto t_i^{n_i} e_i, & f_i &\mapsto f_i t_i^{-n_i}, & q^h &\mapsto q^h, \\ \phi &: q \mapsto q, & e_i &\mapsto f_i, & f_i &\mapsto e_i, & q^h &\mapsto q^{-h}, \\ - &: q \mapsto q^{-1}, & e_i &\mapsto e_i, & f_i &\mapsto f_i, & q^h &\mapsto q^{-h}, \end{aligned}$$

pour $a = (a_i)_{i \in I} \in (K \setminus \{0\})^I$ et $n = (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I$.

Définissons également deux anti-automorphismes par

$$\begin{aligned} \psi &: q \mapsto q, & e_i &\mapsto f_i, & f_i &\mapsto e_i, & q^h &\mapsto q^h, \\ S &: q \mapsto q, & e_i &\mapsto -e_i t_i, & f_i &\mapsto -t_i^{-1} f_i, & q^h &\mapsto q^{-h}. \end{aligned}$$

L'anti-automorphisme S est appelé *antipode*.

Remarque 3.5.1. — Soient M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module et ξ un anti-automorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$. Alors $M^* := \text{Hom}_K(M, K)$ est muni d'une structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module par $(a \cdot f)(u) = f(\xi(a)u)$ pour $f \in M^*$, $a \in U_q(\mathfrak{g})$ et $u \in M$.

Si on prend S pour anti-automorphisme ξ dans la remarque précédente, l'application $M^* \otimes M \rightarrow K$ définie par $f \otimes u \mapsto f(u)$ est $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaire. C'est une conséquence de $\mu \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta = \varepsilon$, où $\mu : U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ est la multiplication et $\varepsilon : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow K$ est la co-unité.

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable; alors $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$. D'après la remarque précédente, l'antiautomorphisme ψ munit M^* d'une structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module. Ainsi $D(M) := \bigoplus_{\lambda} (M_\lambda)^*$ est un sous- $U_q(\mathfrak{g})$ -module de

M^* tel que $D(M)_\lambda = (M_\lambda)^*$. Nous appellerons $D(M)$ le *module dual* de M . En particulier

$$\dim(D(M)_\lambda) = \dim(M_\lambda) \text{ si } \dim(M) \text{ est finie, et } \text{wt}(D(M)) = \text{wt}(M).$$

Puisque ψ est une involution, le morphisme $M_\lambda \longrightarrow (M_\lambda)^{**}$ induit un morphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules

$$M \longrightarrow D^2(M) := D(D(M)).$$

Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 3.5.2. — *Le bidual $D^2(M)$ est isomorphe à M si la dimension de M_λ est finie pour tout poids λ .*

Proposition 3.5.3. — *Pour tout poids dominant λ , le module $V(\lambda)$ est isomorphe à son dual $D(V(\lambda))$ (autodual).*

Démonstration. — Les dimensions de $V(\lambda)_\lambda$ et $D(V(\lambda))_\lambda$ sont égales à 1, donc il existe $v \in D(V(\lambda))_\lambda \setminus \{0\}$; prenons ce v tel que $v(u_\lambda) = 1$. Or $\text{wt}(e_i v) = \lambda + \alpha_i \notin \text{wt}(V(\lambda)) = \text{wt}(D(V(\lambda)))$, d'où $e_i v = 0$. Par ailleurs $\lambda - (1 + \langle h_i, \lambda \rangle) \alpha_i = s_i(\lambda + \alpha_i) \notin \text{wt}(V(\lambda)) = \text{wt}(D(V(\lambda)))$, et ainsi le vecteur v vérifie $f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} v = 0$.

Nous avons donc un morphisme $V(\lambda) \longrightarrow D(V(\lambda))$ qui envoie u_λ sur v . Or le module $V(\lambda)$ est simple, d'où l'injectivité du morphisme.

D'autre part les espaces de poids de $V(\lambda)$ et $D(V(\lambda))$ ont même dimension, donc notre morphisme est un isomorphisme. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le second point du théorème 3.3.5. Commençons par un

Lemme 3.5.4. — *Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable. Supposons qu'il existe un sous- $U_q^+(\mathfrak{g})$ -module F de dimension finie tel que $F \simeq \bigoplus_\lambda F_\lambda$ et $M = U_q(\mathfrak{g})F (= U_q^-(\mathfrak{g})F)$. Alors M se décompose en une somme directe finie de $V(\mu)$.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, on peut supposer F non nul. Les poids de M vérifient $\text{wt}(M) \subset \text{wt}(F) + Q_-$. Or les poids de F sont en nombre fini non nul, donc il existe λ tel que $(\lambda + Q_+) \cap \text{wt}(F) = \{\lambda\}$. Ainsi l'intersection de $\lambda + Q_+$ et de $\text{wt}(M)$ est réduite à $\{\lambda\}$. Soit alors un vecteur non nul $u \in F_\lambda \subset M_\lambda$. Puisque $\lambda + \alpha_i \notin \text{wt}(M)$, le vecteur u

vérifie $e_i u = 0$. Par ailleurs u est annulé par $f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle}$, d'où un morphisme $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaire $f: V(\lambda) \longrightarrow M$ défini par $u_\lambda \mapsto u$.

L'espace $D(M)_\lambda = \text{Hom}_K(M_\lambda, K)$ contient une forme v telle que $v(u) = 1$. Puisque $\lambda + \alpha_i \notin \text{wt}(D(M)) = \text{wt}(M)$ et $s_i(\lambda + \alpha_i) = \lambda - (1 + \langle h_i, \lambda \rangle)\alpha_i \notin \text{wt}(D(M))$, on a $e_i v = f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} v = 0$. Donc nous obtenons un morphisme $g: V(\lambda) \longrightarrow D(M)$ défini par $u_\lambda \mapsto v$.

Le composé $h: M \longrightarrow D^2(M) \xrightarrow{Dg} D(V(\lambda)) \simeq V(\lambda)$ induit $M_\lambda \xrightarrow{v} V(\lambda)_\lambda \simeq K$. D'où une chaîne de morphismes

$$\begin{array}{ccccc} V(\lambda) & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{h} & V(\lambda) \\ u_\lambda & \mapsto & u & \mapsto & u_\lambda \end{array}$$

dont le composé est l'identité. Nous en déduisons que $M \simeq V(\lambda) \oplus N$, où $N = \text{Coker}(f)$. Notons F' l'image de F dans N . Alors $N = U_q(\mathfrak{g})F'$ et $\dim(F') \leq \dim(F/Ku) < \dim(F)$; le résultat s'ensuit par récurrence sur la dimension de F . \square

Fin de la démonstration du théorème 3.3.5. — Soient $M \in \mathcal{O}_{int}$ et $u \in M$. Alors $U_q(\mathfrak{g})u = U_q(\mathfrak{g})(U_q^+(\mathfrak{g})U_q^0(\mathfrak{g})u)$ et $U_q^+(\mathfrak{g})U_q^0(\mathfrak{g})u$ est de dimension finie d'après l'hypothèse sur M . Grâce au lemme 3.5.4, le sous-module $U_q(\mathfrak{g})u$ est une somme directe de modules $V(\lambda)$. Ainsi, le module M est somme de certains $V(\lambda)$. La simplicité des $V(\lambda)$ entraîne finalement que M est une somme directe de $V(\lambda)$. \square

Remarque 3.5.5. — On peut définir comme dans la remarque 1.1.5 pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ des co-produits Δ_+ et Δ_0 . Dans la catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules intégrables, les trois co-produits sont presque équivalents. Pour deux $U_q(\mathfrak{g})$ -modules intégrables M et N , notons $M \otimes_- N$, $M \otimes_0 N$ et $M \otimes_+ N$ les espaces vectoriels $M \otimes N$ munis d'une structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module grâce à Δ_- , Δ_0 et Δ_+ respectivement. Alors les applications

$$M \otimes_- N \xrightarrow[\xi]{\simeq} M \otimes_0 N \xrightarrow[\eta]{\simeq} M \otimes_+ N$$

définies par

$$\begin{aligned} \xi(u \otimes_- v) &= q^{(\lambda, \mu)/2} u \otimes_0 v \\ \eta(u \otimes_0 v) &= q^{(\lambda, \mu)/2} u \otimes_+ v \end{aligned} \quad \text{pour } u \in M_\lambda \text{ et } v \in N_\mu,$$

sont des isomorphismes $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaires. Par exemple, le fait que ξ et e_i commutent provient de

$$\begin{aligned} \xi(e_i(u \otimes_- v)) &= \xi(e_i u \otimes_- t_i^{-1} v + u \otimes_- e_i v) \\ &= q^{(\lambda+\alpha_i, \mu)/2} e_i u \otimes_0 q^{-(\alpha_i, \mu)} v + q^{(\lambda, \mu+\alpha_i)/2} u \otimes_0 e_i v \\ &= q^{(\lambda, \mu)/2} (e_i u \otimes_0 t_i^{-1/2} v + t_i^{1/2} u \otimes_0 e_i v) \\ &= q^{(\lambda, \mu)/2} e_i (u \otimes_0 v) = e_i \xi(u \otimes_- v). \end{aligned}$$

Exercice 3.1. — Démontrez la formule (3.3.1) lorsque $i \neq j$.

Exercice 3.2. — Pour tout poids dominant λ , soit $V(-\lambda)$ le $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple de plus bas poids $-\lambda$, construit de manière analogue à la définition 3.2.5 en échangeant \tilde{f}_i et \tilde{e}_i . Plus précisément

$$\begin{aligned} V(-\lambda) &= U_q(\mathfrak{g})u_{-\lambda} \\ &= U_q(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{h \in P^*} U_q(\mathfrak{g})(q^h - q^{-\langle h, \lambda \rangle}) + \sum_i U_q(\mathfrak{g})f_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_i U_q(\mathfrak{g})e_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} \right). \end{aligned}$$

Le vecteur $u_{-\lambda}$ est appelé vecteur de plus bas poids de $V(-\lambda)$. Démontrez que pour tous $\lambda, \mu \in P_+$ le morphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules $U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow V(\lambda) \otimes V(-\mu)$ défini par $1 \mapsto u_\lambda \otimes u_{-\mu}$ induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} U_q(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{h \in P^*} U_q(\mathfrak{g})(q^h - q^{\langle h, \lambda - \mu \rangle}) + \sum_i U_q(\mathfrak{g})f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle} + \sum_i U_q(\mathfrak{g})e_i^{1+\langle h_i, \mu \rangle} \right) \\ \xrightarrow{\sim} V(\lambda) \otimes V(-\mu). \end{aligned}$$

Exercice 3.3. — Démontrez que si \mathfrak{g} est de dimension finie, alors tout module intégrable appartient à \mathcal{O}_{int} . (Indication : utilisez l'exercice précédent et le fait que $V(\lambda) \otimes V(-\mu)$ est de dimension finie.)

Exercice 3.4. — Démontrez les formules suivantes :

- (1) $\left\{ \begin{matrix} xy \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{j+k=n} x^k \left\{ \begin{matrix} x \\ j \end{matrix} \right\} y^{-j} \left\{ \begin{matrix} y \\ k \end{matrix} \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $\left\{ \begin{matrix} q^{-n}x \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} x \\ m+n \end{matrix} \right\}$ pour $m, n \in \mathbb{N}$.
- (3) $q^{-n}x \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\} - q^n x^{-1} \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\} = (q - q^{-1})[n+1] \left\{ \begin{matrix} x \\ n+1 \end{matrix} \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.5. — Posons $R = \mathbb{Q}(q)[x, x^{-1}]$. Soit $R_{\mathbb{Z}}$ la sous- $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algèbre de R engendrée par x et les $\left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\}$ ($n \in \mathbb{N}$).

(1) À l'aide de l'exercice 3.4, démontrez que $\left\{ \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\}, x \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\}; n \in \mathbb{N} \right\}$ est une base de R en tant que $\mathbb{Q}(q)$ -espace vectoriel, et une base de $R_{\mathbb{Z}}$ en tant que $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -module.

(2) Démontrez que

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} R_{\mathbb{Z}} &= \{f(x) \in R; f(\pm q^n) \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f(x) \in R; f(\pm q^n) \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(Indication : écrivez f comme combinaison linéaire d'éléments de la base définie en (1) et posez $x = \pm 1, \pm q, \dots$)

(3) Démontrez que

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{Z}} &= \{f(x) \in R; f(\pm q^n) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{f(x) \in R; f(\pm q^n) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(Indication : démontrez d'abord que si $f(x) \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}][x]$ vérifie $f(q^n) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ pour n assez grand, alors $f(x)$ appartient à $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][x]$.)

(4) Déduisez de (3) que

$$\prod_{k=1}^n \frac{q^{m(1-k)}x^m - q^{m(k-1)}x^{-m}}{q^{km} - q^{-km}} - x^{(m-1)n} \left\{ \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\} \in (q-1)R_{\mathbb{Z}}$$

pour $n \geq 0$ et $m \geq 1$.

CHAPITRE 4

BASES CRISTALLINES DES $U_q(\mathfrak{g})$ -MODULES

Généralisons la théorie des bases cristallines vue au chapitre 2 aux modules sur l'algèbre enveloppante quantique d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} définis au chapitre précédent.

4.1. Bases cristallines

Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable.

Définition 4.1.1. — Une *base cristalline* (L, B) de M est une base locale en $q = 0$ de M telle que :

(1) Le couple (L, B) vérifie $(L, B) \simeq \bigoplus_{\lambda \in P} (L_\lambda, B_\lambda)$, où (L_λ, B_λ) est une base locale de M_λ .

(2) La base locale (L, B) est une base cristalline de M par rapport à $U_q(\mathfrak{g})_i$ pour tout $i \in I$.

Puisque $U_q(\mathfrak{g})_i$ est isomorphe à $U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ pour tout $i \in I$, on peut appliquer ce que l'on a établi pour \mathfrak{sl}_2 .

Définissons pour tout $i \in I$ des morphismes $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \text{End}_K(M)$ de la façon suivante. Puisque tout vecteur $u \in M_\lambda$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = \sum_{n \geq 0, -\langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(n)} v_n$ avec $v_n \in M_{\lambda + n\alpha_i}$ et $e_i v_n = 0$, posons

$$(4.1.1) \quad \tilde{e}_i u = \sum_{n \geq 1, -\langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(n-1)} v_n, \quad \tilde{f}_i u = \sum_{n \geq 0, -\langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(n+1)} v_n.$$

Ces endomorphismes vérifient $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$.

Le théoème 2.2.5 implique alors le

Théorème 4.1.2. — Soit (L, B) une base locale en $q = 0$ d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable M satisfaisant à la condition (1) de la définition 4.1.1. Alors (L, B) est une base cristalline si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

- (1) Nous avons $\tilde{e}_i L \subset L$ et $\tilde{f}_i L \subset L$ pour tout i (et ainsi \tilde{e}_i, \tilde{f}_i induisent des endomorphismes de L/qL , désignés par les mêmes symboles).
- (2) Nous avons $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$.
- (3) Soient $b, b' \in B$ et $i \in I$; alors $b' = \tilde{e}_i b$ si et seulement si $\tilde{f}_i b' = b$.

Pour tout i , joignons des éléments b et b' de B par une flèche $b \xrightarrow{i} b'$ si $b' = \tilde{f}_i b$ (équivalent à $b = \tilde{e}_i b'$). Nous obtenons ainsi un graphe numéroté, le *graphe cristallin* de B . Une *i -chaîne* est une composante connexe du graphe pour les i -flèches, c'est-à-dire

$$\circ \xrightarrow{b_0} \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} b_n \circ$$

avec $\tilde{e}_i b_0 = 0$, $\tilde{f}_i b_\nu = b_{\nu+1}$ ($0 \leq \nu < n$) et $\tilde{f}_i b_n = 0$. La base cristalline B est la réunion disjointe des i -chaînes pour un i fixé; ainsi, par rapport à chaque i la structure combinatoire de B est très simple. Cependant, la structure combinatoire de la base cristalline B est très riche lorsque l'on considère tous les i à la fois.

Notons $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$ et $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$. Ces nombres correspondent à

$$(4.1.2) \quad \underbrace{\circ \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} b}_{\varepsilon_i(b)} \underbrace{\xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} \circ}_{\varphi_i(b)}$$

Pour $b \in B_\lambda$, définissons le *poids* de b par $\text{wt}(b) = \lambda$. Alors on a

$$(4.1.3) \quad \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b)$$

d'après le lemme 2.2.11; de plus la longueur de la i -chaîne contenant b est $\varphi_i(b) + \varepsilon_i(b)$.

Théorème 4.1.3. — Soit (L_ν, B_ν) une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable M_ν ($\nu = 1, 2$). Alors $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2)$ est une base

cristalline de $M_1 \otimes M_2$ pour laquelle les applications \tilde{e}_i et \tilde{f}_i sont

$$(4.1.4) \quad \tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(4.1.5) \quad \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus

$$(4.1.6) \quad \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle),$$

$$(4.1.7) \quad \varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_1) + \langle h_i, \text{wt}(b_2) \rangle, \varphi_i(b_2)).$$

Démonstration. — On se ramène au cas de \mathfrak{sl}_2 , d'où le résultat d'après le théorème 2.3.5. \square

Voici les deux théorèmes principaux sur l'existence et l'unicité de la base cristalline; nous renvoyons à [13] pour les démonstrations.

Théorème 4.1.4 (existence). — Soit λ un poids dominant.

(1) Il existe une unique base cristalline $(L(\lambda), B(\lambda))$ du module $V(\lambda) = U_q(\mathfrak{g})u_\lambda$ telle que $(L(\lambda)_\lambda, B(\lambda)_\lambda) = \{u_\lambda\}$.

(2) La base $B(\lambda)$ est égale à $\{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} u_\lambda; \ell \geq 0 \text{ et } i_1, \dots, i_\ell \in I\} \setminus \{0\}$.

(3) Le vecteur u_λ est l'unique $b \in B(\lambda)$ tel que $\tilde{e}_i b = 0$ pour tout i . Ce vecteur est dit de plus haut poids λ .

Théorème 4.1.5 (unicité). — Soient M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable de \mathcal{O}_{int} et (L, B) une base cristalline de M . Il existe alors un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu V(\lambda_\nu)$ tel que $(L, B) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu (L(\lambda_\nu), B(\lambda_\nu))$.

Grâce aux théorèmes ci-dessus, la décomposition en composantes simples d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module de \mathcal{O}_{int} s'effectue de façon combinatoire.

Corollaire 4.1.6. — Soit (L, B) une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module $M \in \mathcal{O}_{int}$. Alors

$$(4.1.8) \quad M \simeq \bigoplus_{b \in B^h} V(\text{wt}(b)), \quad \text{avec } B^h := \{b \in B; \tilde{e}_i b = 0 \text{ pour tout } i\}.$$

Corollaire 4.1.7. — Soient λ, μ deux poids dominants. Alors

$$(4.1.9) \quad V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{\substack{b \in B(\mu), \\ \varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle}} V(\lambda + \text{wt}(b)).$$

Démonstration. — Soit $B = B(\lambda) \otimes B(\mu)$. Alors $B^h = \{b_1 \otimes b_2; \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = 0 \text{ pour tout } i\}$. Or $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle)$, donc $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = 0$ si et seulement si $\varepsilon_i(b_1) = 0$ et $\varepsilon_i(b_2) \leq \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle$. Il s'ensuit que $B^h = \{b_1 \otimes b_2; b_1 = u_\lambda, \varepsilon_i(b_2) \leq \langle h_i, \text{wt}(b_1) \rangle \text{ pour tout } i\}$. Enfin $\text{wt}(u_\lambda \otimes b_2) = \lambda + \text{wt}(b_2)$, d'où le résultat. \square

4.2. Cristaux sur \mathfrak{g}

Un *cristal* sur \mathfrak{g} est un ensemble B muni d'applications

$$\begin{aligned} \text{wt} &: B \longrightarrow P, \\ \varepsilon_i &: B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \\ \varphi_i &: B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \\ \tilde{e}_i &: B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, \\ \tilde{f}_i &: B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, \end{aligned}$$

où 0 est un élément fantôme, satisfaisant pour tout $i \in I$ aux six axiomes suivants :

- (1) $\tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$.
- (2) Les applications $\varphi_i, \varepsilon_i, \text{wt}$ sont reliées par $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle$.
- (3) Si $b \in B$ est tel que $\tilde{e}_i b \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) &= \varepsilon_i(b) - 1, \\ \varphi_i(\tilde{e}_i b) &= \varphi_i(b) + 1, \\ \text{wt}(\tilde{e}_i b) &= \text{wt}(b) + \alpha_i. \end{aligned}$$

- (4) Si $b \in B$ est tel que $\tilde{f}_i b \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) &= \varepsilon_i(b) + 1, \\ \varphi_i(\tilde{f}_i b) &= \varphi_i(b) - 1, \\ \text{wt}(\tilde{f}_i b) &= \text{wt}(b) - \alpha_i. \end{aligned}$$

- (5) Pour $b_1, b_2 \in B$, nous avons $b_2 = \tilde{f}_i b_1$ si et seulement si $\tilde{e}_i b_2 = b_1$.
- (6) Si $\varphi_i(b) = -\infty$, alors $\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

Ici, nous appliquons la convention $-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$.

Par exemple, une base cristalline d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable est un cristal.

Pour des cristaux B_1, B_2 , un *morphisme de cristaux* $\psi: B_1 \longrightarrow B_2$ est une application $\psi: B_1 \longrightarrow B_2$ telle que :

- (1) Pour tout $b \in B_1$ on a $\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$ et $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$.
- (2) Pour tout $b, b' \in B_1$ si $b' = \tilde{f}_i b$ alors $\psi(b') = \tilde{f}_i \psi(b)$.

Il est facile de voir que les cristaux forment une catégorie.

Remarque 4.2.1. — Dans [13, 15, 16, 17], un morphisme de cristaux est défini comme une application $\psi: B_1 \sqcup \{0\} \longrightarrow B_2 \sqcup \{0\}$ satisfaisant à certains axiomes similaires. La définition employée dans notre livre est plus simple.

De nombreuses notions pour les cristaux sur \mathfrak{sl}_2 , vues dans la section 2.3, se transportent immédiatement dans le cas d'une algèbre \mathfrak{g} de Kac-Moody symétrisable. Citons notamment le produit tensoriel de cristaux, l'associativité de ce produit tensoriel, ainsi que les formules permettant de calculer wt , ε_i , φ_i , \tilde{e}_i , \tilde{f}_i sur le produit tensoriel de cristaux.

Un morphisme $\psi: B_1 \rightarrow B_2$ est *e-strict* (resp. *f-strict*) si l'application associée $B_1 \sqcup \{0\} \longrightarrow B_2 \sqcup \{0\}$ (qui prolonge ψ par $\psi(0) = 0$) commute avec l'action des \tilde{e}_i (resp. des \tilde{f}_i). Il est *strict* lorsqu'il est à la fois *e-strict* et *f-strict*. Si l'application $B_1 \longrightarrow B_2$ est injective, nous dirons que ψ est un *plongement* et que B_1 est un *sous-cristal* de B_2 . Un plongement de cristaux est *plein* s'il est strict.

Tout sous-ensemble B' d'un cristal B est regardé comme un sous-cristal de B de la façon suivante : les applications wt , ε_i , φ_i sont les restrictions de celles de B et les flèches de B' sont celles de B dont les sommets appartiennent à B' . Le plongement $B' \hookrightarrow B$ n'est pas toujours plein.

Un cristal est *semi-normal* si $\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$ et $\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0; \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$ pour tous $b \in B$ et $i \in I$. Ceci signifie que B , considéré comme cristal sur $U_q(\mathfrak{g})_i$, est isomorphe au cristal associé à un $U_q(\mathfrak{g})_i$ -module intégrable. Notons que tout plongement d'un cristal semi-normal dans un cristal semi-normal est plein.

Pour tout sous-ensemble $J \subset I$, soit $U_q(\mathfrak{g}_J)$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par e_i, f_i ($i \in J$) et q^h ($h \in P^*$). C'est l'algèbre enveloppante quantique associée à (J, P) . Pour tout cristal B , notons $\Phi_J(B)$ le cristal B regardé comme cristal sur $U_q(\mathfrak{g}_J)$.

Nous démontrerons la proposition suivante plus loin, au § 9.3.

Proposition 4.2.2. — *Pour tout cristal B , il y a équivalence entre :*

(1) *Pour tout sous-ensemble fini J de I tel que la matrice symétrique $((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j \in J}$ soit définie positive (c'est-à-dire \mathfrak{g}_J de dimension finie), le cristal $\Phi_J(B)$ est isomorphe au cristal associé à un $U_q(\mathfrak{g}_J)$ -module intégrable.*

(2) *La condition précédente est vérifiée pour tout J avec au plus deux éléments.*

Notons que sous l'hypothèse (1) sur J ci-dessus, tout $U_q(\mathfrak{g}_J)$ -module intégrable appartient à \mathcal{O}_{int} d'après l'exercice 3.3.

Un cristal est dit *normal* s'il satisfait à la condition (2) de la proposition.

4.3. Exemples de cristaux

Exemple 4.3.1. — Pour tout cristal B , notons B^\vee le cristal obtenu en renversant les flèches. Ainsi $B^\vee = \{b^\vee; b \in B\}$ avec $\text{wt}(b^\vee) = -\text{wt}(b)$, $\varepsilon_i(b^\vee) = \varphi_i(b)$, $\varphi_i(b^\vee) = \varepsilon_i(b)$, $\tilde{e}_i(b^\vee) = (\tilde{f}_i b)^\vee$ et $\tilde{f}_i(b^\vee) = (\tilde{e}_i b)^\vee$. Nous avons alors $(B_1 \otimes B_2)^\vee \simeq B_2^\vee \otimes B_1^\vee$.

Cette construction correspond à l'automorphisme ϕ de la K -algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ qui permute e_i et f_i et envoie $q(h)$ sur $q(-h)$. La notion de base cristalline est invariante par ϕ . Plus précisément, pour tout $U_q(\mathfrak{g})$ -module M soit M^ϕ le module $\{u^\phi; u \in M\}$ muni de l'action de $U_q(\mathfrak{g})$ définie par $a \cdot u^\phi = (\phi(a)u)^\phi$ ($a \in U_q(\mathfrak{g})$). Alors si M est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable et si (L, B) est une base cristalline de M , son image (L^ϕ, B^ϕ) par ϕ est

une base cristalline de M^ϕ ; en outre B^ϕ est isomorphe à B^\vee en tant que cristal.

Remarquons que $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta = r \circ \Delta \circ \phi$, où r est l'involution de $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ définie par $r(x \otimes y) = y \otimes x$. Ainsi $(M_1 \otimes M_2)^\phi \simeq (M_2^\phi) \otimes (M_1^\phi)$. Si (L_ν, B_ν) est une base cristalline de M_ν ($\nu = 1, 2$), alors $((L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2))^\phi \simeq (L_2^\phi, B_2^\phi) \otimes (L_1^\phi, B_1^\phi)$.

Exemple 4.3.2. — Pour tout poids dominant λ , posons $B(-\lambda) = B(\lambda)^\vee$. Alors $B(-\lambda)$ est assimilée à la base cristalline du module simple $V(-\lambda)$ sur $U_q(\mathfrak{g})$ de plus bas poids $-\lambda$. Ce cristal est normal.

Exemple 4.3.3. — Soit λ un poids. Définissons $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ et $\text{wt}(t_\lambda) = \lambda$, $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$, $\tilde{e}_i t_\lambda = \tilde{f}_i t_\lambda = 0$. Ceci munit T_λ d'une structure de cristal (non semi-normal) vérifiant $T_\lambda \otimes T_\mu \simeq T_{\lambda+\mu}$ pour tous $\lambda, \mu \in P$. De plus, pour tout cristal B les cristaux $T_0 \otimes B$, $B \otimes T_0$ et B sont isomorphes par l'application $t_0 \otimes b \leftrightarrow b \otimes t_0 \leftrightarrow b$. Donc T_0 est un objet neutre pour le produit tensoriel.

Exemple 4.3.4. — Soit $C = \{c\}$ le cristal défini par $\text{wt}(c) = 0$, $\varepsilon_i(c) = \varphi_i(c) = 0$ et $\tilde{e}_i c = \tilde{f}_i c = 0$. Alors C est isomorphe à $B(0)$. Pour tout cristal semi-normal B , on a $C \otimes B \simeq B \otimes C \simeq B$. Donc C est un objet neutre de la catégorie tensorielle des cristaux semi-normaux.

Exemple 4.3.5. — Définissons un cristal (non semi-normal) B_i comme étant l'ensemble $\{b_i(n); n \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{0\}$ muni de $\text{wt}(b_i(n)) = n\alpha_i$ et

$$\varepsilon_j(b_i(n)) = \begin{cases} -n & \text{si } j = i, \\ -\infty & \text{si } j \neq i, \end{cases} \quad \varphi_j(b_i(n)) = \begin{cases} n & \text{si } j = i, \\ -\infty & \text{si } j \neq i, \end{cases}$$

ainsi que des opérations

$$\tilde{e}_j b_i(n) = \begin{cases} b_i(n+1) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i, \end{cases} \quad \tilde{f}_j b_i(n) = \begin{cases} b_i(n-1) & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Notons par ailleurs $b_i = b_i(0)$. Le graphe cristallin associé est

$$(4.3.1) \quad \dots \xrightarrow{i} b_i(1) \xrightarrow{i} b_i(0) \xrightarrow{i} b_i(-1) \xrightarrow{i} \dots$$

En outre, pour $i \in I$ et $\lambda \in P$, les cristaux $T_\lambda \otimes B_i$ et $B_i \otimes T_{s_i \lambda}$ sont isomorphes par $t_\lambda \otimes b_i(n) \leftrightarrow b_i(n + \langle h_i, \lambda \rangle) \otimes t_{s_i \lambda}$.

Exercice 4.1. — Vérifiez les énoncés dans l'exemple 4.3.1.

Exercice 4.2. — Soit B un cristal. Démontrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Le cristal B est semi-normal.
- (2) Le cristal B satisfait aux trois conditions suivantes :
 - (a) Les entiers $\varepsilon_i(b)$, $\varphi_i(b)$ sont positifs pour tous $b \in B$ et $i \in I$.
 - (b) Si $\varepsilon_i(b) > 0$, alors $\tilde{e}_i b \in B$.
 - (b') Si $\varphi_i(b) > 0$, alors $\tilde{f}_i b \in B$.

Exercice 4.3. — Soient $\lambda \in P$ et $i \in I$. Démontrez que si $B_i \otimes T_\lambda$ est isomorphe à B_i alors $\lambda = 0$.

Exercice 4.4. — Démontrez que $T_\lambda^\vee \simeq T_{-\lambda}$, $C^\vee \simeq C$ et $B_i^\vee \simeq B_i$.

Exercice 4.5. — Démontrez que si un cristal B est semi-normal (resp. normal), alors le cristal B^\vee est aussi semi-normal (resp. normal).

Exercice 4.6. — Démontrez que $B_i \otimes B_i \simeq \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} B_i \otimes T_{n\alpha_i}$.

Exercice 4.7. — Démontrez que tout morphisme de cristaux semi-normaux est strict.

Exercice 4.8. — Soit \mathcal{C} la catégorie des cristaux finis normaux sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

- (1) Démontrez qu'il existe un unique isomorphisme

$$R(B_1, B_2): B_1 \otimes B_2 \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes B_1$$

fonctoriel en B_1 et $B_2 \in \mathcal{C}$.

- (2) Démontrez que $R(B_2, B_1) \circ R(B_1, B_2) = \text{id}_{B_1 \otimes B_2}$.

(3) Démontrez que pour $B_1 = B_2 = B_3 = B(V_1)$ le diagramme suivant ne commute pas :

$$\begin{array}{ccc} B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 & \xrightarrow{R(B_1, B_2) \otimes B_3} & B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 \\ & \searrow R(B_1, B_2 \otimes B_3) & \downarrow B_2 \otimes R(B_1, B_3) \\ & & B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \end{array}$$

(4) Démontrez que pour tous $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{C}$ le diagramme suivant commute (équation de Yang-Baxter) :

$$\begin{array}{ccc}
 & B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 & \\
 R(B_1, B_2) \otimes B_3 \swarrow & & \searrow B_1 \otimes R(B_2, B_3) \\
 B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 & & B_1 \otimes B_3 \otimes B_2 \\
 \downarrow B_2 \otimes R(B_1, B_3) & & R(B_1, B_3) \otimes B_2 \downarrow \\
 B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 & & B_3 \otimes B_1 \otimes B_2 \\
 R(B_2, B_3) \otimes B_1 \swarrow & & \searrow B_3 \otimes R(B_1, B_2) \\
 & B_3 \otimes B_2 \otimes B_1 &
 \end{array}$$

Notons que la commutativité du diagramme dans (3) pour tout B_1, B_2, B_3 entraîne la commutativité du diagramme dans (4).

Exercice 4.9. — Discutez des énoncés similaires à ceux de l'exercice précédent pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ (il existe un R satisfaisant à (1) et (2), mais pas de R satisfaisant à (1) et à l'équation de Yang-Baxter (4) en prenant $B_1 = B(\Lambda_1)$, $B_2 = B(\Lambda_2)$ et $B_3 = B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$).

CHAPITRE 5

CAS DE \mathfrak{gl}_n

Il est bien connu que les représentations irréductibles de dimension finie de \mathfrak{gl}_n sont décrites par les diagrammes de Young, et que leur dimension est égale au nombre de tableaux de Young semi-standard. Les bases cristallines apportent à cette théorie un nouvel éclairage.

5.1. La représentation vectorielle

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, le treillis des poids est $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \epsilon_i$; il est muni d'une forme bilinéaire symétrique (\cdot, \cdot) définie par $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{i,j}$. Les racines simples $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ sont indexées par $I = \{1, \dots, n-1\}$. Elles vérifient ainsi

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Les co-racines simples h_i sont telles que $\langle h_i, \lambda \rangle = (\alpha_i, \lambda)$. Le diagramme de Dynkin de \mathfrak{gl}_n est

$$\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{n-1}{\circ}$$

Les poids fondamentaux $\Lambda_j = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_j$ ($1 \leq j \leq n$) sont construits afin d'avoir $\langle h_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n-1$). Nous avons $P_+ = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{N} \Lambda_i + \mathbb{Z} \Lambda_n$. Notons enfin $\tilde{P}_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{N} \Lambda_i$.

Puisque $\langle h_i, \Lambda_n \rangle = 0$ pour tout $i \in I$, le module $V(m\Lambda_n)$ est de dimension 1 et $V(\lambda) \otimes V(m\Lambda_n) \simeq V(m\Lambda_n) \otimes V(\lambda) \simeq V(\lambda + m\Lambda_n)$ pour tout $\lambda \in P_+$.

La représentation $V(\Lambda_1)$, appelée *représentation vectorielle*, est de dimension n et se décompose sous la forme $V(\Lambda_1) = \bigoplus_{j=1}^n Ku_j$ avec

$$q(h)u_j = q^{\langle h, \epsilon_j \rangle} u_j, \quad e_i u_j = \delta_{i, j-1} u_{j-1} \quad \text{et} \quad f_i u_j = \delta_{i, j} u_{j+1}.$$

Le vecteur u_1 est de plus haut poids. La base $\{u_j; 1 \leq j \leq n\}$ nous fournit une base cristalline de $V(\Lambda_1)$, de graphe

$$B(\Lambda_1) : u_1 \xrightarrow{1} u_2 \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{n-2} u_{n-1} \xrightarrow{n-1} u_n.$$

Enfin $\text{wt}(u_j) = \epsilon_j$, $\varepsilon_i(u_j) = \delta_{i, j-1}$ et $\varphi_i(u_j) = \delta_{i, j}$.

Dans le cas de \mathfrak{gl}_3 et pour $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, le module $V(\lambda)$ est égal à

$$\langle u_\lambda, f_1 u_\lambda, f_2 u_\lambda, f_1 f_2 u_\lambda, f_2 f_1 u_\lambda, f_1^{(2)} f_2 u_\lambda, f_2^{(2)} f_1 u_\lambda, f_1 f_2^{(2)} f_1 u_\lambda = f_2 f_1^{(2)} f_2 u_\lambda \rangle$$

et donc de dimension huit. La dernière égalité découle de la formule

$$(5.1.1) \quad f_1^{(n)} f_2^{(m+n)} f_1^{(m)} = f_2^{(m)} f_1^{(m+n)} f_2^{(n)}$$

qui elle-même se démontre par récurrence à l'aide de la relation de Serre $f_1^{(2)} f_2 - f_1 f_2 f_1 + f_2 f_1^{(2)} = 0$. Le $U_q(\mathfrak{g})_1$ -module $V(\lambda)$ se décompose en

$$V(\lambda) = \langle u_\lambda, f_1 u_\lambda \rangle \oplus \langle f_2 u_\lambda, f_1 f_2 u_\lambda, f_1^{(2)} f_2 u_\lambda \rangle \oplus \langle f_2^{(2)} f_1 u_\lambda, f_1 f_2^{(2)} f_1 u_\lambda \rangle \oplus Kw,$$

où le vecteur $w := f_2 f_1 u_\lambda - \frac{q}{1+q^2} f_1 f_2 u_\lambda$ est tel que $e_1 w = 0$. De même, le $U_q(\mathfrak{g})_2$ -module $V(\lambda)$ est

$$V(\lambda) = \langle u_\lambda, f_2 u_\lambda \rangle \oplus \langle f_1 u_\lambda, f_2 f_1 u_\lambda, f_2^{(2)} f_1 u_\lambda \rangle \oplus \langle f_1^{(2)} f_2 u_\lambda, f_2 f_1^{(2)} f_2 u_\lambda \rangle \oplus Kw',$$

où le vecteur $w' := f_1 f_2 u_\lambda - \frac{q}{1+q^2} f_2 f_1 u_\lambda$ est tel que $e_2 w' = 0$. Donc $(L(\lambda), B(\lambda))$ est la base locale associé à la base

$$\{u_\lambda, f_1 u_\lambda, f_2 u_\lambda, f_1 f_2 u_\lambda, f_2 f_1 u_\lambda, f_1^{(2)} f_1 u_\lambda, f_1^{(2)} f_2 u_\lambda, f_1 f_2^{(2)} f_1 u_\lambda\}$$

de $V(\lambda)$. Observons que la relation entre les deux décompositions ne se trouve pas en $q = 1$ mais en $q = 0$.

La figure 5.1 représente le graphe cristallin que nous venons d'obtenir.

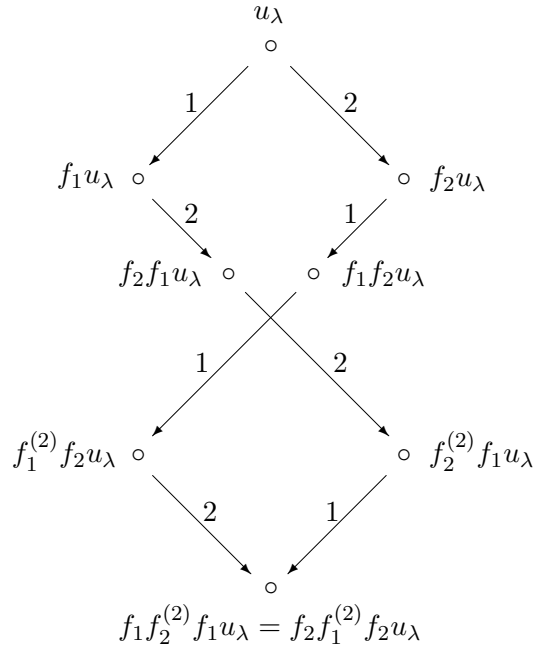


FIGURE 5.1. Graphe cristallin de $B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ par une base de vecteurs explicite

5.2. Tableaux de Young

Nous allons décrire les représentations fondamentales $V(\Lambda_j)$ en les plongeant dans le produit tensoriel de copies de la représentation vectorielle $V(\Lambda_1)$. Considérons le vecteur $\boxed{1} \otimes \cdots \otimes \boxed{j}$ de $B(\Lambda_1)^{\otimes j}$, avec par définition $\boxed{j} = u_j$. C'est un vecteur de plus haut poids Λ_j , donc la base cristalline $B(\Lambda_j)$ est isomorphe à la composante connexe de $B(\Lambda_1)^{\otimes j}$ contenant $\boxed{1} \otimes \cdots \otimes \boxed{j}$. Plus précisément :

Proposition 5.2.1. — *La base cristalline $B(\Lambda_j)$ est isomorphe par l'application ci-dessus à l'ensemble des $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j} \in B(\Lambda_1)^{\otimes j}$ tels que $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_j \leq n$.*

Démonstration. — Soit $B' = \{ \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j} \in B(\Lambda_1)^{\otimes j} ; 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_j \leq n \}$. D'après les théorèmes 4.1.4 et 4.1.5, la proposition

sera démontrée une fois que nous aurons vérifié que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i B' &\subset B' \sqcup \{0\}, \\ \tilde{f}_i B' &\subset B' \sqcup \{0\}, \\ (B')^h &:= \{b' \in B' ; \tilde{e}_i b' = 0 \text{ pour tout } i\} = \{\boxed{1} \otimes \cdots \otimes \boxed{j}\}. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $b = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j}$ tel que $b' = \tilde{f}_i(\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j}) \notin B' \sqcup \{0\}$ avec $1 \leq a_1 < \cdots < a_j \leq n$. Alors $b' = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{f}_i(\boxed{a_k}) \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j}$ pour un certain k . Puisque $b' \neq 0$, on a $a_k = i$ et $\tilde{f}_i(\boxed{a_k}) = \boxed{a_k + 1}$. Or $b' \notin B'$, donc $k < j$ et $a_k + 1 = a_{k+1}$. Ainsi nous aurions $\tilde{f}_i(\boxed{a_k} \otimes \boxed{a_{k+1}}) = \tilde{f}_i(\boxed{i} \otimes \boxed{i+1}) = \boxed{i+1} \otimes \boxed{i+1}$, ce qui est absurde; d'où le second point. La première assertion se démontre de même.

Soit $b = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j} \in (B')^h$. Le fait que $\tilde{e}_i b$ soit nul implique que $\tilde{e}_i(\boxed{a_1})$ l'est également pour tout i , donc $a_1 = 1$. Or $2 \leq a_2 < \cdots < a_j \leq n$ et $\tilde{e}_i(\boxed{a_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_j}) = 0$ pour tout $i \geq 2$, donc $a_2 = 2$. En itérant le processus, nous obtenons le résultat escompté. \square

Soit $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \Lambda_j \in \tilde{P}_+$ avec $\lambda_j \in \mathbb{N}$. La base cristalline $B(\lambda)$ s'injecte dans $B(\Lambda_1)^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_n)^{\otimes \lambda_n}$ par $u_\lambda \mapsto u_{\Lambda_1}^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes u_{\Lambda_n}^{\otimes \lambda_n}$. Mais puisque $B(\Lambda_j)$ s'injecte dans $B(\Lambda_1)^{\otimes j}$, la base cristalline $B(\lambda)$ s'injecte finalement dans $B(\Lambda_1)^{\otimes N}$ avec $N = \sum_{j=1}^n j \lambda_j$. D'où un plongement plein

$$(5.2.1) \quad B(\lambda) \longrightarrow B(\Lambda_1)^{\otimes N}, \quad u_\lambda \mapsto \boxed{1}^{\otimes \lambda_1} \otimes (\boxed{1} \otimes \boxed{2})^{\otimes \lambda_2} \otimes \cdots$$

À tout $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \Lambda_j \in \tilde{P}_+$ correspond un diagramme $Y(\lambda)$, appelé *diagramme de Young* de forme λ . C'est une collection de boîtes justifiée à gauche, telle que le nombre de boîtes décroît à chaque ligne selon la règle : la j -ième ligne est de longueur $\lambda_j + \cdots + \lambda_n$ (c'est-à-dire avec λ_j colonnes de longueur j). Par exemple

$$Y(\Lambda_1 + \Lambda_2) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad Y(\Lambda_1 + 2\Lambda_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad Y(2\Lambda_1 + \Lambda_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

De plus, à tout élément de $B(\Lambda_1)^{\otimes \lambda_1} \otimes B(\Lambda_1)^{\otimes 2\lambda_2} \otimes \cdots$ correspond un *tableau de Young* de forme λ , c'est-à-dire un diagramme de Young de forme λ dont chaque boîte contient un entier compris entre 1 et n . Passer d'un tableau de Young à un produit tensoriel de vecteurs dans $B(\Lambda_1)$

revient à traduire l'expression du vecteur dans l'écriture japonaise (de haut en bas et de droite à gauche). Ainsi

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & \\ \hline \end{array} \text{ se traduit par } \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{5}.$$

Le vecteur u_λ de plus haut poids correspond par le plongement (5.2.1) au tableau de Young de forme λ dont la j -ième ligne est remplie de j . Par exemple les vecteurs u_{Λ_2} , $u_{2\Lambda_1}$ et $u_{\Lambda_1+\Lambda_2}$ correspondent respectivement aux tableaux de Young $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$.

Pour déterminer complètement $B(\lambda)$, il nous faut comprendre l'action des \tilde{e}_i et des \tilde{f}_i . Posons $b = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_\ell}$. Les vecteurs $\tilde{e}_i b$ et $\tilde{f}_i b$ sont calculés par ordinateur grâce à l'algorithme (2.3.9). Cependant, on lui préférera pour des calculs « à la main » l'algorithme suivant :

- négliger les a_k autres que i et $i+1$;
- négliger les $\boxed{i} \otimes \boxed{i+1}$;
- à ce stade, il reste un élément de la forme $\boxed{i+1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i+1} \otimes \boxed{i} \otimes \cdots \otimes \boxed{i}$. Alors \tilde{e}_i change le $\boxed{i+1}$ le plus à droite en \boxed{i} et \tilde{f}_i change le \boxed{i} le plus à gauche en $\boxed{i+1}$. Si de tels $i+1$ et i n'existent pas, l'élément est transformé en le vecteur nul.

Les premier et second points découlent du fait que les vecteurs en question appartiennent à la représentation triviale par rapport à la i -flèche.

Exemple 5.2.2. — Prenons $b = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2}$. Les chaînes contenant ce vecteur sont alors

$$\begin{aligned} \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} &\xrightarrow{1} \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \\ &\xrightarrow{1} \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2}, \\ \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} &\xrightarrow{2} \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \\ &\xrightarrow{2} \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3}. \end{aligned}$$

Un tableau de Young est dit *semi-standard* si les nombres inscrits dans les boîtes croissent de gauche à droite et croissent strictement de haut en bas.

Théorème 5.2.3. — *Par le plongement (5.2.1), la base cristalline $B(\lambda)$ est identifiée à l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme λ .*

Démonstration. — Soit B' l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme λ . Le théorème sera démontré une fois que nous aurons montré que $\tilde{e}_i B' \subset B' \sqcup \{0\}$, $\tilde{f}_i B' \subset B' \sqcup \{0\}$ et que $(B')^h := \{b' \in B' ; \tilde{e}_i b' = 0 \text{ pour tout } i\}$ est égal à l'image de u_λ par le morphisme de cristaux (5.2.1).

Les deux premiers points se démontrent de la même façon. Supposons qu'il existe $b' = \tilde{f}_i b \notin B' \sqcup \{0\}$ avec $b \in B'$. Rappelons que b est un tableau dont les coefficients croissent de gauche à droite et croissent strictement de haut en bas. Puisque $B(\Lambda_1)^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes B(\Lambda_n)^{\otimes \lambda_n}$ est un cristal, la proposition 5.2.1 entraîne une croissance verticale stricte de b' . Par hypothèse, le tableau représentant b contient un sous-tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}$ avec $x \leq y$ envoyé par \tilde{f}_i sur un sous-tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline x' & y' \\ \hline \end{array}$ avec $x' > y'$. Il s'ensuit que $x = i$, $x' = x + 1 = i + 1$ et $y = y' = x = i$. Ainsi b contient le sous-tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline \end{array}$, envoyé sur le sous-tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline i+1 & i \\ \hline \end{array}$. Donc $b = b_1 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_4$, où b_2 (resp. b_3) est la partie de la colonne au-dessous de $y = i$ (resp. au-dessus de x), et ne contient pas de i . On a de plus $\tilde{f}_i b = b_1 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes b_4$. S'il ne figure pas de $i + 1$ dans $b_2 \otimes b_3$ alors $\tilde{f}_i(\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array}) = \begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array}$, ce qui est absurde. Donc le nombre $i + 1$ apparaît dans $b_2 \otimes b_3$. La croissance stricte des colonnes implique que b_2 est égal à $\begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes b'_2$. Par conséquent, le tableau b contient le sous-tableau

$$\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline z & i+1 \\ \hline \end{array}.$$

Or $i < z$ (par croissance stricte des colonnes) et $z \leq i + 1$ (par croissance des lignes), donc $z = i + 1$. Ainsi $b = b_1 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes b'_4$. Mais ceci est absurde, puisque $\tilde{f}_i b = b_1 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline i+1 \\ \hline \end{array} \otimes b'_4$.

Soit $b = \boxed{a_1} \otimes \cdots \in (B')^h$. L'égalité $\tilde{e}_i b = 0$ pour tout i implique $a_1 = 1$. Il découle de la croissance des lignes que la première ligne du tableau associé à b est composée uniquement de 1. La croissance stricte des colonnes entraîne que la seconde ligne est composée de nombres compris entre 2 et n . Notons b' le tableau issu de b privé de sa première ligne. Alors $\tilde{e}_i b' = 0$ pour tout $i \geq 2$, et en itérant le processus nous obtenons la forme recherchée pour b . \square

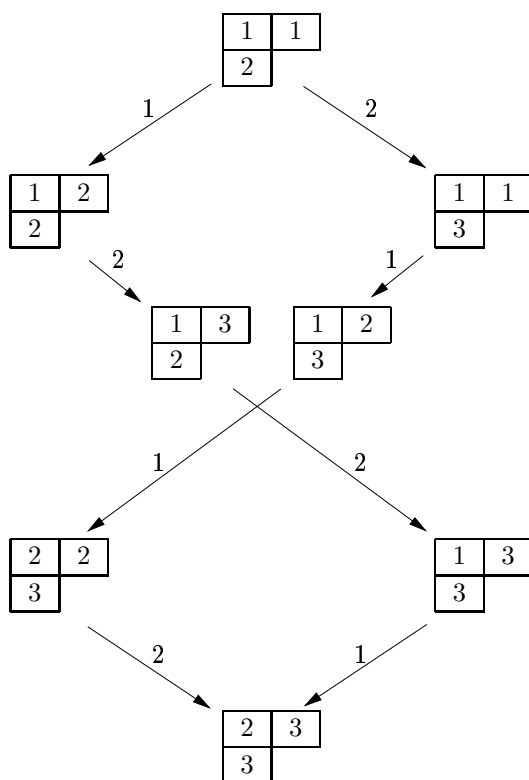


FIGURE 5.2. Graphe cristallin de $B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ par les tableaux de Young

Corollaire 5.2.4. — La dimension du $U_q(\mathfrak{g})$ -module $V(\lambda)$ est égale au nombre de tableaux de Young semi-standards de forme λ .

Remarque 5.2.5. — Remarquons que de nombreuses opérations sur les tableaux de Young, comme les procédures d'insertion par ligne ou par

colonne et le jeu de taquin, possèdent une interprétation en termes de cristaux (voir [1]). Nous en verrons certaines en exercice.

5.3. Règle de Littlewood-Richardson

Nous sommes maintenant à même de décrire la décomposition du produit tensoriel $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ en composantes simples. La formule que nous obtiendrons sera équivalente à celle de Littlewood-Richardson.

L'élément \boxed{a} ($1 \leq a \leq n$) est *admissible* par rapport au diagramme de Young Y si le diagramme $Y + a$, obtenu en ajoutant une boîte à l'extrémité droite de la a -ième ligne de Y , est encore un diagramme de Young. Donc si $Y = Y(\lambda)$ avec $\lambda = \sum_j \lambda_j \Lambda_j$, l'admissibilité de \boxed{a} équivaut à $a = 1$ ou $\lambda_{a-1} = \langle h_{a-1}, \lambda \rangle > 0$. L'élément $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_m}$ est *admissible* par rapport à Y si $\boxed{a_k}$ est admissible par rapport à $(\cdots (Y + a_1) + \cdots + a_{k-1})$ pour tout $1 \leq k \leq m$.

Tout d'abord, observons que :

(1) Le vecteur $u_\lambda \otimes \boxed{i}$ est de plus haut poids si et seulement si \boxed{i} est admissible par rapport à $Y(\lambda)$. En effet

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(u_\lambda \otimes \boxed{i}) &= \max(\varepsilon_j(u_\lambda), \varepsilon_j(\boxed{i}) - \langle h_j, \text{wt}(u_\lambda) \rangle) \\ &= \max(0, \delta_{j,i-1} - \langle h_j, \lambda \rangle) = 0 \end{aligned}$$

pour tout $j \in I$ est équivalent à $i = 1$ ou $\langle h_{i-1}, \lambda \rangle > 0$.

Dans ce cas, le poids de $u_\lambda \otimes \boxed{i}$ est $\lambda + \epsilon_i$ et ce vecteur est représenté par le diagramme de Young $Y(\lambda) + i$.

(2) Le vecteur $u_\lambda \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell$ est de plus haut poids si et seulement si les vecteurs $u_\lambda \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_k$ sont de plus haut poids pour tout $k \leq \ell$.

(3) Donc le vecteur $u_\lambda \otimes \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N}$ est de plus haut poids si et seulement si $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N}$ est admissible par rapport à $Y(\lambda)$.

Ces remarques permettent d'obtenir le

Théorème 5.3.1. — Pour $\lambda \in \tilde{P}_+$ et $\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \Lambda_j \in \tilde{P}_+$, le produit tensoriel des modules $V(\lambda)$ et $V(\mu)$ se décompose sous la forme

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus V(\lambda + \epsilon_{a_1} + \cdots + \epsilon_{a_N}),$$

où $N = \sum_j j\mu_j$ et la somme est sur l'ensemble des $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N} \in B(\mu) \subset B(\Lambda_1)^{\otimes N}$ admissibles par rapport à $Y(\lambda)$.

Démonstration. — D'après le corollaire 4.1.7, le produit $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ est isomorphe à $\bigoplus V(\text{wt}(b))$, où la somme est sur l'ensemble des éléments b de plus haut poids de $B(\lambda) \otimes B(\mu)$. Ces éléments sont de la forme $b = u_\lambda \otimes b'$ avec $b' = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N} \in B(\mu)$. D'après l'observation (3) ci-dessus, le vecteur b est de plus haut poids si et seulement si $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N}$ est admissible par rapport à $Y(\lambda)$. \square

Par exemple, considérons le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ avec $\lambda = \Lambda_2$ et $\mu = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Les éléments de $B(\mu)$ sont

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & , & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Alors

$$\left(\left(\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + 1 \right) + 1 \right) + 2 = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + 1 \right) + 2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + 2 = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}.$$

Par contre,

$$\left(\left(\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} + 2 \right) + 1 \right) + 2 = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + 1 \right) + 2,$$

et $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ n'est pas un diagramme de Young. En continuant cette procédure, nous vérifions que seulement

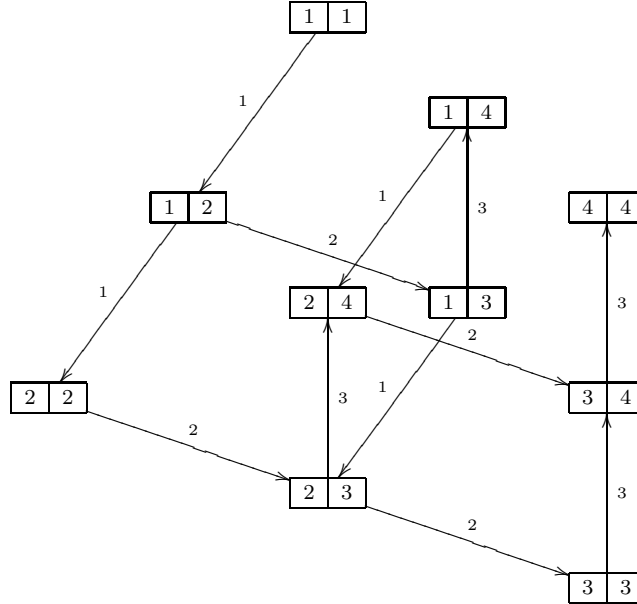
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \in B(\mu)$$

contribuent au produit tensoriel. D'où finalement

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

Examinons deux graphes cristallins obtenus par l'algorithme ci-dessus.

En observant la figure 5.3 de $B(2\Lambda_1)$ pour \mathfrak{gl}_4 , on vérifie qu'il contient le graphe de $B(2\Lambda_1)$ pour \mathfrak{gl}_3 (en son niveau inférieur, c'est-à-dire en partant du plus haut poids et en considérant uniquement l'action des opérateurs \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2). L'opérateur \tilde{f}_3 , quant à lui, augmente l'altitude dans le graphe.

FIGURE 5.3. Graphe cristallin de $B(2\Lambda_1)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_4$

La figure 5.4 de $B(2\Lambda_1 + 2\Lambda_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ permet d'appréhender la symétrie de la base cristalline, ainsi que le rôle dual des vecteurs de plus haut et de plus bas poids.

L'étude du cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ est ainsi achevée. Pour les algèbres de Lie de type \mathfrak{sp}_n et \mathfrak{so}_n , des tableaux de Young et des règles de Littlewood-Richardson similaires existent (voir [19] et [27]).

Exercice 5.1. — Démontrez la formule (5.1.1).

Un *diagramme de Young gauche* est le diagramme obtenu en enlevant un petit diagramme de Young à un plus gros diagramme de Young le contenant. De façon équivalente, si le diagramme contient une boîte en position (i, j) et une boîte en position (i', j') , alors il contient une boîte en position (i'', j'') dès que $i \leq i'' \leq i'$ et $j \leq j'' \leq j'$. Ici la position (i, j) signifie à la i -ième ligne en partant du haut et à la j -ième colonne en partant de la gauche. Par exemple $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ sont des diagrammes de Young gauches, mais $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ n'en est pas un.

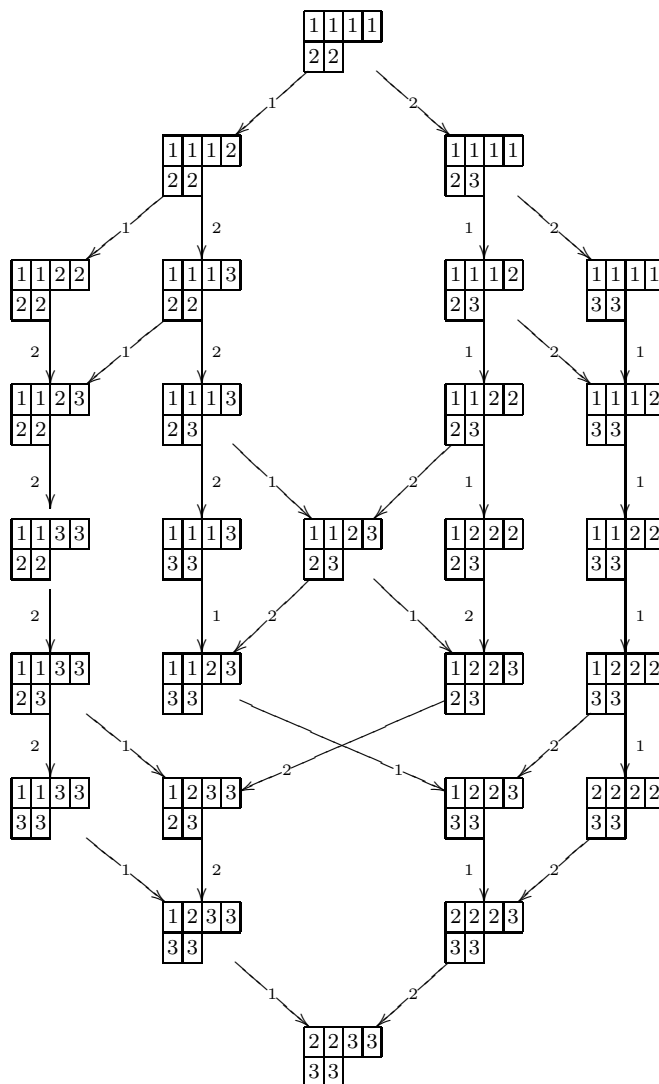


FIGURE 5.4. Graphe cristallin de $B(2\Lambda_1 + 2\Lambda_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$

Soit Y un diagramme de Young gauche. Un *tableau de Young gauche* de forme Y est un diagramme de Young gauche de forme Y dont chaque boîte contient un entier compris entre 1 et n . Un tableau de Young gauche est dit semi-standard si le nombre dans les boîtes augmente de gauche à droite et augmente strictement de haut en bas.

Soit Y un diagramme de Young gauche à N boîtes. Notons $B(Y)$ l'ensemble des tableaux de Young gauches semi-standard de forme Y . Pour un ordre total

ord sur l'ensemble des boîtes de Y , soit $R_{ord} : B(Y) \longrightarrow B(\Lambda_1)^{\otimes N}$ l'application qui envoie b sur $\boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N}$, où a_k est le nombre dans la k -ième boîte (pour l'ordre ord) du tableau b . On appelle cette application une *lecture*.

On dit qu'un ordre total ord (ou que la lecture associée) est admissible si lorsqu'une boîte x est faiblement au-dessus et faiblement à droite d'une boîte y , alors la boîte x est inférieure ou égale à y pour ord .

Exercice 5.2. — Soit Y un diagramme de Young gauche. Démontrez qu'il existe une et une seule structure de cristal normal sur $B(Y)$ telle que toute lecture admissible $B(Y) \longrightarrow B(\Lambda_1)^{\otimes N}$ soit un plongement plein.

Remarquons que le cristal $B(Y)$ n'est pas forcément connexe.

La lecture employée dans ce chapitre est admissible. On l'appelle *lecture japonaise*. Il existe une autre lecture admissible employée parfois, la *lecture arabe*, dans laquelle le parcours est effectué de droite à gauche et de haut en bas.

Notons que les lectures japonaise et arabe sont mentionnées dans [5] sous les noms « column word » et « row word » respectivement. La lecture dans cet ouvrage est dans la direction opposée à la nôtre.

Soient B_j un cristal et $b_j \in B_j$ ($j = 1, 2$). Notons C_j la composante connexe de B_j contenant b_j . On dit que b_1 et b_2 sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme de cristaux $C_1 \xrightarrow{\sim} C_2$ envoyant b_1 sur b_2 ; on écrit alors $b_1 \equiv b_2$. La relation d'équivalence que l'on obtient sur le produit tensoriel d'éléments de $B(\Lambda_1)$ est appelée équivalence de Knuth (voir [5]). L'exercice suivant fournit un algorithme pour déterminer à quel tableau semi-standard est équivalent le produit tensoriel d'un triplet d'éléments de $B(\Lambda_1)$ donné.

Exercice 5.3 (équivalence de Knuth [1, 5]). — Pour $1 \leq a, b, c \leq n$ tels que $a < b$ et $c \leq b$, démontrez que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array} \equiv \boxed{a} \otimes \boxed{b} \otimes \boxed{c} \equiv \begin{cases} \boxed{b} \otimes \boxed{a} \otimes \boxed{c} \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} & \text{si } a < c \leq b, \\ \boxed{a} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{b} \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline c & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} & \text{si } c \leq a < b. \end{cases}$$

C'est le cas le plus simple de « jeu de taquin » (voir [5]), qui est un algorithme pour trouver le tableau de Young équivalent à un tableau de Young gauche semi-standard donné.

Pour un tableau de Young gauche semi-standard donné, choisissons un coin intérieur, c'est-à-dire une boîte hors du diagramme gauche telle que les boîtes à droite et en-dessous d'elle soient contenues dans le diagramme gauche. Considérons le coin intérieur comme une boîte vide. On fait glisser une de ses voisines de droite ou de dessous à la place de la boîte vide, de sorte à ce que le tableau résultant soit semi-standard. Ceci crée une nouvelle boîte vide dans le diagramme, avec laquelle on répète le processus (en glissant une de ses voisines à sa place). On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de voisine à droite ou en-dessous. Nous arrivons alors à un tableau de Young gauche. On répète ce processus en choisissant d'autres coins intérieurs, jusqu'à arriver à un tableau de Young gauche sans coin intérieur, c'est-à-dire un tableau de Young. Le processus total est appelé « jeu de taquin ».

Par exemple, prenons $\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$ comme membre de gauche dans l'exercice 5.3 ci-dessus. Lorsque $a < c \leq b$, le tableau gauche $\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$ change en $\begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$ puis en le second membre $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array}$. Notons que $\begin{array}{|c|c|} \hline c & a \\ \hline & b \\ \hline \end{array}$ n'est pas semi-standard.

Lorsque $c \leq a < b$, le tableau gauche $\begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$ change en $\begin{array}{|c|c|} \hline c & a \\ \hline & b \\ \hline \end{array}$ puis en $\begin{array}{|c|c|} \hline c & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$.

Exercice 5.4 (jeu de taquin). — Démontrez que pour tout tableau de Young gauche semi-standard et pour n'importe lequel de ses coins intérieurs, le processus ci-dessus est unique et conduit à un tableau de Young gauche semi-standard équivalent au tableau de départ.

Exercice 5.5 (procédure d'insertion par ligne [1, 5])

(1) Démontrez que pour toute suite décroissante $a_1 \geq \dots \geq a_m$ et pour tout $c < a_1$ on a

$$\begin{aligned} & \boxed{c} \otimes \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \\ & \equiv \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_{k-1}} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{a_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \otimes \boxed{a_k} \end{aligned}$$

où k est le plus grand entier tel que $c < a_k$ (\boxed{c} s'insère à la place de $\boxed{a_k}$).

(2) Démontrez que pour toute suite décroissante $a_1 \geq \dots \geq a_m$ et pour tout $c > a_m$ on a

$$\begin{aligned} & \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \otimes \boxed{c} \\ & \equiv \boxed{a_k} \otimes \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_{k-1}} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{a_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \end{aligned}$$

où k est le plus petit entier tel que $c > a_k$ (\boxed{c} s'insère à la place de $\boxed{a_k}$).

(3) En utilisant la lecture arabe et (1), donnez un algorithme (procédure d'insertion par ligne) sur les tableaux de Young fournissant un isomorphisme

$$B(\Lambda_1) \otimes B(\lambda) \xrightarrow{\simeq} \bigsqcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j=1 \text{ ou } \lambda_{j-1} > 0}} B(\lambda + \epsilon_j).$$

(4) À l'aide de (2), donnez un algorithme fournissant un plongement $B(\lambda + \epsilon_j) \hookrightarrow B(\Lambda_1) \otimes B(\lambda)$.

Exercice 5.6 (procédure d'insertion par colonne [1, 5])

(1) Démontrez que pour toute suite strictement croissante $a_1 < \dots < a_m$ et pour tout $c \leq a_m$ on a

$$\begin{aligned} & \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \otimes \boxed{c} \\ & \equiv \boxed{a_k} \otimes \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_{k-1}} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{a_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \end{aligned}$$

où k est le plus petit entier tel que $c \leq a_k$ (\boxed{c} s'insère à la place de $\boxed{a_k}$).

(2) Démontrez que pour toute suite strictement croissante $a_1 < \dots < a_m$ et pour tout $c \geq a_1$ on a

$$\begin{aligned} & \boxed{c} \otimes \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \\ & \equiv \left(\boxed{a_1} \otimes \dots \otimes \boxed{a_{k-1}} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{a_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boxed{a_m} \right) \otimes \boxed{a_k} \end{aligned}$$

où k est le plus grand entier tel que $c \geq a_k$ (\boxed{c} s'insère à la place de $\boxed{a_k}$).

(3) Comme dans l'exercice précédent, donnez en utilisant la lecture japonaise un algorithme (procédure d'insertion par colonne) sur les tableaux de Young fournissant un isomorphisme

$$B(\lambda) \otimes B(\Lambda_1) \xrightarrow{\simeq} \bigsqcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j = 1 \text{ ou } \lambda_{j-1} > 0}} B(\lambda + \epsilon_j).$$

(4) Donnez un algorithme fournissant un plongement $B(\lambda + \epsilon_j) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\Lambda_1)$.

Exercice 5.7. — Soit Y un diagramme de Young gauche. Démontrez que $B(Y)$ est connexe (donc non vide) si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes :

- (1) Tous les colonnes sont de longueur inférieure ou égale à n .
- (2) Le diagramme obtenu à partir de Y en enlevant les colonnes de longueur n est un diagramme de Young ou bien la rotation par 180° d'un diagramme de Young.

CHAPITRE 6

BASES GLOBALES DES $U_q(\mathfrak{g})$ -MODULES

Jusqu'à maintenant, nous avons décrit des bases cristallines, c'est-à-dire des bases locales en $q = 0$. En fait, nous pouvons construire de vraies bases des représentations $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$).

6.1. Triplet équilibré

Un K -espace vectoriel V est vu comme un fibré vectoriel au-dessus de l'espace projectif \mathbb{P}^1 de dimension 1 et défini sur un point générique, et un A -module L est vu comme un fibré vectoriel défini sur un voisinage de l'origine. Alors L/qL est la fibre au-dessus de l'origine. Si le fibré est défini globalement sur \mathbb{P}^1 et s'il est trivial, alors tout élément de la fibre au-dessus de l'origine peut se prolonger de façon unique en une section globale du fibré. Dans ce cas, une base locale en $q = 0$ nous donne une base de V . Formulons en termes algébriques cette situation géométrique.

Soit $K = k(q)$. Posons $A = \{f \in K ; f \text{ régulière en } q = 0\}$ et $\bar{A} = \{f \in K ; f \text{ régulière en } q = \infty\}$. Soit V un K -espace vectoriel. Prenons un sous- A -module L , un sous- \bar{A} -module L_∞ et un sous- $k[q, q^{-1}]$ -module $V_{\mathbb{Z}}$ de V tels que $V \cong K \otimes_A L \cong K \otimes_{\bar{A}} L_\infty \cong K \otimes_{k[q, q^{-1}]} V_{\mathbb{Z}}$.

Proposition 6.1.1. — *Notons $E = L \cap L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}$. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'application $E \longrightarrow L/qL$ est un isomorphisme.*
- (2) *L'application $E \longrightarrow L_\infty/q^{-1}L_\infty$ est un isomorphisme.*
- (3) *L'application $(qL \cap V_{\mathbb{Z}}) \oplus (L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow V_{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme.*

(4) Les applications $A \otimes_k E \longrightarrow L$, $\bar{A} \otimes_k E \longrightarrow L_\infty$, $k[q, q^{-1}] \otimes_k E \longrightarrow V_{\mathbb{Z}}$ et $K \otimes_k E \longrightarrow V$ sont des isomorphismes.

Démonstration. — (4) \Rightarrow (3) : Le résultat est immédiat lorsque l'on effectue le produit tensoriel par E des deux membres de $(qA \cap k[q, q^{-1}]) \oplus (\bar{A} \cap k[q, q^{-1}]) \xrightarrow{\sim} k[q, q^{-1}]$.

(3) \Rightarrow (1) : L'injectivité découle de $\text{Ker}(E \longrightarrow L/qL) = E \cap qL = qL \cap L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} = 0$. Soit $u \in L \subset K \otimes_{k[q, q^{-1}]} V_{\mathbb{Z}}$. Il existe un polynôme de Laurent $\varphi \in k[q, q^{-1}]$ non nul et tel que $\varphi u \in V_{\mathbb{Z}}$. Nous pouvons supposer $\varphi \in k[q]$ et $\varphi(0) = 1$. Puisque $\varphi u \in L \cap V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{Z}}$, il existe par hypothèse $v_1 \in qL \cap V_{\mathbb{Z}}$ et $v_2 \in L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}$ tels que $\varphi u = v_1 + v_2$. Mais alors $v_2 \in L \cap L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} = E$, et modulo qL nous obtenons $v_2 \equiv \varphi u \equiv \varphi(0)u \equiv u$. D'où la surjectivité.

(1) \Rightarrow (4) : Montrons d'abord que pour tout entier $r \geq 0$ l'application $\bigoplus_{j=0}^r q^j E \rightarrow L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme. Effectuons pour cela une récurrence sur r . L'assertion est triviale pour $r = 0$; soit alors $r > 0$. Nous avons une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} &\longrightarrow L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} \\ &\longrightarrow (L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}})/(qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Or $qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} = q(L \cap q^{r-1} L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) \simeq \bigoplus_{j=1}^r q^j E$ d'après l'hypothèse de récurrence. Par ailleurs $E \subset L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}$ et $(L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}})/(qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) \subset L/qL$, avec $E \simeq L/qL$ par hypothèse; donc $(L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}})/(qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) \simeq L/qL$ et $L \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} = E \oplus (qL \cap q^r L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) = E \oplus \bigoplus_{j=1}^r q^j E$.

Pour tous $a \leq b$, nous avons

$$q^a L \cap q^b L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}} = q^a (L \cap q^{b-a} L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) = q^a \bigoplus_{j=0}^{b-a} q^j E = \bigoplus_{j=a}^b q^j E.$$

Puisque $V = \bigcup_{a \rightarrow -\infty} q^a L = \bigcup_{b \rightarrow +\infty} q^b L_\infty$, nous obtenons pour tout a

$$q^a L \cap V_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{b \geq a} (q^a L \cap q^b L_\infty \cap V_{\mathbb{Z}}) = \bigoplus_{j \geq a} q^j E = q^a k[q] \otimes E,$$

et ainsi $V_{\mathbb{Z}} \simeq \bigcup_a q^a L \cap V_{\mathbb{Z}} \simeq k[q, q^{-1}] \otimes E$. Donc $V = K \otimes_{k[q, q^{-1}]} V_{\mathbb{Z}} \simeq K \otimes_k E$.

Nous avons $A \otimes E \subset L$. Mais si $u \in L$, il existe $\varphi \in k[q]$ tel que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi u \in V_{\mathbb{Z}} \cap L \simeq k[q] \otimes_k E$. Donc $u \in \varphi^{-1}k[q] \otimes_k E \subset A \otimes_k E$. Il s'ensuit que $L = A \otimes E$. On vérifie de même que $L_{\infty} = \overline{A} \otimes_k E$. \square

Remarque 6.1.2. — Soit \mathcal{E} le fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1 = \text{Spec}(k[q]) \cup \text{Spec}(k[q^{-1}])$ correspondant à $(L, L_{\infty}, V_{\mathbb{Z}})$. Alors le sous- A -module L correspond au germe \mathcal{E}_0 de \mathcal{E} en l'origine, le sous- \overline{A} -module L_{∞} au germe \mathcal{E}_{∞} de \mathcal{E} en ∞ , et le sous- $k[q, q^{-1}]$ -module $V_{\mathbb{Z}}$ à l'ensemble des sections au-dessus de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Pour tout ouvert de Zariski U non vide de \mathbb{P}^1 , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(U; \mathcal{E}) &= \{s \in \Gamma(U \setminus \{0, \infty\}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \otimes_{k[q, q^{-1}]} V_{\mathbb{Z}} \subset V; \\ &\quad s \in L \text{ si } 0 \in U, \text{ et } s \in L_{\infty} \text{ si } \infty \in U\}. \end{aligned}$$

Donc l'espace vectoriel E coïncide avec l'ensemble des sections globales. La condition (3) est équivalente à $H^0(\mathbb{P}^1; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})) = H^1(\mathbb{P}^1; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})) = 0$. Ici $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ des fonctions qui s'annulent en $q = 0$. En effet, sa cohomologie est isomorphe à la cohomologie de Čech selon le recouvrement $(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$, c'est-à-dire celle du complexe

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})) \oplus \Gamma(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})) \\ \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}; \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\{0\})), \end{aligned}$$

qui coïncide avec $(qL \cap V_{\mathbb{Z}}) \oplus (L_{\infty} \cap V_{\mathbb{Z}}) \rightarrow V_{\mathbb{Z}}$.

Définition 6.1.3. — Un triplet $(L, L_{\infty}, V_{\mathbb{Z}})$ vérifiant les quatre conditions équivalentes de la proposition 6.1.1 est dit *équilibré* (« balanced »).

Dans ce cas, notons $G: L/qL \rightarrow E$ l'isomorphisme réciproque de celui de la proposition 6.1.1 (1). Soit B une base de L/qL . Alors $G(B)$ est une base du k -espace E , donc $\{G(b); b \in B\}$ est une base du K -espace V , du A -module L , du \overline{A} -module L_{∞} et du $k[q, q^{-1}]$ -module $V_{\mathbb{Z}}$. L'ensemble $\{G(b); b \in B\}$ est appelé *base globale* de V .

Appliquons cette théorie aux $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. Soit $-$ l'automorphisme de l'anneau $U_q(\mathfrak{g})$ fixant les e_i et f_i et envoyant q et $q(h)$ sur respectivement q^{-1} et $q(-h)$.

Pour tout poids dominant $\lambda \in P_+$, le module $V(\lambda)$ vérifie

$$(6.1.1) \quad V(\lambda) \simeq U_q(\mathfrak{g}) / \sum_{h \in P^*} U_q(\mathfrak{g})(q^h - q^{\langle h, \lambda \rangle}) + \sum_{i \in I} U_q(\mathfrak{g})e_i + \sum_{i \in I} U_q(\mathfrak{g})f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle},$$

de dénominateur invariant par $-$. Notons alors $-$ l'involution de $V(\lambda)$ qui envoie Pu_λ sur $\overline{P}u_\lambda$ pour tout $P \in U_q(\mathfrak{g})$.

Soit $(L(\lambda), B(\lambda))$ la base cristalline de $V(\lambda)$. On a vu à la page 41 que $V(\lambda)_{\mathbb{Z}} := U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}u_\lambda \subset V(\lambda)$ est un sous- $k[q, q^{-1}]$ -module de $V(\lambda)$ qui engendre $V(\lambda)$ comme espace vectoriel. Admettons le

Théorème 6.1.4 ([13]). — *Le triplet $(L(\lambda), L(\lambda)^-, V(\lambda)_{\mathbb{Z}})$ est équilibré.*

Notons G_λ l'isomorphisme réciproque de

$$L(\lambda) \cap L(\lambda)^- \cap V(\lambda)_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L(\lambda)/qL(\lambda).$$

L'ensemble $G_\lambda(B(\lambda)) = \{G_\lambda(b); b \in B(\lambda)\}$ est une base de $V(\lambda)$ et ainsi

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \bigoplus_{b \in B(\lambda)} KG_\lambda(b), \\ L(\lambda) &= \bigoplus_{b \in B(\lambda)} AG_\lambda(b), \\ V(\lambda)_{\mathbb{Z}} &= \bigoplus_{b \in B(\lambda)} k[q, q^{-1}]G_\lambda(b). \end{aligned}$$

Plus généralement, soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable de base cristalline (L, B) . Soit $-$ une involution de M satisfaisant à $(au)^- = \overline{a} \overline{u}$ pour tous $a \in U_q(\mathfrak{g})$ et $u \in M$. Soit $M_{\mathbb{Z}}$ un sous- $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ -module de M stable par $-$ tel que $M \simeq k(q) \otimes_{k[q, q^{-1}]} M_{\mathbb{Z}}$ et

$$(6.1.2) \quad u - \overline{u} \in (q - 1)M_{\mathbb{Z}} \quad \text{pour tout } u \in M_{\mathbb{Z}}.$$

Si un triplet $(L, \overline{L}, M_{\mathbb{Z}})$ est équilibré, on dit que M admet une *base globale*. Dans ce cas, notons $G: L/qL \rightarrow E = L \cap \overline{L} \cap M_{\mathbb{Z}}$ l'isomorphisme réciproque de $E \xrightarrow{\sim} L/qL$. Si B est une base de L/qL , alors $G(B)$ devient une base de M . On l'appelle alors *base globale* de M .

Donnons une condition suffisante pour que (6.1.2) soit vérifiée.

Lemme 6.1.5. — Supposons qu'il existe un sous- k -module F de $M_{\mathbb{Z}}$ tel que $M_{\mathbb{Z}} = U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}F$. Si $u - \bar{u} \in (q-1)M_{\mathbb{Z}}$ pour tout $u \in F$, alors (6.1.2) est vérifiée.

Démonstration. — Nous avons $a - \bar{a} \in (q-1)U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ pour tout $a \in U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$, d'où $au - \bar{a}\bar{u} = (a - \bar{a})u + \bar{a}(u - \bar{u}) \in (q-1)M_{\mathbb{Z}}$ pour tout $u \in F$. \square

Lemme 6.1.6. — La base globale de M vérifie $G(b)^- = G(b)$ pour tout $b \in B$.

Démonstration. — Soit $u \in L \cap \bar{L} \cap M_{\mathbb{Z}}$. Alors $\bar{u} \in L \cap \bar{L}$, donc $u - \bar{u} \in L \cap \bar{L} \cap (q-1)M_{\mathbb{Z}}$ d'après l'hypothèse sur $M_{\mathbb{Z}}$, d'où

$$(q-1)^{-1}(u - \bar{u}) \in (q-1)^{-1}L \cap (q-1)^{-1}\bar{L} \cap M_{\mathbb{Z}}.$$

Puisque $q-1$ est inversible dans A et $(q-1)^{-1}\bar{L} = q^{-1}\bar{L}$, nous obtenons $(q-1)^{-1}L \cap (q-1)^{-1}\bar{L} \cap M_{\mathbb{Z}} = L \cap q^{-1}\bar{L} \cap M_{\mathbb{Z}} = 0$. \square

Corollaire 6.1.7. — Le vecteur $G(b)$ est l'unique $u \in L \cap M_{\mathbb{Z}}$ tel que $\bar{u} = u$ et $b \equiv u \pmod{qL}$.

Hélas, la base globale d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module n'est en général pas facile à déterminer.

Exemple 6.1.8. — Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, la base globale de $V(\lambda)$ est formée des $f^{(n)}u_{\lambda}$ ($0 \leq n \leq \text{wt}(\lambda)$).

Exemple 6.1.9. — Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, la base globale de $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) est

$$\begin{aligned} & \{f_1^{(\ell)} f_2^{(m)} f_1^{(n)} u_{\lambda}; m \geq \ell + n \text{ et } n \leq \langle h_1, \lambda \rangle, m \leq n + \langle h_2, \lambda \rangle\} \\ & \cup \{f_2^{(\ell)} f_1^{(m)} f_2^{(n)} u_{\lambda}; m \geq \ell + n \text{ et } n \leq \langle h_2, \lambda \rangle, m \leq n + \langle h_1, \lambda \rangle\}. \end{aligned}$$

On a dans le premier cas

$$f_1^{(\ell)} f_2^{(m)} f_1^{(n)} u_{\lambda} = G_{\lambda}(\tilde{f}_1^{\ell} \tilde{f}_2^m \tilde{f}_1^n u_{\lambda}) = G_{\lambda}(\tilde{f}_2^{m-\ell} \tilde{f}_1^{n+\ell} \tilde{f}_2^{\ell} u_{\lambda}).$$

Notons que $f_1^{(\ell)} f_2^{(\ell+n)} f_1^{(n)} u_{\lambda} = f_2^{(n)} f_1^{(\ell+n)} f_2^{(\ell)} u_{\lambda}$ si $\ell, n \geq 0$ et que l'intersection des deux ensembles est formée exactement de ces cas.

Exemple 6.1.10. — Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$, voir [31].

6.2. Propriétés des bases globales

Soit M un module intégrable admettant une base globale et satisfaisant à $G(b)^- = G(b)$ pour tout $b \in B$. Supposons de plus que pour tout poids λ le module $M_{\lambda+n\alpha_i}$ est nul lorsque n est assez grand. Alors

$$f_i^n M = \bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} KG(b), \quad e_i^n M = \bigoplus_{\varphi_i(b) \geq n} KG(b).$$

Plus précisément, nous avons la

Proposition 6.2.1. — *Sous les hypothèses précédentes, la base globale de M vérifie*

$$(6.2.1) \quad \begin{aligned} f_i^{(n)} M \cap M_{\mathbb{Z}} &= \sum_{m \geq n} f_i^{(m)} M_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b), \\ e_i^{(n)} M \cap M_{\mathbb{Z}} &= \sum_{m \geq n} e_i^{(m)} M_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\varphi_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b). \end{aligned}$$

Démonstration. — Puisqu'un seul i intervient, ramenons-nous au cas de \mathfrak{sl}_2 avec $M = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} M_{\mu+m\alpha_i}$ pour un $\mu \in P$. Démontrons la formule par récurrence descendante sur n . Si $n \gg 0$, les deux membres de (6.2.1) sont nuls. Supposons les équations (6.2.1) vraies pour $n > n_0$ et démontrons-les pour $n = n_0$. A cette fin, nous avons besoin du

Lemme 6.2.2. — *Pour $b \in B$, notons $\tilde{e}_i^{\max} b = \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b$. Alors*

$$G(b) \in f_i^{(\varepsilon_i(b))} G(\tilde{e}_i^{\max} b) + \sum_{\varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(b)} k[q, q^{-1}]G(b')$$

si $\varepsilon_i(b) \geq n_0$.

Démonstration. — Soient $\ell = \varepsilon_i(b)$ et $b_0 = \tilde{e}_i^{\max} b$ (équivalent à $b = \tilde{f}_i^{\ell} b_0$). Alors $L \ni G(b_0) = \sum_{k \geq 0} f_i^{(k)} u_k$ avec $e_i u_k = 0$, $u_0 = b_0 \bmod qL$ et $u_k \in qL$ si $k > 0$. Mais $f_i^{(\ell)} G(b_0) = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell \end{bmatrix} f_i^{(k+\ell)} u_k$ et $G(\tilde{f}_i^{\ell} b_0) \equiv f_i^{(\ell)} u_0 \bmod qL$.

Donc $v := G(\tilde{f}_i^{\ell} b_0) - f_i^{(\ell)} G(b_0)$ appartient à $(f_i^{\ell+1} M + qL) \cap M_{\mathbb{Z}}$. D'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &(f_i^{\ell+1} M + qL) \cap M_{\mathbb{Z}} \\ &= \left(\bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} KG(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} qAG(b') \right) \cap \left(\bigoplus_{b'} k[q, q^{-1}]G(b') \right) \\ &= \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} qk[q]G(b'), \end{aligned}$$

et ainsi $v \in \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} qk[q]G(b')$. Mais $\bar{v} = v$ et par conséquent

$$\begin{aligned} v &\in \left(\bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} qk[q]G(b') \right) \\ &\quad \cap \left(\bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} q^{-1}k[q^{-1}]G(b') \right) \\ &\subset \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b') + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \leq \ell} (qk[q] \cap q^{-1}k[q^{-1}])G(b'). \end{aligned}$$

Or $qk[q] \cap q^{-1}k[q^{-1}] = 0$, d'où finalement $v \in \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b')$. \square

Fin de la démonstration de la proposition 6.2.1. — Si $\ell = \varepsilon_i(b) \geq n_0$, alors $G(b) \in f_i^{(\ell)}G(\tilde{e}_i^{\max}b) + \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > \ell} k[q, q^{-1}]G(b')$ d'après le lemme 6.2.2. D'où $G(b) \in \sum_{m \geq \ell} f_i^{(m)}M_{\mathbb{Z}}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il nous reste à vérifier que $f_i^{(n)}M \cap M_{\mathbb{Z}} \subset \sum_{\varepsilon_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b)$. Pour ce faire, considérons l'espace vectoriel $V = f_i^{(n)}M$ et son sous- $k[q, q^{-1}]$ -module $V_{\mathbb{Z}} = M_{\mathbb{Z}} \cap V$. Il nous suffit de démontrer que $V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b)$. Posons $L_V = L \cap V$ et $\bar{L}_V = \bar{L} \cap V$. Alors le quotient L_V/qL_V est un sous-espace $\bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} kb$ de L/qL d'après le lemme 2.2.12. L'isomorphisme $L \cap \bar{L} \cap M_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L/qL$ induit une injection $L_V \cap \bar{L}_V \cap V_{\mathbb{Z}} \rightarrow L_V/qL_V$. Or $G(b) \in L_V \cap \bar{L}_V \cap V_{\mathbb{Z}}$ lorsque $\varepsilon_i(b) \geq n$, donc le morphisme est également surjectif. Il s'ensuit que le triplet $(L_V, \bar{L}_V, V_{\mathbb{Z}})$ est équilibré et $L_V \cap \bar{L}_V \cap V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} kG(b)$, ce qui entraîne $V_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\varepsilon_i(b) \geq n} k[q, q^{-1}]G(b)$. \square

Proposition 6.2.3. — *Pour tous $b, b' \in B$, $m \in \mathbb{Z}$ et $i \in I$, il existe des éléments $F_{b,b'}^{(m)i} \in q_i^{-m(\varepsilon_i(b')-m)}qk[q]$, $E_{b,b'}^{(m)i} \in q_i^{-m(\varphi_i(b')-m)}qk[q]$ tels que*

$$\begin{aligned} f_i^{(m)}G(b) &= \begin{bmatrix} \varepsilon_i(b) + m \\ m \end{bmatrix}_i G(\tilde{f}_i^m b) + \sum_{\varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(b) + m} F_{b,b'}^{(m)i} G(b'), \\ e_i^{(m)}G(b) &= \begin{bmatrix} \varphi_i(b) + m \\ m \end{bmatrix}_i G(\tilde{e}_i^m b) + \sum_{\varphi_i(b') > \varphi_i(b) + m} E_{b,b'}^{(m)i} G(b'), \end{aligned}$$

et $\overline{F_{b,b'}^{(m)i}} = F_{b,b'}^{(m)i}$, $\overline{E_{b,b'}^{(m)i}} = E_{b,b'}^{(m)i}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que

$$(6.2.2) \quad \begin{aligned} f_i^{(m)}L &\subset \sum_{k \geq 0} q_i^{-km} (L \cap f_i^{(m+k)}M) \\ &= \sum_{k \geq 0, \varepsilon_i(b') \geq m+k} q_i^{-km} AG(b') \\ &= \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \geq m} q_i^{-(\varepsilon_i(b')-m)m} AG(b'). \end{aligned}$$

En effet, tout $u \in L$ peut s'écrire $u = \sum_k f_i^{(k)}u_k$ avec $e_i u_k = 0$ et $u_k \in L$. Alors $f_i^{(m)}u = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}_i f_i^{(m+k)}u_k \subset \sum_{k \geq 0} q_i^{-km} (L \cap f_i^{(m+k)}M)$.

Soit $n = \varepsilon_i(b)$. Posons $b_0 = \tilde{e}_i^n b$ (équivalent à $b = \tilde{f}_i^n b_0$) et $G(b_0) = \sum_{k \geq 0} f_i^{(k)}u_k$, avec $e_i u_k = 0$, $u_0 \in L$ et $u_k \in qL$ si $k > 0$.

Puisque $G(b) - f_i^{(n)}u_0 \in qL$, on a $f_i^{(m)}G(b) - \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i f_i^{(n+m)}u_0 \in qf_i^{(m)}L$. Par ailleurs, nous avons $G(\tilde{f}_i^m b) - f_i^{(n+m)}u_0 \in qL$. D'où

$$\begin{aligned} w &:= f_i^{(m)}G(b) - \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i G(\tilde{f}_i^m b) \\ &= (f_i^{(m)}G(b) - \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i f_i^{(n+m)}u_0) - \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i (G(\tilde{f}_i^m b) - f_i^{(n+m)}u_0) \\ &\in qf_i^{(m)}L + \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i qL = qf_i^{(m)}L + qq_i^{-nm}L \\ &\subset \bigoplus_{\varepsilon_i(b') \geq m} qq_i^{-(\varepsilon_i(b')-m)m} AG(b') + \bigoplus_{b'} qq_i^{-nm} AG(b'). \end{aligned}$$

D'autre part, le lemme 6.2.2 implique

$$\begin{aligned} w &= f_i^{(m)}(G(b) - f_i^{(n)}G(b_0)) - \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_i (G(\tilde{f}_i^m b) - f_i^{(n+m)}G(b_0)) \\ &\in M_{\mathbb{Z}} \cap f_i^{(n+m+1)}M \subset \sum_{\varepsilon_i(b') > n+m} k[q, q^{-1}]G(b'). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} w &\in \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > n+m} \left(k[q, q^{-1}] \cap (qq_i^{-(\varepsilon_i(b')-m)m}A + qq_i^{-nm}A) \right) G(b') \\ &\subset \bigoplus_{\varepsilon_i(b') > n+m} qq_i^{-(\varepsilon_i(b')-m)m} k[q]G(b'), \end{aligned}$$

d'où le résultat. L'assertion pour $e_i^{(m)}G(b)$ se démontre de même. \square

Remarque 6.2.4. — G. Lusztig ([24, 25]) a introduit les bases globales (qu'il a appelées bases canoniques) en réalisant $U_q^-(\mathfrak{g})$ comme le K -groupe des faisceaux constructibles sur la variété des carquois équivariants pour des actions de groupes (voir également [26]). Dans ce contexte, la base canonique correspond aux faisceaux pervers irréductibles.

Exercice 6.1. — Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$ -module intégrable de \mathcal{O}_{int} muni d'une base cristalline (L, B) . Soient $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ ($i \in I$) et $\lambda \in P$. Démontrez que

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcap_{i \in I} (e_i^{n_i} M \cap f_i^{m_i} M)\right)_\lambda \\ = \#\{b \in B_\lambda; \varphi_i(b) \geq n_i \text{ et } \varepsilon_i(b) \geq m_i \text{ pour tout } i \in I\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcap_{i \in I} (e_i^{n_i} M + f_i^{m_i} M)\right)_\lambda \\ = \#\{b \in B_\lambda; \text{pour tout } i \in I, \text{ on a } \varphi_i(b) \geq n_i \text{ ou bien } \varepsilon_i(b) \geq m_i\}, \end{aligned}$$

$$\bigcap_{i,j \in I} (e_i^{n_i} M + f_j^{m_j} M) = \left(\bigcap_{i \in I} e_i^{n_i} M\right) + \left(\bigcap_{i \in I} f_i^{m_i} M\right),$$

$$\sum_{i,j \in I} (e_i^{n_i} M \cap f_j^{m_j} M) = \left(\sum_{i \in I} e_i^{n_i} M\right) \cap \left(\sum_{i \in I} f_i^{m_i} M\right),$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i,j \in I} (\text{Ker}(e_i^{n_i} : M \rightarrow M) + \text{Ker}(f_j^{m_j} : M \rightarrow M)) \\ = \left(\bigcap_{i \in I} \text{Ker}(e_i^{n_i} : M \rightarrow M)\right) + \left(\bigcap_{i \in I} \text{Ker}(f_i^{m_i} : M \rightarrow M)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in I} (\text{Ker}(e_i^{n_i} : M \rightarrow M) \cap \text{Ker}(f_j^{m_j} : M \rightarrow M)) \\ = \left(\sum_{i \in I} \text{Ker}(e_i^{n_i} : M \rightarrow M)\right) \cap \left(\sum_{i \in I} \text{Ker}(f_i^{m_i} : M \rightarrow M)\right). \end{aligned}$$

(Indication : on peut supposer que M admet une base globale.)

CHAPITRE 7

BASE CRISTALLINE $B(\infty)$ DE L'ALGÈBRE $U_q^-(\mathfrak{g})$

Tout comme les modules $V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$), l'algèbre $U_q^-(\mathfrak{g})$ admet une base cristalline. Cette base est en fait obtenue comme limite de celle de $V(\lambda)$ quand λ tend vers l'infini.

7.1. Construction de la base $B(\infty)$

Soit $\xi \in Q_-$ un élément du treillis des racines. Pour tout poids dominant $\lambda \in P_+$, le lemme 3.2.7 affirme que

$$V(\lambda)_{\lambda+\xi} \simeq U_q^-(\mathfrak{g})_{\xi} / \sum_i U_q^-(\mathfrak{g})_{\xi+(1+\langle h_i, \lambda \rangle)\alpha_i} f_i^{1+\langle h_i, \lambda \rangle}.$$

Or $\xi + (1 + \langle h_i, \lambda \rangle)\alpha_i \notin Q_-$ pour $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$. Donc à ξ fixé $U_q^-(\mathfrak{g})_{\xi}$ et $V(\lambda)_{\lambda+\xi}$ sont isomorphes lorsque $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$ pour tout i .

Remarquons que pour deux poids dominants λ et μ le cristal $B(\lambda + \mu)$ s'injecte dans le cristal $B(\lambda) \otimes B(\mu)$ comme sous-cristal plein par le morphisme $B(\lambda + \mu) \ni u_{\lambda+\mu} \mapsto u_{\lambda} \otimes u_{\mu} \in B(\lambda) \otimes B(\mu)$. D'autre part, considérons le sous-ensemble $B(\lambda) \otimes \{u_{\mu}\} \subset B(\lambda) \otimes B(\mu)$.

Lemme 7.1.1. — (1) Pour tout $b \in B(\lambda)$, les vecteurs $\tilde{e}_i(b \otimes u_{\mu})$ et $(\tilde{e}_i b) \otimes u_{\mu}$ sont égaux.

(2) Si $b \in B(\lambda)$ vérifie $\tilde{f}_i b \in B(\lambda)$, alors $\tilde{f}_i(b \otimes u_{\mu}) = (\tilde{f}_i b) \otimes u_{\mu}$.

(3) Nous avons $B(\lambda) \otimes \{u_{\mu}\} \subset B(\lambda + \mu)$.

Démonstration. — (1) découle de $\varphi_i(b) \geq 0 = \varepsilon_i(u_\mu)$, et (2) de $\varphi_i(b) > 0 = \varepsilon_i(u_\mu)$. (3) est une conséquence de (2) et de $B(\lambda) = \{f_{i_1} \cdots f_{i_n} u_\lambda\} \setminus \{0\}$. \square

Lemme 7.1.2. — *Pour tous $\lambda, \mu \in P_+$, l'application $B(\lambda) \otimes T_\mu \hookrightarrow B(\lambda + \mu)$ défini par $b \otimes t_\mu \mapsto b \otimes u_\mu$ est un plongement e -strict (mais pas f -strict en général).*

Démonstration. — Nous avons $\varphi_i(b \otimes t_\mu) = \max(\varphi_i(b) + \langle h_i, \mu \rangle, -\infty) = \varphi_i(b) + \langle h_i, \mu \rangle$ et $\varphi_i(b \otimes u_\mu) = \max(\varphi_i(b) + \langle h_i, \mu \rangle, \langle h_i, \mu \rangle) = \varphi_i(b) + \langle h_i, \mu \rangle$ pour tout $b \in B(\lambda)$, donc l'application est compatible avec φ_i .

Par ailleurs $\varphi_i(b) \geq \varepsilon_i(t_\mu) = -\infty$, donc $\tilde{e}_i(b \otimes t_\mu) = (\tilde{e}_i b) \otimes t_\mu$. D'autre part, le lemme précédent implique que les vecteurs $\tilde{e}_i(b \otimes u_\mu)$ et $(\tilde{e}_i b) \otimes u_\mu$ sont égaux. Ainsi, l'application commute avec l'action des \tilde{e}_i .

Les autres axiomes des morphismes de cristaux se vérifient aisément. \square

La limite inductive de cristaux est définie comme suit. Soit J un ensemble ordonné filtrant. En d'autres termes J est un ensemble ordonné non vide tel que pour toute paire d'éléments j, k de J il existe un élément ℓ de J tel que $j \leq \ell$ et $k \leq \ell$. Soit $\{B_j\}_{j \in J}$ un système inductif de cristaux, c'est-à-dire une collection B_j de cristaux munis de morphismes de cristaux $\psi_{kj}: B_j \rightarrow B_k$ ($j \leq k \in J$) tels que $\psi_{jj} = \text{id}_{B_j}$ et $\psi_{kj}\psi_{ji} = \psi_{ki}$. Notons B la limite inductive ensembliste des B_j . Soit ψ_j l'application de B_j dans B . Les applications $\text{wt}, \varepsilon_i, \varphi_i$ sur B_j se prolongent en des applications sur B . Pour $b \in B$, on définit $\tilde{e}_i b$ comme étant égal à $\psi_j(\tilde{e}_i(b_j))$ s'il existe $b_j \in B_j$ tel que $\psi_j(b_j) = b$ et $\tilde{e}_i(b_j) \neq 0$. En fait cette définition ne dépend pas du choix de b_j . S'il n'existe pas de tel b_j , on pose $\tilde{e}_i b = 0$. On définit $\tilde{f}_i: B \rightarrow B \sqcup \{0\}$ de façon similaire. Alors B est un cristal et chaque ψ_j un morphisme de cristaux. En plus B est la limite inductive de $\{B_j\}_{j \in J}$ dans la catégorie des cristaux.

Le plongement du lemme 7.1.2, tensorisé à droite par $T_{-(\lambda+\mu)}$, nous fournit un plongement e -strict

$$(7.1.1) \quad I_{\lambda+\mu, \lambda}: B(\lambda) \otimes T_{-\lambda} \hookrightarrow B(\lambda + \mu) \otimes T_{-\lambda-\mu}$$

qui à $u_\lambda \otimes t_{-\mu}$ associe $u_{\lambda+\mu} \otimes t_{-(\lambda+\mu)}$. Pour $\lambda, \mu, \zeta \in P_+$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B(\lambda) \otimes T_{-\lambda} & \xrightarrow{I_{\lambda+\mu, \lambda}} & B(\lambda + \mu) \otimes T_{-(\lambda+\mu)} \\ & \searrow I_{\lambda+\mu+\zeta, \lambda} & \downarrow I_{\lambda+\mu+\zeta, \lambda+\mu} \\ & & B(\lambda + \mu + \zeta) \otimes T_{-(\lambda+\mu+\zeta)} \end{array}$$

L'ensemble P_+ des poids dominants est ordonné par $\lambda \leq \mu \iff \mu - \lambda \in P_+$. Cet ordre est filtré. Par l'observation ci-dessus $\{B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}\}_{\lambda \in P_+}$ est un système inductif pour les plongements (7.1.1).

Définition 7.1.3. — Soit $B(\infty) = \varinjlim_{\lambda \in P_+} B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}$.

Notons u_∞ l'image de $u_\lambda \otimes t_{-\lambda}$ dans cette limite inductive.

Proposition 7.1.4. — (1) L'application $B(\lambda) \otimes T_{-\lambda} \hookrightarrow B(\infty)$ est un plongement de cristaux e -strict.

(2) Les morphismes \tilde{f}_i vérifient $\tilde{f}_i(B(\infty)) \subset B(\infty)$ (c'est-à-dire $\tilde{f}_i b \neq 0$ pour tout $b \in B(\infty)$).

(3) Soit ξ un poids ; alors l'application $(B(\lambda) \otimes T_{-\lambda})_\xi \longrightarrow B(\infty)_\xi$ est un isomorphisme lorsque $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$ pour tout i .

(4) $B(\infty)$ est égal à $\{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} u_\infty ; \ell \geq 0 \text{ et } i_1, \dots, i_\ell \in I\}$.

(5) Pour tout $b \in B(\infty)$, nous avons $\varepsilon_i(b) = \max\{n \in \mathbb{N} ; \tilde{e}_i^n b \neq 0\}$.

(6) Il n'existe qu'un seul élément de $B(\infty)$ annulé par tous les \tilde{e}_i , à savoir u_∞ .

Démonstration. — Pour tout poids dominant λ , l'image par la composition du morphisme (7.1.1) et du plongement $B(\lambda + \mu) \otimes T_{-\lambda-\mu} \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\mu) \otimes T_{-\lambda-\mu}$ d'un vecteur $b = b' \otimes t_{-\lambda} \in B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}$ est $b' \otimes u_\mu \otimes t_{-(\lambda+\mu)}$. L'action de \tilde{f}_i s'écrit

$$\tilde{f}_i(b' \otimes u_\mu \otimes t_{-(\lambda+\mu)}) = \tilde{f}_i(b' \otimes u_\mu) \otimes t_{-\lambda-\mu}.$$

En outre, l'élément $\tilde{f}_i(b' \otimes u_\mu)$ vérifie

$$\tilde{f}_i(b' \otimes u_\mu) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b') \otimes u_\mu & \text{si } \varphi_i(b') > 0, \\ b' \otimes (\tilde{f}_i u_\mu) & \text{si } \varphi_i(b') = 0. \end{cases}$$

Puisque $\tilde{f}_i b' \neq 0$ lorsque $\varphi_i(b') > 0$, le vecteur $\tilde{f}_i(b' \otimes u_\mu)$ est non nul si $\tilde{f}_i(u_\mu) \neq 0$, c'est-à-dire si $\langle h_i, \mu \rangle > 0$.

On en conclut que pour tout $b \in B(\infty)$ il existe $\lambda \in P_+$ tel que $b \in B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}$ et $\tilde{f}_i b \neq 0$. Ainsi, nous avons $\tilde{f}_i b \in B(\lambda) \otimes T_{-\lambda} \hookrightarrow B(\infty)$. Donc l'assertion (2) est établie. Les autres assertions sont évidentes. \square

Exemple 7.1.5. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Alors $B(\infty)$ est égal à $\{\tilde{f}^n u_\infty; n \in \mathbb{N}\}$, en bijection avec \mathbb{N} . La figure 7.1 représente le plongement des $B(n\rho) \otimes T_{-n\rho}$ dans $B(\infty)$ et de $B(\infty)$ dans B_i .

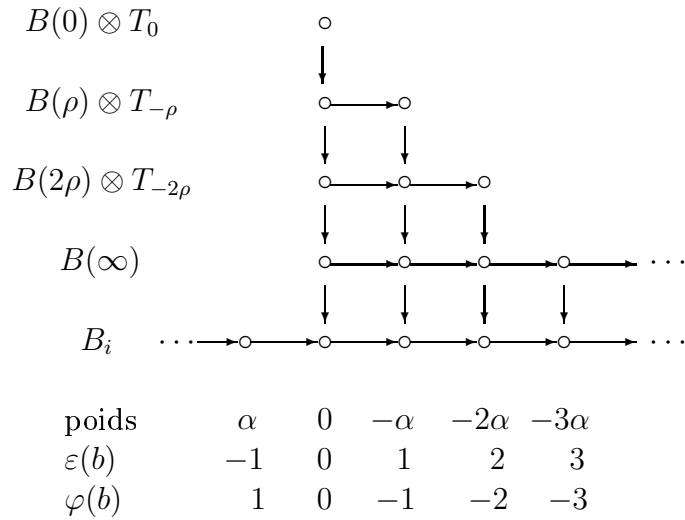


FIGURE 7.1. Plongement des $B(n\rho) \otimes T_{-n\rho}$ dans $B(\infty)$

Notons

$$(7.1.2) \quad \Psi_\lambda: U_q^-(\mathfrak{g}) \longrightarrow V(\lambda)$$

l'application qui à $P \in U_q^-(\mathfrak{g})$ associe le vecteur Pu_λ .

Théorème 7.1.6. — Il existe une unique base locale $(L(\infty), B(\infty))$ en $q = 0$ de $U_q^-(\mathfrak{g})$ telle que :

- (1) L'ensemble $B(\infty)$ est le cristal défini dans la proposition 7.1.4.
- (2) L'application (7.1.2) envoie $L(\infty)$ sur $L(\lambda)$ et induit

$$\overline{\Psi}_\lambda: L(\infty)/qL(\infty) \longrightarrow L(\lambda)/qL(\lambda).$$

(3) L'ensemble des $b \in B(\infty)$ tels que $\overline{\Psi}_\lambda(b) \neq 0$ est en bijection avec la base cristalline $B(\lambda)$. De plus, la composée

$$B(\lambda) \simeq \{b \in B(\infty); \overline{\Psi}_\lambda(b) \neq 0\} \hookrightarrow B(\infty)$$

coïncide avec l'application construite dans la proposition 7.1.4.

Démonstration. — Etudions la relation entre Ψ_λ et $\Psi_{\lambda+\mu}$ avec $\mu \in P_+$. Notons $S_{\lambda,\mu}: V(\lambda + \mu) \rightarrow V(\lambda) \otimes V(\mu)$ l'unique application $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaire telle que $S_{\lambda,\mu}(u_{\lambda+\mu}) = u_\lambda \otimes u_\mu$. Soit $p_\mu: V(\mu) \rightarrow K$ l'unique application K -linéaire qui envoie u_μ sur 1 et $V(\mu)_\nu$ sur $\{0\}$ lorsque $\nu \neq \mu$. Notons que p_μ est $U_q^-(\mathfrak{g})$ -linéaire. On définit $p_{\lambda,\lambda+\mu}: V(\lambda + \mu) \rightarrow V(\lambda)$ comme étant le morphisme composé de $S_{\lambda,\mu}$ et de $\text{id}_{V(\lambda)} \otimes p_\mu$.

Puisque les flèches du diagramme suivant sont $U_q^-(\mathfrak{g})$ -linéaires, celui-ci est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} U_q^-(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Psi_{\lambda+\mu}} & V(\lambda + \mu) \xrightarrow{S_{\lambda,\mu}} & V(\lambda) \otimes V(\mu) \\ \Psi_\lambda \downarrow & \swarrow p_{\lambda,\lambda+\mu} & & \downarrow \text{id}_{V(\lambda)} \otimes p_\mu \\ V(\lambda) & \xrightarrow{\sim} & & V(\lambda) \otimes K \end{array}$$

L'application $S_{\lambda,\mu}$ envoie $L(\lambda + \mu)$ dans $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ et $\text{id}_{V(\lambda)} \otimes p_\mu$ envoie $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ sur $L(\lambda)$. Donc le morphisme $p_{\lambda,\lambda+\mu}$ envoie $L(\lambda + \mu)$ dans $L(\lambda)$.

Lemme 7.1.7. — *Le morphisme $\phi = p_{\lambda,\lambda+\mu}: V(\lambda + \mu) \rightarrow V(\lambda)$ est surjectif. Il induit un morphisme surjectif*

$$\overline{\phi}: L(\lambda + \mu)/qL(\lambda + \mu) \rightarrow L(\lambda)/qL(\lambda).$$

Enfin, la restriction de $\overline{\phi}$ à $B(\lambda) \otimes \{u_\mu\} \subset B(\lambda + \mu)$ est donnée par $b \otimes u_\mu \mapsto b$ et vérifie $\overline{\phi}(B(\lambda + \mu) \setminus B(\lambda) \otimes \{u_\mu\}) = \{0\}$.

Démonstration. — Le morphisme $\overline{\phi}$ est égal à la composition

$$L(\lambda + \mu)/qL(\lambda + \mu) \rightarrow (L(\lambda)/qL(\lambda)) \otimes (L(\mu)/qL(\mu)) \rightarrow L(\lambda)/qL(\lambda).$$

L'assertion en découle aisément. \square

Pour $\xi \in Q_-$, prenons un poids dominant λ assez grand. Alors l'isomorphisme $U_q^-(\mathfrak{g})_\xi \xrightarrow{\sim} V(\lambda)_{\lambda+\xi}$ fournit une base locale $(L(\infty)_\xi, B(\infty)_\xi)$ de $U_q^-(\mathfrak{g})_\xi$ qui correspond à la base locale $(L(\lambda)_{\lambda+\xi}, B(\lambda)_{\lambda+\xi})$ de $V(\lambda)_{\lambda+\xi}$.

Par le lemme ci-dessus, la base locale $(L(\infty)_\xi, B(\infty)_\xi)$ ne dépend pas du choix de λ . Il est alors facile de vérifier que la base locale

$$(L(\infty), B(\infty)) := \bigoplus_{\xi \in Q_-} (L(\infty)_\xi, B(\infty)_\xi)$$

de $U_q^-(\mathfrak{g})$ satisfait aux propriétés du théorème 7.1.6. \square

Puisque les $V(\lambda)$ ont des bases globales, $U_q^-(\mathfrak{g})$ admet par passage à la limite une base globale.

Théorème 7.1.8 ([13]). — (1) *Le triplet $(L(\infty), L(\infty)^-, U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}})$ est équilibré.*

(2) *Notons G_∞ l'isomorphisme réciproque de*

$$L(\infty) \cap L(\infty)^- \cap U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} L(\infty)/qL(\infty).$$

Alors on a $U_q^-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{b \in B(\infty)} KG_\infty(b)$.

(3) *On a $\Psi_\lambda(G_\infty(b \otimes t_{-\lambda})) = G_\lambda(b)$ pour $b \in B(\lambda)$, et $\Psi_\lambda(G_\infty(b)) = 0$ pour $b \in B(\infty) \setminus (B(\lambda) \otimes T_{-\lambda})$. Ici on identifie $B(\lambda) \otimes T_{-\lambda}$ à un sous-cristal de $B(\infty)$.*

7.2. Description de $B(\infty)$

Pour tous poids dominants λ et μ , le cristal $B(\lambda + \mu)$ se plonge dans $B(\lambda) \otimes B(\mu)$. En tensorisant à droite par le cristal $T_{-\lambda-\mu}$, nous obtenons un plongement plein $B(\lambda + \mu) \otimes T_{-\lambda-\mu} \hookrightarrow B(\lambda) \otimes (B(\mu) \otimes T_{-\mu}) \otimes T_{-\lambda}$. Celui-ci nous fournit lorsque λ est fixé et μ tend vers l'infini un plongement plein $B(\infty) \hookrightarrow B(\lambda) \otimes B(\infty) \otimes T_{-\lambda}$. Par ailleurs $B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda$. D'où finalement la

Proposition 7.2.1. — *Pour tout poids dominant λ , l'application*

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \Theta_\lambda: B(\infty) &\hookrightarrow B(\infty) \otimes T_\lambda \otimes B(\infty) \otimes T_{-\lambda} \\ u_\infty &\mapsto u_\infty \otimes t_\lambda \otimes u_\infty \otimes t_{-\lambda} \end{aligned}$$

est un plongement plein.

Fixons un $i_0 \in I$. Soit $\lambda \in P_+$ tel que $\langle h_{i_0}, \lambda \rangle = 0$ et $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$ pour tout $i \neq i_0$. Démontrons par récurrence que $\Theta_\lambda(b)$ s'écrit sous la forme $\Theta_\lambda(b) = b_1 \otimes t_\lambda \otimes \check{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}$, avec $b_1 \in B(\infty)$ et $a \in \mathbb{N}$ ne dépendant

pas de λ . Ensuite, nous pourrions définir $\Psi_{i_0} : B(\infty) \longrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_0}$ par $\Psi_{i_0}(b) = b_1 \otimes \tilde{f}_{i_0}^a b_{i_0} = b_1 \otimes b_{i_0}(-a)$.

Démontrons que si $\Theta_\lambda(b)$ s'écrit sous la forme $\Theta_\lambda(b) = b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}$, alors $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b)$ s'écrit également sous une forme similaire $b'_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^{a'} u_\infty \otimes t_{-\lambda}$ et que b'_1 et a' sont indépendants du choix de λ . Le morphisme Θ_λ étant strict, nous avons $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i(b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda})$. Or $\varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda})$ est égal à $\varepsilon_i(\tilde{f}_{i_0}^a u_\infty) - \langle h_i, \lambda \rangle$. Donc :

(1) Si $i \neq i_0$ et $\langle h_i, \lambda \rangle \gg 0$, de sorte à avoir $\varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}) = \varepsilon_i(\tilde{f}_{i_0}^a u_\infty) - \langle h_i, \lambda \rangle$, alors

$$(7.2.2) \quad \Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = (\tilde{f}_i b_1) \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}.$$

(2) Si par contre $i = i_0$, alors $\varepsilon_i(t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda}) = a$. Ainsi, nous avons

$$(7.2.3) \quad \Theta_\lambda(\tilde{f}_i b) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^a u_\infty \otimes t_{-\lambda} & \text{si } \varphi_i(b_1) > a, \\ b_1 \otimes t_\lambda \otimes \tilde{f}_{i_0}^{a+1} u_\infty \otimes t_{-\lambda} & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq a. \end{cases}$$

Dans les deux cas, l'élément $\Theta_\lambda(\tilde{f}_i b)$ a bien la forme souhaitée. De plus, les formules (7.2.2) et (7.2.3) démontrent que b'_1 et a' ne dépendent pas du choix de λ .

D'autre part, on a

$$(7.2.4) \quad \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_{i_0}(-a)) = \begin{cases} \tilde{f}_i(b_1) \otimes b_{i_0}(-a) & \text{si } i \neq i_0, \\ \tilde{f}_i(b_1) \otimes b_{i_0}(-a) & \text{si } i = i_0 \text{ et } \varphi_i(b_1) > a, \\ b_1 \otimes b_{i_0}(-a-1) & \text{si } i = i_0 \text{ et } \varphi_i(b_1) \leq a, \end{cases}$$

puisque $\varepsilon_i(b_{i_0}(-a))$ est égal à $-\infty$ pour $i \neq i_0$ et à a pour $i = i_0$.

Théorème 7.2.2. — *Il existe un unique plongement plein de cristaux*

$$\Psi_{i_0} : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_0}$$

vérifiant $\Psi_{i_0}(u_\infty) = u_\infty \otimes b_{i_0}$, à savoir le morphisme que nous venons de décrire.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que notre application, qui existe et commute avec \tilde{f}_i d'après (7.2.2), (7.2.3) et (7.2.4), conserve également wt, ε_i , φ_i et \tilde{e}_i , ce qui se fait sans difficulté. \square

Prenons maintenant une suite i_1, i_2, \dots dans I telle que pour tout i , l'ensemble $\{n > 0; i_n = i\}$ soit infini. Nous avons alors des morphismes de cristaux

$$\begin{aligned} \Psi^n: B(\infty) \xrightarrow{\Psi_{i_1}} B(\infty) \otimes B_{i_1} \xrightarrow{\Psi_{i_2} \otimes B_{i_1}} B(\infty) \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_n} \otimes \dots \otimes B_{i_1}. \end{aligned}$$

Lemme 7.2.3. — (1) *Pour tout $b \in B(\infty)$, il existe m assez grand tel que $\Psi^m(b)$ soit de la forme*

$$(7.2.5) \quad \Psi^m(b) = u_\infty \otimes c_m \otimes \dots \otimes c_1$$

avec $c_\nu \in B_{i_\nu}$.

(2) *Dans ce cas, pour tout $m' \geq m$ nous avons*

$$\Psi^{m'}(b) = u_\infty \otimes b_{i_{m'}}(0) \otimes \dots \otimes b_{i_{m+1}}(0) \otimes c_m \otimes \dots \otimes c_1.$$

Démonstration. — (2) est évident puisque $\Psi_i(u_\infty) = u_\infty \otimes b_i(0)$. Démontrons (1) par récurrence, en prouvant que si $\Psi^m(b)$ est de la forme (7.2.5) alors $\Psi^{m'}(\tilde{f}_i b)$ est également de la forme (7.2.5) pour $m' \gg m$. Grâce à (2), nous pouvons supposer $i = i_m$ et $c_m = b_{i_m}(0)$. Alors $\Psi^m(\tilde{f}_i b)$ s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(u_\infty \otimes c_m) \otimes c_{m-1} \otimes \dots \otimes c_1 \\ \text{ou } u_\infty \otimes c_m \otimes \tilde{f}_i(c_{m-1} \otimes \dots \otimes c_1). \end{aligned}$$

Or $\varphi_i(u_\infty) = 0$ et $\varepsilon_i(c_m) = 0$, donc $\tilde{f}_i(u_\infty \otimes c_m) = u_\infty \otimes (\tilde{f}_i c_m)$. Dans les deux cas, le vecteur $\Psi^m(\tilde{f}_i b)$ a la forme souhaitée. \square

Ainsi, l'application $b \mapsto (c_1, \dots, c_m, b_{i_{m+1}}(0), \dots)$ est indépendante du choix de m . D'où un plongement plein de cristaux

$$(7.2.6) \quad \Psi: B(\infty) \hookrightarrow \mathcal{P} := \left\{ (c_n)_{n \geq 1}; \begin{array}{l} c_n \in B_{i_n} \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et} \\ c_n = b_{i_n}(0) \text{ pour } n \gg 0 \end{array} \right\}.$$

Le cristal \mathcal{P} est la limite inductive des $C \otimes B_{i_m} \otimes \cdots \otimes B_{i_1}$. Voyons sa structure cristalline de façon explicite. Pour $b = (b_{i_n}(a_n))_{n \geq 1} \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} \text{wt}(b) &= \sum_{n \geq 1} a_n \alpha_{i_n}, \\ \varepsilon_i(b) &= \max\{-a_n - \sum_{k > n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k; n \geq 1, i = i_n\} \geq 0, \\ \varphi_i(b) &= \max\{a_n + \sum_{k < n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k; n \geq 1, i = i_n\}. \end{aligned}$$

L'entier a_n est nul pour n assez grand, donc la somme infinie dans la définition de $\varepsilon_i(b)$ a un sens. Remarquons également que les *maxima* existent et sont entiers. Les actions de \tilde{e}_i et \tilde{f}_i sont données par

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i b &= \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_i(b) = 0, \\ \text{la suite obtenue en changeant } a_{n_e} \text{ à la } n_e\text{-ième} \\ \text{place en } a_{n_e} + 1 & \text{si } \varepsilon_i(b) > 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_i b &= \begin{cases} \text{la suite obtenue en changeant } a_{n_f} \text{ à la } n_f\text{-ième place en} \\ a_{n_f} - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} n_e &= \max\{n \geq 1; i_n = i \text{ et } \varepsilon_i(b) = -a_n - \sum_{k > n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k\} \\ &= \max\{n \geq 1; i_n = i \text{ et } \varphi_i(b) = a_n + \sum_{k < n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k\}, \\ n_f &= \min\{n \geq 1; i_n = i \text{ et } \varepsilon_i(b) = -a_n - \sum_{k > n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k\} \\ &= \min\{n \geq 1; i_n = i \text{ et } \varphi_i(b) = a_n + \sum_{k < n} \langle h_i, \alpha_{i_k} \rangle a_k\}. \end{aligned}$$

Remarquons que n_e existe en tant qu'entier dès que $\varepsilon_i(b) > 0$.

Notons que $B(\lambda)$ est isomorphe à un sous-cristal de $\mathcal{P} \otimes T_\lambda$ pour tout poids dominant λ .

La description de $B(\infty)$ que nous venons d'obtenir dépend du choix de la suite $\{i_1, i_2, \dots\}$.

A l'heure actuelle, l'image de l'application (7.2.6) est encore inconnue dans le cas général (voir [29] pour une réponse conjecturale).

Remarque 7.2.4. — On a en fait ([15]) un isomorphisme

$$B(\infty) \otimes B_i \simeq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B(\infty) \otimes T_{n\alpha_i},$$

où $u_\infty \otimes b_i(n) \longleftrightarrow u_\infty \otimes t_{n\alpha_i}$. D'autre part $T_\lambda \otimes B_i \simeq B_i \otimes T_{s_i\lambda}$. Ainsi \mathcal{P} est la réunion disjointe de certains $B(\infty) \otimes T_\xi$ ($\xi \in Q$). Plus précisément, en posant $\mathcal{P}^h = \{b \in \mathcal{P}; \varepsilon_i(b) = 0 \text{ pour tout } i\}$ on a

$$\mathcal{P} = \bigsqcup_{b \in \mathcal{P}^h} B(\infty) \otimes T_{\text{wt}(b)}.$$

7.3. Exemple dans le cas de \mathfrak{sl}_3

Déterminons l'image de Ψ dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$.

Considérons le morphisme

$$(7.3.1) \quad \Psi^3 : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_1.$$

Proposition 7.3.1. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Alors l'image de Ψ^3 est

$$\{u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1} b_1; a_2 \geq a_3 \geq 0, a_1 \geq 0\}.$$

Démonstration. — Soit B' l'ensemble ci-dessus. Il suffit de prouver que $\tilde{e}_i B' \subset B' \sqcup \{0\}$, $\tilde{f}_i B' \subset B'$ et $\{b \in B'; \tilde{e}_i b = 0 \text{ pour tout } i\} = \{u_\infty \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes b_1\}$.

Pour $b = u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1} b_1$, nous avons d'une part

$$\tilde{e}_1 b = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \geq a_3, a_1 + 2a_3 - a_2, \\ u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3-1} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1} b_1 & \text{si } a_3 > 0 \text{ et } a_3 \geq a_1 + 2a_3 - a_2, \\ u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1-1} b_1 & \text{si } a_1 + 2a_3 - a_2 > 0, a_3. \end{cases}$$

Donc $\tilde{e}_1 B' \subset B' \sqcup \{0\}$. D'autre part

$$\tilde{e}_2 b = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \geq a_2 - a_3, \\ u_\infty \otimes \tilde{f}_1^{a_3} b_1 \otimes \tilde{f}_2^{a_2-1} b_2 \otimes \tilde{f}_1^{a_1} b_1 & \text{si } 0 < a_2 - a_3. \end{cases}$$

Il est ainsi évident que $\tilde{e}_2 b \subset B' \sqcup \{0\}$. La démonstration pour \tilde{f}_i est analogue.

Vérifions la dernière assertion. Supposons $\tilde{e}_i b = 0$ pour $i = 1, 2$. Pour $i = 1$ nous obtenons $a_3 = 0$ et $a_1 \leq a_2$, et pour $i = 2$ nous obtenons $a_2 \leq a_3$. D'où $a_3 = a_2 = a_1 = 0$. \square

Exercice 7.1. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Démontrez que le plongement (7.3.1) induit un plongement de cristaux $B(\infty) \longrightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_1$.

Exercice 7.2. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Démontrez qu'il existe un et un seul isomorphisme de cristaux $B_1 \otimes B_2 \otimes B_1 \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes B_1 \otimes B_2$.

Exercice 7.3. — Dans le cas $\mathfrak{g} = C_2$ (c'est-à-dire $I = \{1, 2\}$ avec $(\alpha_1, \alpha_1) = 2$, $(\alpha_2, \alpha_2) = 4$, $(\alpha_1, \alpha_2) = -2$), démontrez qu'il existe deux plongements de cristaux

$$\begin{aligned} B(\infty) &\longrightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_2, \\ B(\infty) &\longrightarrow B_2 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_1, \end{aligned}$$

et que leurs images sont $\{\tilde{f}_1^a b_1 \otimes \tilde{f}_2^b b_2 \otimes \tilde{f}_1^c b_1 \otimes \tilde{f}_2^d b_2; d \geq 0, c \geq b \geq a \geq 0\}$ et $\{\tilde{f}_2^a b_2 \otimes \tilde{f}_1^b b_1 \otimes \tilde{f}_2^c b_2 \otimes \tilde{f}_1^d b_1; d \geq 0, 2c \geq b \geq 2a \geq 0\}$ respectivement.

Exercice 7.4. — Soient $\lambda \in P_+$, $b \in B(\lambda)$ et $i \neq j \in I$. Supposons $\tilde{f}_j b \in B(\lambda)$. Démontrez que

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \alpha_j \rangle &\leq \varepsilon_i(\tilde{f}_j b) \leq \varepsilon_i(b), \\ \varphi_i(b) &\leq \varphi_i(\tilde{f}_j b) \leq \varphi_i(b) - \langle h_i, \alpha_j \rangle. \end{aligned}$$

(Indication : utilisez le théorème 6.1.4 et les propositions 6.2.1, 6.2.3, ou bien le plongement plein $B(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{P} \otimes T_\lambda$ construit dans la section 7.2.)

CHAPITRE 8

RÉALISATION DES BASES CRISTALLINES PAR DES CHEMINS

Les cristaux $B(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) peuvent se décrire de façon géométrique grâce à la réalisation de P. Littelmann. Nous avons besoin pour ce faire de préliminaires sur les gonflages de cristaux.

8.1. Gonflage de cristaux

Définition 8.1.1. — Soient deux cristaux B et B' , une application $\psi: B \rightarrow B'$ et un entier m . On dit que ψ est un *morphisme d'amplitude m* s'il satisfait à

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} \text{wt}(\psi(b)) &= m \text{wt}(b), \\ \varepsilon_i(\psi(b)) &= m \varepsilon_i(b), \\ \varphi_i(\psi(b)) &= m \varphi_i(b), \\ \psi(\tilde{f}_i b) &= \tilde{f}_i^m \psi(b), \\ \psi(\tilde{e}_i b) &= \tilde{e}_i^m \psi(b), \end{aligned}$$

pour tout $b \in B$. Ici on suppose $\psi(0) = 0$.

Le lemme suivant se démontre facilement.

Lemme 8.1.2. — (1) Si $\psi: B \rightarrow B'$ est un morphisme d'amplitude m et $\psi': B' \rightarrow B''$ est un morphisme d'amplitude m' , alors $\psi' \circ \psi: B \rightarrow B''$ est un morphisme d'amplitude mm' .

(2) Soient $\psi_\nu: B_\nu \rightarrow B'_\nu$ ($\nu = 1, 2$) deux morphismes d'amplitude m . Alors $\psi_1 \otimes \psi_2: B_1 \otimes B_2 \rightarrow B'_1 \otimes B'_2$ est un morphisme d'amplitude m .

Rappelons que pour toute suite $(i_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout i l'ensemble $\{n > 0; i_n = i\}$ soit infini, nous avons un plongement de $B(\infty)$ dans $\mathcal{P} = \{(c_n)_{n \geq 1}; c_n \in B_{i_n} \text{ pour tout } n \text{ et } c_n = b_{i_n}(0) \in B_{i_n} \text{ pour } n \gg 0\}$.

Proposition 8.1.3. — *Pour tout entier $m > 0$, il existe un et un seul morphisme $S_m : B(\infty) \longrightarrow B(\infty)$ d'amplitude m . De plus S_m est injectif.*

Démonstration. — On a $\text{wt}(S_m(u_\infty)) = 0$, donc l'élément $S_m(u_\infty)$ doit être u_∞ ; d'où l'unicité.

Définissons une application $S_m : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par $(c_n)_n \mapsto (S_m(c_n))_n$ avec $S_m(b_{i_n}(k)) = b_{i_n}(mk)$. Grâce au lemme précédent, on vérifie facilement que S_m est un morphisme d'amplitude m et que $S_m(B(\infty)) \subset B(\infty)$. \square

Définition 8.1.4. — Le morphisme $S_m : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty)$ d'amplitude m est appelé *gonflage d'ordre m de $B(\infty)$* .

Corollaire 8.1.5. — *Pour tout poids dominant λ , il existe un unique morphisme $S_m : B(\lambda) \hookrightarrow B(m\lambda)$ d'amplitude m . Nous l'appellerons également gonflage d'ordre m de $B(\lambda)$.*

Démonstration. — Le morphisme $S_m : B(\infty) \otimes T_\lambda \longrightarrow B(\infty) \otimes T_{m\lambda}$ induit $S_m : B(\lambda) \hookrightarrow B(m\lambda)$. \square

On a

$$S_m(u_\lambda) = u_{m\lambda}.$$

Le corollaire ci-dessus implique le

Corollaire 8.1.6. — *Soient deux poids dominants λ et μ . Si $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ contient $V(\nu)$, alors $V(m\lambda) \otimes V(m\mu)$ contient $V(m\nu)$ pour tout entier positif m .*

Démonstration. — D'après le corollaire 4.1.7, le module $V(\nu)$ est contenu dans $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ si et seulement s'il existe un vecteur $b \in B(\mu)$ de poids $\nu - \lambda$ tel que $\varepsilon_i(b) \leq \langle h_i, \lambda \rangle$. Or $S_m(b) \in B(m\mu)$ est de poids $m\nu - m\lambda$ et satisfait à $\varepsilon_i(S_m b) \leq \langle h_i, m\lambda \rangle$. \square

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(\lambda) & \xrightarrow{S_m} & B(m\lambda) \\ & \searrow S_{nm} & \downarrow S_n \\ & & B(nm) \end{array}$$

Définition 8.1.7. — Pour tout poids dominant λ , on définit un ensemble $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ par

$$(8.1.2) \quad B(\lambda)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim_m B(m\lambda).$$

Il est clair que $B(\lambda) \hookrightarrow B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$.

Pour tout $a \in \mathbb{Q}_+$ non nul, définissons sur $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ des applications

$$\tilde{e}_i^a, \tilde{f}_i^a : B(\lambda)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow B(\lambda)_{\mathbb{Q}} \sqcup \{0\}$$

telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B(m\lambda) & \xrightarrow{\tilde{e}_i^{ma}, \tilde{f}_i^{ma}} & B(m\lambda) \sqcup \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\lambda)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tilde{e}_i^a, \tilde{f}_i^a} & B(\lambda)_{\mathbb{Q}} \sqcup \{0\} \end{array}$$

commute pour m contenant assez de facteurs. De même, définissons $\varepsilon_i, \varphi_i : B(\lambda)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ comme étant les limites inductives des applications $B(m\lambda) \xrightarrow{\varepsilon_i, \varphi_i} \mathbb{Z} \xrightarrow{1/m} \frac{1}{m}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple 8.1.8. — Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ nous avons $B(\rho)_{\mathbb{Q}} = [0, 1]$, comme l'illustre la figure 8.1 (où les chiffres sont des valeurs de ε).

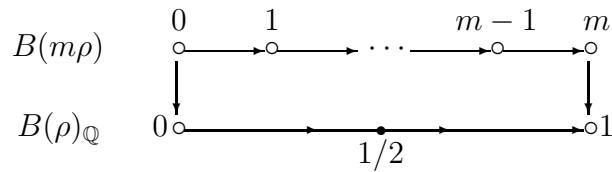


FIGURE 8.1. Gonflage de cristaux sur \mathfrak{sl}_2

Exemple 8.1.9. — Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ et $\lambda = \Lambda_1$. Dans la réalisation de $B(m\lambda)$ par les tableaux de Young, tout vecteur de $B(m\lambda)$ est représenté par un tableau semi-standard de forme $m\lambda$ (une ligne de longueur m). Soit a_ν le nombre de fois que ν apparaît dans ce tableau. Alors

$$B(m\lambda) \simeq \left\{ v_m(a) ; a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ tel que } a_\nu \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{\nu=1}^n a_\nu = m \right\},$$

donc la structure de cristal est donnée par

$$\begin{aligned} \text{wt}(v_m(a)) &= \sum_{\nu=1}^n a_\nu \epsilon_\nu, \\ \varepsilon_i(v_m(a)) &= a_{i+1}, \\ \varphi_i(v_m(a)) &= a_i, \\ \tilde{e}_i(v_m(a)) &= \begin{cases} v_m(a + \delta_i - \delta_{i+1}) & \text{si } a_{i+1} > 0, \\ 0 & \text{si } a_{i+1} = 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_i(v_m(a)) &= \begin{cases} v_m(a - \delta_i + \delta_{i+1}) & \text{si } a_i > 0, \\ 0 & \text{si } a_i = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où $i = 1, \dots, n-1$ et $\delta_\nu = (\overbrace{0, \dots, 1}^\nu, \dots, 0)$. Donc $v_m(m\delta_1)$ est un vecteur de plus haut poids. Le gonflage $S_r : B(m\lambda) \rightarrow B(rm\lambda)$ d'ordre r a pour expression $v_m(a) \mapsto v_{rm}(ra)$. Il s'ensuit que

$$B(\lambda)_{\mathbb{Q}} = \left\{ v(a) ; a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ tel que } a_\nu \in \mathbb{Q}_+ \text{ et } \sum_{\nu=1}^n a_\nu = 1 \right\}.$$

L'injection $B(m\lambda) \hookrightarrow B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ associe alors $v(m^{-1}a)$ à $v_m(a)$.

Exemple 8.1.10. — Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ et $\lambda = m_1\Lambda_1 + m_2\Lambda_2$. Alors $B(\lambda)$ est paramétré par l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme λ (c'est-à-dire à deux rangées, la première de longueur $m_1 + m_2$ et la seconde de longueur m_2). Soit a_k^ν le nombre de k dans la ν -ième rangée ($1 \leq \nu \leq 2, 1 \leq k \leq 3$). Alors on a $\sum_k a_k^1 = m_1 + m_2$ et $\sum_k a_k^2 = m_2$. Ainsi $a_1^1 = m_1 + m_2 - a_2^1 - a_3^1, a_1^2 = 0, a_2^2 = m_2 - a_3^2$. D'où

$$(8.1.3) \quad B(\lambda) \simeq \left\{ v(a) ; a = (a_2^1, a_3^1, a_3^2) \in \mathbb{N}^3, \right. \\ \left. a_2^1 + a_3^1 \leq m_1 + a_3^2, a_3^2 \leq m_2, a_3^1 \leq m_1 \right\}.$$

On vérifie facilement à l'aide de l'écriture arabe que la structure cristalline est donnée par

$$(8.1.4) \quad \begin{aligned} \text{wt}(v(a)) &= (m_1 + m_2 - a_2^1 - a_3^1)\epsilon_1 \\ &\quad + (a_2^1 + m_2 - a_3^2)\epsilon_2 + (a_3^1 + a_3^2)\epsilon_3, \\ \varepsilon_1(v(m)) &= a_2^1, \\ \varepsilon_2(v(a)) &= a_3^1 + (a_3^2 - a_2^1)_+, \\ \varphi_1(v(a)) &= m_1 + a_3^2 - a_2^1 - a_3^1, \\ \varphi_2(v(a)) &= m_2 - a_3^2 + (a_2^1 - a_3^2)_+. \end{aligned}$$

Ici $x_+ = \max(x, 0)$. Les actions des opérateurs \tilde{e}_i et \tilde{f}_i ($i = 1, 2$) sont alors

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 v(a) &= \begin{cases} v(a - \delta_2^1) & \text{si } a_2^1 > 0, \\ 0 & \text{si } a_2^1 = 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_1 v(a) &= \begin{cases} v(a + \delta_2^1) & \text{si } a_2^1 + a_3^1 < m_1 + a_3^2, \\ 0 & \text{si } a_2^1 + a_3^1 = m_1 + a_3^2, \end{cases} \\ \tilde{e}_2 v(a) &= \begin{cases} v(a - \delta_3^2) & \text{si } a_3^2 > a_2^1, \\ v(a + \delta_2^1 - \delta_3^1) & \text{si } a_3^2 \leq a_2^1 \text{ et } a_3^1 > 0, \\ 0 & \text{si } a_3^2 \leq a_2^1 \text{ et } a_3^1 = 0, \end{cases} \\ \tilde{f}_2 v(a) &= \begin{cases} 0 & \text{si } a_3^2 \geq a_2^1 \text{ et } a_3^2 = m_2, \\ v(a + \delta_3^2) & \text{si } a_3^2 \geq a_2^1 \text{ et } a_3^2 < m_2, \\ v(a - \delta_2^1 + \delta_3^1) & \text{si } a_3^2 < a_2^1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ici $\delta_{k_0}^{\nu_0}$ est le vecteur défini par $(\delta_{k_0}^{\nu_0})_k^\nu = \delta_{(\nu, k) = (\nu_0, k_0)}$. L'application gonflage $S_m: B(\lambda) \rightarrow B(m\lambda)$ a pour expression $v(a) \mapsto v(ma)$. Ainsi, de façon similaire à l'exemple précédent, on a

$$\begin{aligned} B(\lambda)_{\mathbb{Q}} &\simeq \{v(a); a = (a_2^1, a_3^1, a_3^2) \in (\mathbb{Q}_+)^3, \\ &\quad a_2^1 + a_3^1 \leq m_1 + a_3^2, a_3^2 \leq m_2, a_3^1 \leq m_1\}. \end{aligned}$$

Les applications wt , ε_i et φ_i sur $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ s'expriment comme en (8.1.4). La limite inductive $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ est divisé en deux régions, à savoir $\{v(a) \in B(\lambda)_{\mathbb{Q}}; a_3^2 \leq a_2^1\}$ et $\{v(a) \in B(\lambda)_{\mathbb{Q}}; a_3^2 \geq a_2^1\}$. Sur chacune d'elles, les applications wt , ε_i , φ_i sont linéaires.

Remarque 8.1.11. — Pour tout i , nous pouvons voir $\{\tilde{f}_i^a\}_{a \in \mathbb{Q}}$ comme un flot dynamique sur $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$.

Par ailleurs $B(\lambda)_{\mathbb{Q}}$ est une sorte de variété linéaire par morceaux (divisée en régions qui sont des polytopes convexes). Dans l'exemple ci-dessus, ces régions sont au nombre de deux. Sur chaque région, ces flots dynamiques sont linéaires et donc commutent entre eux (sauf sur le bord des régions). Les applications wt , ε_i et φ_i sont également linéaires sur chaque région. Cette structure n'est pas encore bien comprise à l'heure actuelle.

8.2. Structure cristalline sur l'ensemble des chemins

Posons $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$. Un *chemin* est une application π rationnelle, continue et linéaire par morceaux de $[0, 1]$ dans $P_{\mathbb{R}}$ modulo les reparamétrisations. Plus précisément, un chemin est une application $[0, 1] \rightarrow P_{\mathbb{R}}$ telle qu'il existe une suite $0 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_s = 1$ de nombre rationnels et $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ ($0 \leq k < s$) tels que l'on ait $\pi(t) = t\lambda_k + \mu_k$ pour $t \in [c_k, c_{k+1}]$ ($0 \leq k < s$). Deux chemins π_1 et π_2 sont identifiés s'il existe des applications continues, surjectives, croissantes et linéaires par morceaux $\psi_1, \psi_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que $\pi_1 \circ \psi_1 = \pi_2 \circ \psi_2$.

La concaténation de deux chemins π_1 et π_2 , notée $\pi_1 * \pi_2$, est définie par

$$(\pi_1 * \pi_2)(t) = \begin{cases} \pi_1(2t) + \pi_2(0) & \text{si } t \leq 1/2, \\ \pi_2(2t - 1) + \pi_1(1) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

On a donc $(\pi_1 * \pi_2)(t) = \pi_1(t) + \pi_2(t)$ pour $t = 0, 1$. La concaténation est associative, c'est-à-dire $(\pi_1 * \pi_2) * \pi_3 = \pi_1 * (\pi_2 * \pi_3)$ pour tous chemins π_1, π_2, π_3 .

Pour tout chemin π , définissons un chemin $S_m(\pi)$ par $S_m(\pi)(t) = m\pi(t)$. Il est clair que S_m commute à la concaténation.

Notons \mathcal{P}_L l'ensemble des chemins π tels que $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) \in P$. Littelmann a donné dans [21] et [22] deux structures de cristal sur \mathcal{P}_L , l'une stable par concaténation, l'autre par similarité S_m . Nous présenterons ici la seconde.

Soit $\pi \in \mathcal{P}_L$. Le *chemin inverse* π^\vee de π est défini par $t \mapsto \pi(1 - t) - \pi(1)$. Le *poids* de π est défini par $\text{wt}(\pi) = \pi(1)$. Pour $i \in I$ et $\pi \in \mathcal{P}_L$, posons $H_i(\pi) = \inf\{\langle h_i, \pi(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1\} \leq 0$. Définissons $\varepsilon_i(\pi) = \lfloor -H_i(\pi) \rfloor$ et $\varphi_i(\pi) = \varepsilon_i(\pi^\vee) = \varepsilon_i(\pi) + \langle h_i, \text{wt}(\pi) \rangle$ (rappelons que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$).

Munissons \mathcal{P}_L d'une action \tilde{e}_i comme suit.

Soient $i \in I$ et $\pi \in \mathcal{P}_L$. Posons $\tilde{e}_i\pi = 0$ si $\varepsilon_i(\pi) = 0$. Sinon, c'est-à-dire lorsque $H_i(\pi) \leq -1$, construisons $s \geq 1$ et $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < a_s < c_s \leq 1$ de la façon suivante :

$$(8.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + 1 \text{ pour } 0 \leq t \leq a_1. \\ (2) \quad \langle h_i, \pi(a_1) \rangle = H_i(\pi) + 1. \\ (3) \quad \langle h_i, \pi(t) \rangle \text{ décroît strictement sur } [a_\nu, c_\nu] \text{ pour tout } \\ \quad 1 \leq \nu \leq s. \\ (4) \quad \langle h_i, \pi(c_\nu) \rangle = \langle h_i, \pi(a_{\nu+1}) \rangle \text{ et } \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq \langle h_i, \pi(c_\nu) \rangle \\ \text{sur } [c_\nu, a_{\nu+1}] \text{ pour tout } 1 \leq \nu \leq s-1. \\ (5) \quad \langle h_i, \pi(c_s) \rangle = H_i(\pi). \\ (6) \quad \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) \text{ pour } c_s \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

En d'autres termes, le nombre a_1 est le plus grand a tel que $\langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + 1$ sur $t \in [0, a]$, le nombre c_1 est le plus grand $c \geq a_1$ tel que $\langle h_i, \pi(t) \rangle$ décroît strictement sur $t \in [a_1, c]$, le nombre a_2 est le plus grand $a \geq c_1$ tel que $\langle h_i, \pi(t) \rangle \geq \langle h_i, \pi(c_1) \rangle$ sur $t \in [c_1, a]$, etc. Nous arrivons finalement au nombre c_s tel que $\langle h_i, \pi(c_s) \rangle = H_i(\pi)$. Par construction $(\langle h_i, \pi(a_1) \rangle, \dots, \langle h_i, \pi(a_s) \rangle, \langle h_i, \pi(c_s) \rangle)$ est une suite strictement décroissante de $H_i(\pi) + 1$ jusqu'à $H_i(\pi)$. Remarquons que c_s est le plus petit t tel que $\langle h_i, \pi(t) \rangle = H_i(\pi)$.

Alors $\tilde{e}_i\pi$ est le chemin obtenu en effectuant la symétrie de la partie $[a_\nu, c_\nu]$ ($1 \leq \nu \leq s$) par la réflexion simple s_i et en n'effectuant qu'une translation sur les autres parties afin de conserver un chemin continu. Concrètement, nous avons

$$(8.2.2) \quad (\tilde{e}_i\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq a_1, \\ \pi(t) - \langle h_i, \pi(t) - \pi(a_1) \rangle \alpha_i & \text{pour } a_\nu \leq t \leq c_\nu, \\ \pi(t) - \langle h_i, \pi(c_\nu) - \pi(a_1) \rangle \alpha_i & \text{pour } c_\nu \leq t \leq a_{\nu+1}, \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{pour } c_s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notons la similarité de cette construction avec celle de l'exercice 8.1.

Remarque 8.2.1. — Si une suite $0 \leq a_1 \leq c_1 \leq a_2 \leq c_2 \leq \dots \leq c_s \leq 1$ satisfait aux conditions (8.2.1), alors $\tilde{e}_i\pi$ est donné par la même formule (8.2.2). En fait si $a_k = c_k$ alors $0 \leq a_1 \leq c_1 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq c_{k-1} \leq a_{k+1} \dots \leq c_s \leq 1$ vérifie (8.2.1), et si $c_k = a_{k+1}$ alors $0 \leq a_1 \leq c_1 \leq \dots \leq a_k \leq c_{k+1} \leq \dots \leq c_s \leq 1$ vérifie (8.2.1). De plus, nous obtenons le même chemin en employant la nouvelle suite dans la formule (8.2.2).

Enfin, posons $\tilde{f}_i\pi = (\tilde{e}_i(\pi^\vee))^\vee$. La construction explicite de $\tilde{f}_i\pi$ dans le cas $\varphi_i(\pi) > 0$ est la suivante. Définissons $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ ($s \geq 1$) comme suit :

$$(8.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) \text{ pour } 0 \leq t \leq a_1. \\ (2) \langle h_i, \pi(a_1) \rangle = H_i(\pi). \\ (3) \langle h_i, \pi(t) \rangle \text{ croît strictement sur } [a_\nu, c_\nu] \text{ pour tout } 1 \leq \nu \leq s. \\ (4) \langle h_i, \pi(c_\nu) \rangle = \langle h_i, \pi(a_{\nu+1}) \rangle \text{ et } \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq \langle h_i, \pi(c_\nu) \rangle \\ \text{sur } [c_\nu, a_{\nu+1}] \text{ pour tout } 1 \leq \nu \leq s-1. \\ (5) \langle h_i, \pi(c_s) \rangle = H_i(\pi) + 1. \\ (6) \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + 1 \text{ pour } c_s \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Alors $\tilde{f}_i\pi$ est le chemin obtenu en effectuant la symétrie de la partie $[a_\nu, c_\nu]$ ($1 \leq \nu \leq s$) par la réflexion simple s_i et en n'effectuant qu'une translation sur les autres parties afin de conserver un chemin continu. Concrètement, nous avons

$$(8.2.4) \quad (\tilde{f}_i\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq a_1, \\ \pi(t) - \langle h_i, \pi(t) - \pi(a_1) \rangle \alpha_i & \text{pour } a_\nu \leq t \leq c_\nu, \\ \pi(t) - \langle h_i, \pi(c_\nu) - \pi(a_1) \rangle \alpha_i & \text{pour } c_\nu \leq t \leq a_{\nu+1}, \\ \pi(t) - \alpha_i & \text{pour } c_s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Proposition 8.2.2. — *Le cristal \mathcal{P}_L est semi-normal.*

Démonstration. — En supposant $\varepsilon_i(\pi) > 0$, démontrons que $\tilde{f}_i\tilde{e}_i(\pi) = \pi$. Soit $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ la suite satisfaisant

à (8.2.1) pour π . Alors $H_i(\tilde{e}_i\pi) = H_i(\pi) + 1$ et ce nombre est atteint par $\langle h_i, (\tilde{e}_i\pi)(a_1) \rangle$, et $\langle h_i, (\tilde{e}_i\pi)(c_s) \rangle = H_i(\tilde{e}_i\pi) + 1$. Il s'ensuit que $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ vérifie (8.2.3) pour $\tilde{e}_i\pi$. Ainsi $\tilde{f}_i\tilde{e}_i\pi$ est le chemin obtenu en appliquant s_i^2 sur les segments $[a_\nu, c_\nu]$. Il découle de $s_i^2 = \text{id}$ que $\tilde{f}_i\tilde{e}_i(\pi) = \pi$.

En appliquant \vee , nous obtenons $\tilde{e}_i\tilde{f}_i(\pi) = \pi$ pour $\varphi_i(\pi) > 0$. Les autres axiomes se vérifient aisément. \square

Voici enfin la réalisation par des chemins de la base cristalline $B(\lambda)$. Pour tout poids λ , notons π_λ le chemin droit de 0 à λ (c'est-à-dire $\pi_\lambda(t) = t\lambda$).

Théorème 8.2.3 (Littelmann). — *Pour tout poids dominant λ , il existe un unique plongement de cristaux de $B(\lambda)$ dans \mathcal{P}_L envoyant u_λ sur π_λ . Par ce morphisme, le cristal $B(\lambda)$ est isomorphe à la composante connexe du cristal \mathcal{P}_L contenant π_λ .*

La démonstration du théorème sera effectuée dans la section 8.3. Celle-là repose sur la stabilité de la structure cristalline sur \mathcal{P}_L par similarité ainsi que sur sa stabilité partielle par concaténation.

Proposition 8.2.4. — *Soient π un chemin et n un entier strictement positif. Soit $i \in I$.*

(a) *Supposons $\varepsilon_i(\pi) \geq n$. Soit $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ une suite satisfaisant aux conditions (8.2.1)_n, c'est-à-dire aux conditions (8.2.1) avec (1) et (2) remplacées par les conditions (1)_n et (2)_n suivantes :*

$$(1)_n \quad \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + n \quad \text{pour } 0 \leq t \leq a_1.$$

$$(2)_n \quad \langle h_i, \pi(a_1) \rangle = H_i(\pi) + n.$$

Alors $\tilde{e}_i^n\pi$ est donné par une formule similaire à (8.2.2) dans laquelle le dernier cas est remplacé par

$$(\tilde{e}_i\pi)(t) = \pi(t) + n\alpha_i \quad \text{pour } c_s \leq t \leq 1.$$

(b) *Supposons $\varphi_i(\pi) \geq n$. Soit $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ une suite satisfaisant aux conditions (8.2.3) avec (5) et (6) remplacées par les conditions (5)_n et (6)_n suivantes :*

$$(5)_n \quad \langle h_i, \pi(c_s) \rangle = H_i(\pi) + n.$$

$$(6)_n \langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + n \text{ pour } c_s \leq t \leq 1.$$

Alors $f_i^n \pi$ est donné par une formule similaire à (8.2.4) dans laquelle le dernier cas est remplacé par

$$(\tilde{f}_i \pi)(t) = \pi(t) - n\alpha_i \text{ pour } c_s \leq t \leq 1.$$

Démonstration. — Prouvons (1) par récurrence sur n . Prenons une suite $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ satisfaisant aux conditions (8.2.1) $_n$. Choisissons k et a tels que $a_k \leq a < c_k$ et $\langle h_i, \pi(a) \rangle = H_i(\pi) + 1$. Alors $0 \leq a < c_k < a_{k+1} < \dots < a_s < c_s \leq 1$ vérifie la condition (8.2.1). Donc $\pi' := \tilde{e}_i \pi$ est obtenu à partir de π en effectuant la réflexion des parties $[a, c_k]$, $[a_\nu, c_\nu]$ ($k+1 \leq \nu \leq s$) par la réflexion simple s_i . On a $H_i(\pi') = H_i(\pi) + 1$ et $\pi'(t) = \pi(t)$ pour $t \leq a$. Ainsi $\pi'(a) = H_i(\pi')$ et $\pi'(t) \geq H_i(\pi')$ pour $t \geq a$. Il s'ensuit que $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_{k-1} < a_k \leq a \leq 1$ satisfait à la condition (8.2.1) $_{n-1}$ pour π' . Par conséquent $\tilde{e}_i^n \pi = \tilde{e}_i^{n-1} \pi'$ est obtenu à partir de π' en effectuant la réflexion des parties $[a_\nu, c_\nu]$ ($1 \leq \nu < k$) et $[a_k, a]$ par s_i (voir la remarque 8.2.1). D'où le résultat recherché.

La démonstration pour \tilde{f}_i^n est analogue. \square

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition.

Corollaire 8.2.5. — *Pour tout entier $m > 0$ et tout chemin $\pi \in \mathcal{P}_L$, nous avons*

$$S_m(\tilde{e}_i \pi) = \tilde{e}_i^m S_m(\pi), \quad S_m(\tilde{f}_i \pi) = \tilde{f}_i^m S_m(\pi).$$

Proposition 8.2.6. — *Soit $i \in I$. Notons $\mathcal{P}_L^{(i)}$ le sous-ensemble de \mathcal{P}_L formé des chemins π tels que $H_i(\pi) \in \mathbb{Z}$.*

(1) *L'ensemble $\mathcal{P}_L^{(i)}$ vérifie $\tilde{e}_i \mathcal{P}_L^{(i)} \in \mathcal{P}_L^{(i)} \sqcup \{0\}$ et $\tilde{f}_i \mathcal{P}_L^{(i)} \in \mathcal{P}_L^{(i)} \sqcup \{0\}$.*

(2) *L'application $\mathcal{P}_L^{(i)} \otimes \mathcal{P}_L^{(i)} \longrightarrow \mathcal{P}_L^{(i)}$ définie par $\pi_1 \otimes \pi_2 \mapsto \pi_1 * \pi_2$ est un morphisme de cristaux sur $U_q(\mathfrak{g})_i$.*

Démonstration. — (1) La première propriété est une conséquence de l'égalité $H_i(\tilde{e}_i \pi) = H_i(\pi) + 1$, prouvée au cours de la démonstration de la proposition 8.2.2. La vérification de la seconde assertion est similaire.

(2) Posons $\pi = \pi_1 * \pi_2$. Démontrons tout d'abord que

$$(8.2.5) \quad \varepsilon_i(\pi) = \max(\varepsilon_i(\pi_1), \varepsilon_i(\pi_2) - \langle h_i, \text{wt}(\pi_1) \rangle).$$

On a $\pi(t) = \pi_1(2t)$ pour $0 \leq t \leq 1/2$ et $\pi(t) = \pi_2(2t - 1) + \pi_1(1)$ pour $1/2 \leq t \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned} H_i(\pi) &= \min\{\langle h_i, \pi(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \min\left(\min\{\langle h_i, \pi_1(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1\}, \min\{\langle h_i, \pi_2(t) + \pi_1(1) \rangle; 0 \leq t \leq 1\}\right) \\ &= \min(H_i(\pi_1), H_i(\pi_2) + \langle h_i, \text{wt}(\pi_1) \rangle). \end{aligned}$$

D'où (8.2.5).

Démontrons que $\tilde{e}_i\pi = \pi_1 * (\tilde{e}_i\pi_2)$ en supposant $\varphi_i(\pi_1) < \varepsilon_i(\pi_2)$. D'après l'hypothèse on a $H_i(\pi_1) > H_i(\pi_2) + \langle h_i, \text{wt}(\pi_1) \rangle = H_i(\pi)$. L'hypothèse d'intégralité implique l'inégalité $H_i(\pi_1) \geq H_i(\pi) + 1$. Par conséquent $\langle h_i, \pi(t) \rangle \geq H_i(\pi) + 1$ est vérifiée pour $0 \leq t \leq 1/2$. Donc si l'on choisit $0 \leq a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ vérifiant la condition (8.2.1) pour π_2 , alors $0 < (1 + a_1)/2 < (1 + c_1)/2 < (1 + a_2)/2 < (1 + c_2)/2 < \dots < (1 + c_s)/2 \leq 1$ satisfait à la condition (8.2.1) pour π . D'où le résultat escompté, à savoir $\tilde{e}_i\pi = \pi_1 * (\tilde{e}_i\pi_2)$.

La vérification des autres axiomes des morphismes de cristaux est similaire. □

Le lemme suivant est une conséquence de la proposition 8.2.4.

Lemme 8.2.7. — Pour $\lambda \in P$ et $i \in I$, nous avons :

- (1) $\varepsilon_i(\pi_\lambda) = (-\langle h_i, \lambda \rangle)_+$ et $\varphi_i(\pi_\lambda) = (\langle h_i, \lambda \rangle)_+$. Ici $x_+ := \max(x, 0)$.
(2)

$$\pi_{s_i\lambda} = \begin{cases} \tilde{f}_i^{\langle h_i, \lambda \rangle} \pi_\lambda & \text{si } \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0, \\ \tilde{e}_i^{-\langle h_i, \lambda \rangle} \pi_\lambda & \text{si } \langle h_i, \lambda \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Remarque 8.2.8. — La structure cristalline sur \mathcal{P}_L est l'unique structure de cristal semi-normal satisfaisant au corollaire 8.2.5, à la proposition 8.2.6 et au lemme 8.2.7. En effet, pour tout $\pi \in \mathcal{P}_L$ il existe un entier $m > 0$ et des poids $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tels que $S_m(\pi) = \pi_{\lambda_1} * \dots * \pi_{\lambda_N}$.

8.3. Plongement de $B(\lambda)$ dans le cristal des chemins

Soit λ un poids intégral dominant. L'ensemble $\text{wt}(V(\lambda)) = \text{wt}(B(\lambda))$ des poids de $V(\lambda)$ est alors contenu dans $\lambda + Q_-$ et invariant sous l'action

du groupe de Weyl. De plus nous avons

$$\sharp B(\lambda)_\mu = \sharp B(\lambda)_{w\mu} \text{ pour tous } \mu \in P \text{ et } w \in W.$$

Il existe donc pour tout $w \in W$ un unique élément $u_{w\lambda} \in B(\lambda)$ de poids $w\lambda$. Ce vecteur $u_{w\lambda}$ vérifie en outre les propriétés suivantes.

Lemme 8.3.1. — Soient $i \in I$, $\lambda \in P_+$ et $w \in W$.

(1) Si $s_i w > w$ alors $\langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0$; si $s_i w < w$ alors $\langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0$.

(2) Les applications φ_i et ε_i agissent sur $u_{w\lambda}$ par

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(u_{w\lambda}) &= 0, & \varphi_i(u_{w\lambda}) &= \langle h_i, w\lambda \rangle & \text{ si } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ \varphi_i(u_{w\lambda}) &= 0, & \varepsilon_i(u_{w\lambda}) &= -\langle h_i, w\lambda \rangle & \text{ si } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

(3) Les vecteurs $u_{w\lambda}$ et $u_{s_i w\lambda}$ sont reliés par

$$u_{s_i w\lambda} = \begin{cases} \tilde{f}_i^{\langle h_i, w\lambda \rangle} u_{w\lambda} & \text{ si } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ \tilde{e}_i^{-\langle h_i, w\lambda \rangle} u_{w\lambda} & \text{ si } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Si $s_i w > w$ alors $w^{-1}\alpha_i \in \Delta_+$ d'après le lemme 3.4.2, donc $w\lambda + \alpha_i = w(\lambda + w^{-1}\alpha_i)$ n'est pas un poids de $B(\lambda)$. De même, si $s_i w < w$ alors $w\lambda - \alpha_i$ n'est pas un poids de $B(\lambda)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i u_{w\lambda} &= 0 & \text{ si } s_i w > w, \\ \tilde{f}_i u_{w\lambda} &= 0 & \text{ si } s_i w < w. \end{aligned}$$

Donc on obtient (1) et (2).

(3) est une conséquence du fait que le terme de droite est un vecteur non nul de poids $s_i w\lambda$. \square

Désignons par $K_m: B(\lambda) \longrightarrow B(\lambda)^{\otimes m}$ la composition du morphisme $S_m: B(\lambda) \hookrightarrow B(m\lambda)$ d'amplitude m défini par $u_\lambda \mapsto u_{m\lambda}$ et du morphisme de cristaux $B(m\lambda) \hookrightarrow B(\lambda)^{\otimes m}$ défini par $u_{m\lambda} \mapsto u_\lambda^{\otimes m}$. Alors K_m est l'unique morphisme d'amplitude m de $B(\lambda)$ dans $B(\lambda)^{\otimes m}$. Notons également K_m le morphisme

$$(K_m)^{\otimes n}: B(\lambda)^{\otimes n} \longrightarrow B(\lambda)^{\otimes nm}$$

d'amplitude m .

Proposition 8.3.2. — (1) Les vecteurs $K_m(u_{w\lambda})$ et $u_{w\lambda}^{\otimes m}$ sont égaux pour tout $w \in W$.

(2) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} B(\lambda) & \xrightarrow{K_n} & B(\lambda)^{\otimes n} \\ & \searrow K_{nm} & \downarrow K_m \\ & & B(\lambda)^{\otimes nm} \end{array}$$

est commutatif.

(3) Soit $b \in B(\lambda)$. Si m contient assez de facteurs, alors il existe des éléments $w_1, \dots, w_m \in W$ tels que $K_m(b)$ soit égal à $u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda}$.

Démonstration. — (1) Le vecteur $K_m(u_{w\lambda})$ est de poids $m w \lambda$. Or il n'existe qu'un unique vecteur dans $V(\lambda)^{\otimes m}$ de poids $m w \lambda$, à savoir $u_{w\lambda}^{\otimes m}$.

(2) Évident.

(3) Soit $b = \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} u_\lambda$. Effectuons une récurrence sur ℓ . Le résultat est vrai pour $b = u_\lambda$, c'est-à-dire lorsque $\ell = 0$. Supposons-le démontré pour tout $b = \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} u_\lambda$, et vérifions-le pour $\tilde{f}_i b$. Nous avons $K_m(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i^m K_m(b) = \tilde{f}_i^m (u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda})$. Donc il est suffisant de démontrer que pour r et $w_1, \dots, w_m \in W$ tels que le vecteur $\tilde{f}_i^r (u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda})$ soit non nul, il existe n tel que l'image de ce vecteur par K_n soit un produit tensoriel de $u_{w\lambda}$ ($w \in W$). Or $\tilde{f}_i^r (u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda})$ s'écrit $\tilde{f}_i^{c_1} u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes \tilde{f}_i^{c_m} u_{w_m\lambda}$ pour certains $c_k \in \mathbb{N}$, et $K_n(\tilde{f}_i^r (u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda})) = \tilde{f}_i^{nc_1} (u_{w_1\lambda}^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes \tilde{f}_i^{nc_m} (u_{w_m\lambda}^{\otimes n})$. Nous sommes ainsi ramenés à démontrer que

$$(8.3.1) \quad \text{pour } w \in W \text{ et } c \geq 0, \text{ si } \tilde{f}_i^c u_{w\lambda} \neq 0, \text{ alors il existe } n \text{ tel que } \tilde{f}_i^{nc} (u_{w\lambda}^{\otimes n}) \text{ soit un produit tensoriel de certains } u_{x\lambda} \text{ (} x \in W \text{)}.$$

En effet, si $\tilde{f}_i^{n_k c_k} (u_{w_k\lambda}^{\otimes n_k})$ est un produit de $u_{x\lambda}$ ($x \in W$), alors en posant $n = \prod_k n_k$ on a $K_n(\tilde{f}_i^r (u_{w_1\lambda} \otimes \dots \otimes u_{w_m\lambda})) = K_n(\tilde{f}_i^{c_1} u_{w_1\lambda}) \otimes \dots \otimes K_n(\tilde{f}_i^{c_m} u_{w_m\lambda}) = K_{n/n_1}(\tilde{f}_i^{n_1 c_1} (u_{w_1\lambda}^{\otimes n_1})) \otimes \dots \otimes K_{n/n_m}(\tilde{f}_i^{n_m c_m} (u_{w_m\lambda}^{\otimes n_m}))$.

Démontrons (8.3.1). Si $c = 0$, il suffit de prendre $n = 1$. Supposons donc $c > 0$. Puisque $\tilde{f}_i^c u_{w\lambda} \neq 0$, les entiers $n := \varphi_i(u_{w\lambda}) \geq c$ et $\langle h_i, w\lambda \rangle$ sont strictement positifs; ainsi $\tilde{f}_i^n u_{w\lambda} = u_{s_i w\lambda}$. On a $\tilde{f}_i^{nc} (u_{w\lambda}^{\otimes n}) = \tilde{f}_i^{nc} (u_{w\lambda}^{\otimes c} \otimes u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)})$. Par ailleurs $\varphi_i(u_{w\lambda}^{\otimes c}) = nc$ et $\varepsilon_i(u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)}) = 0$, ce qui entraîne $\varphi_i(u_{w\lambda}^{\otimes c}) = \varepsilon_i(u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)}) + nc$. La formule (2.3.11) implique

$$\tilde{f}_i^{nc} (u_{w\lambda}^{\otimes c} \otimes u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)}) = \tilde{f}_i^{nc} (u_{w\lambda}^{\otimes c}) \otimes u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)} = u_{s_i w\lambda}^{\otimes c} \otimes u_{w\lambda}^{\otimes (n-c)}.$$

D'où (8.3.1). □

Fin de la démonstration du théorème 8.2.3. — Définissons une application $\Psi: B(\lambda) \longrightarrow \mathcal{P}_L$ associant à $b \in B(\lambda)$ tel que $K_m(b) = u_{w_1\lambda} \otimes \cdots \otimes u_{w_m\lambda}$ le chemin $\pi_{m^{-1}w_1\lambda} * \cdots * \pi_{m^{-1}w_m\lambda} \in \mathcal{P}_L$. Elle est définie sans ambiguïté d'après la proposition précédente. Démontrons que Ψ est un morphisme de cristaux.

Soient b comme ci-dessus et $\pi = \Psi(b) = \pi_{m^{-1}w_1\lambda} * \cdots * \pi_{m^{-1}w_m\lambda}$. Ce chemin π est linéaire sur chaque intervalle $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ ($0 \leq k \leq m-1$) et vérifie $\pi(k/m) = m^{-1} \sum_{1 \leq \nu \leq k} w_\nu \lambda$.

Démontrons que $\varepsilon_i(\pi) = \varepsilon_i(b)$. Posons $\eta_k = \varepsilon_i(u_{w_k\lambda}) - \sum_{1 \leq \nu < k} \langle h_i, w_\nu \lambda \rangle$ et $\xi_k = \sum_{1 \leq \nu \leq k} \langle h_i, w_\nu \lambda \rangle = m \langle h_i, \pi(k/m) \rangle$. Alors $H_i(\pi)$ a pour valeur $\min\{m^{-1}\xi_k; 0 \leq k \leq m\}$ et $\varepsilon_i(\pi)$ est égal à $\lfloor -H_i(\pi) \rfloor$. Or $\varepsilon_i(u_{w_k\lambda}) = \max(0, -\langle h_i, w_k \lambda \rangle)$, d'où $\eta_k = \max(-\xi_{k-1}, -\xi_k)$. Il s'ensuit que $m\varepsilon_i(b) = \varepsilon_i(K_m(b)) = \max\{\eta_k; 1 \leq k \leq m\} = \max\{-\xi_k; 0 \leq k \leq m\} = -mH_i(\pi)$. Ainsi $\varepsilon_i(b) = -H_i(\pi)$ est un entier, et finalement $\varepsilon_i(b) = \varepsilon_i(\pi)$.

Démontrons que $\Psi(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \pi$ lorsque $\varepsilon_i(b) \geq 1$. On peut supposer que $K_m(\tilde{e}_i b)$ est également de la forme $u_{w'_1\lambda} \otimes \cdots \otimes u_{w'_m\lambda}$. Donc on a $\Psi(\tilde{e}_i b) = \pi_{m^{-1}w'_1\lambda} * \cdots * \pi_{m^{-1}w'_m\lambda}$. D'autre part, on a

$$K_m(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i^m K_m(b) = \tilde{e}_i^{c_1} u_{w_1\lambda} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_i^{c_m} u_{w_m\lambda}$$

pour certains $c_k \geq 0$. Par conséquent $u_{w'_k\lambda} = \tilde{e}_i^{c_k} u_{w_k\lambda}$. Si $c_k = 0$ alors $w'_k\lambda = w_k\lambda$. Si $c_k > 0$, alors $w'_k\lambda = s_i w_k\lambda$ et $c_k = -\langle h_i, w_k\lambda \rangle$. Dans les deux cas, le lemme 8.2.7 implique $\tilde{e}_i^{c_k} \pi_{w_k\lambda} = \pi_{w'_k\lambda}$. Remarquons que l'on a un isomorphisme de cristaux sur $U_q(\mathfrak{g})_i$ entre la i -chaîne de $\Phi_i(B(\lambda))$ contenant $u_{w_k\lambda}$ et la i -chaîne de $\mathcal{P}_L^{(i)}$ contenant $\pi_{w_k\lambda}$, envoyant $u_{w_k\lambda}$ sur $\pi_{w_k\lambda}$. D'où

$$\tilde{e}_i^m (\pi_{w_1\lambda} \otimes \cdots \otimes \pi_{w'_m\lambda}) = \tilde{e}_i^{c_1} \pi_{w_1\lambda} \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_i^{c_m} \pi_{w_m\lambda}.$$

D'après le corollaire 8.2.5 et la proposition 8.2.6, nous avons

$$\begin{aligned} S_m(\tilde{e}_i \pi) &= \tilde{e}_i^m S_m(\pi) = \tilde{e}_i^m (\pi_{w_1\lambda} * \cdots * \pi_{w'_m\lambda}) \\ &= \tilde{e}_i^{c_1} \pi_{w_1\lambda} * \cdots * \tilde{e}_i^{c_m} \pi_{w_m\lambda} \\ &= \pi_{w'_1\lambda} * \cdots * \pi_{w'_m\lambda} = S_m(\Psi(\tilde{e}_i b)). \end{aligned}$$

Finalement $\tilde{e}_i \pi = \Psi(\tilde{e}_i b)$.

On démontre de façon similaire que $\Psi(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \Psi(b)$ lorsque $\varphi_i(b) > 0$. Les autres axiomes des morphismes de cristaux se vérifient facilement.

L'injectivité de Ψ découle du lemme suivant, achevant ainsi la démonstration du théorème 8.2.3. \square

Lemme 8.3.3. — *Soit λ un poids dominant.*

(1) *Si $w, w' \in W$ satisfont à $w\lambda = cw'\lambda$ pour un $c > 0$, alors $w\lambda = w'\lambda$.*

(2) *Si deux suites w_1, \dots, w_m et w'_1, \dots, w'_m d'éléments de W satisfont à $\pi_{w_1\lambda} * \dots * \pi_{w_m\lambda} = \pi_{w'_1\lambda} * \dots * \pi_{w'_m\lambda}$, alors $w_\nu\lambda = w'_\nu\lambda$ ($1 \leq \nu \leq m$).*

Démonstration. — Pour démontrer (1), on peut supposer $w' = 1$. Raisonnons par récurrence sur $\ell(w)$. Si $\ell(w) = 0$, l'assertion est triviale. Si $\ell(w) > 0$, prenons $i \in I$ tel que $s_i w < w$. Alors $w^{-1}\alpha_i \in \Delta_-$ et donc $(\alpha_i, w\lambda) = (w^{-1}\alpha_i, \lambda) \leq 0$. Or $(\alpha_i, \lambda) \geq 0$, d'où $(\alpha_i, w\lambda) = 0$ et ainsi $w\lambda = s_i w\lambda$. D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $s_i w\lambda = \lambda$.

(2) découle de (1). \square

L'image de $B(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{P}$ se décrit de façon explicite à l'aide des chemins de Lakshmibai-Seshadri. Voir [21, 22] pour plus de détails.

Exemple 8.3.4. — Supposons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2$. La base cristalline $B(\lambda)$ est de dimension 8. Les chemins correspondant aux éléments de $B(\lambda)$, obtenus en appliquant de façon répétée les opérateurs \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 à π_λ , sont :

- les six chemins π_μ , avec μ racine (associés aux vecteurs extrémaux) ;
- les deux chemins de poids nul

$$\xi_\alpha(t) = \begin{cases} -t\alpha & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (t-1)\alpha & \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

où $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ est une racine simple.

Son graphe cristallin est représenté par la figure 8.2. Voir les figures 5.1 page 65 et 5.2 page 69 pour la description de $B(\lambda)$ par une base de vecteurs explicite et par les tableaux de Young respectivement.

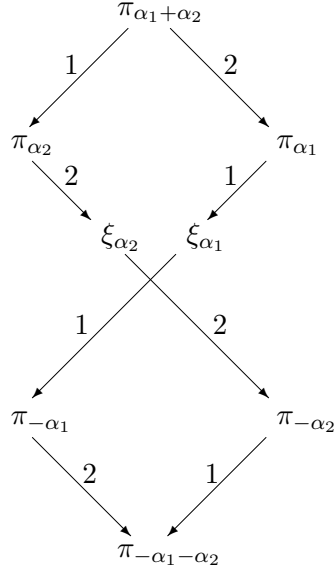


FIGURE 8.2. Graphe cristallin de $B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ par les chemins

Exercice 8.1. — Soient un indice $i \in I$, des cristaux B_k ($1 \leq k \leq \ell$) et des vecteurs $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_\ell$ avec $b_k \in B_k$. Calculons $\tilde{e}_i^n b$ pour $n \geq 1$. Posons $\eta_k = \varepsilon_i(b_k) - \sum_{1 \leq \nu < k} \langle h_i, \text{wt}(b_\nu) \rangle$. Alors $\varepsilon_i(b) = \max\{\eta_k; 1 \leq k \leq \ell\}$. Définissons une suite d'entiers $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq \ell$ ($1 \leq s \leq \ell$) par

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \ \varepsilon_i(b) - n < \eta_{a_1} < \cdots < \eta_{a_s} = \varepsilon_i(b). \\ (2) \ \eta_k \leq \varepsilon_i(b) - n \text{ pour } 1 \leq k < a_1. \\ (3) \ \eta_k \leq \varepsilon_i(b) \text{ pour } a_s < k \leq \ell. \\ (4) \ \eta_k \leq \eta_{a_\nu} \text{ pour } 1 \leq \nu < s \text{ et } a_\nu < k < a_{\nu+1}. \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que a_1 est le plus petit entier k tel que $\varepsilon_i(b) - n < \eta_k$, que a_2 est le plus petit entier $k > a_1$ tel que $\eta_k > \eta_{a_1}$, etc.

Démontrez que

$$\tilde{e}_i^n(b) = \tilde{e}_i^{c_1} b_1 \otimes \tilde{e}_i^{c_2} b_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{e}_i^{c_\ell} b_\ell,$$

où $c_k = 0$ pour $k \notin \{a_1, \dots, a_s\}$, ainsi que $c_{a_1} = \eta_{a_1} - (\varepsilon_i(b) - n) > 0$ et $c_{a_\nu} = \eta_{a_\nu} - \eta_{a_{\nu-1}} > 0$ pour $1 < \nu \leq s$.

CHAPITRE 9

CRISTAUX ET GROUPE DE WEYL

9.1. Décomposition des bases cristallines selon W

Soit λ un poids dominant. Pour tout élément w du groupe de Weyl, désignons par $\overline{B}_{w\lambda}(\lambda)$ l'ensemble formé des $b \in B(\lambda)$ tels que $K_m(b) = u_{w\lambda} \otimes b'$ pour un entier m strictement positif et un vecteur $b' \in B(\lambda)^{\otimes(m-1)}$.

D'après la proposition 8.3.2, pour tout $b \in \overline{B}_{w\lambda}(\lambda)$ tel que $K_m(b) = u_{w'\lambda} \otimes b'$ pour $b' \in B(\lambda)^{\otimes(m-1)}$ on a $w\lambda = w'\lambda$. D'où la décomposition

$$B(\lambda) = \bigsqcup_{\mu \in W \cdot \lambda} \overline{B}_{\mu}(\lambda).$$

Les $\overline{B}_{\mu}(\lambda)$ ($\mu \in W\lambda$) se comportent de la façon suivante vis-à-vis de l'action des opérateurs \tilde{e}_i et \tilde{f}_i .

Proposition 9.1.1. — *Les ensembles $\overline{B}_{w\lambda}(\lambda)$ vérifient*

$$(9.1.1) \quad \tilde{e}_i \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \subset \begin{cases} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \sqcup \{0\} & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \sqcup \overline{B}_{s_i w\lambda}(\lambda) & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle < 0, \end{cases}$$

$$(9.1.2) \quad \tilde{e}_i^{\max} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \subset \begin{cases} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ \overline{B}_{s_i w\lambda}(\lambda) & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0, \end{cases}$$

$$(9.1.3) \quad \tilde{f}_i \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \subset \begin{cases} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \sqcup \overline{B}_{s_i w\lambda}(\lambda) \sqcup \{0\} & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle > 0, \\ \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \sqcup \{0\} & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0, \end{cases}$$

$$(9.1.4) \quad \tilde{f}_i^{\max} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \subset \begin{cases} \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) \sqcup \overline{B}_{s_i w\lambda}(\lambda) & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ \overline{B}_{w\lambda}(\lambda) & \text{si } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Ici on note $\tilde{e}_i^{\max} b = \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b$ et $\tilde{f}_i^{\max} b = \tilde{f}_i^{\varphi_i(b)} b$.

Démonstration. — Commençons par (9.1.1). Supposons que $K_m(b) = u_{w\lambda} \otimes b'$. Si $\langle h_i, w\lambda \rangle < 0$, alors $m\varepsilon_i(b) = \varepsilon_i(K_m(b)) \geq \varepsilon_i(u_{w\lambda}) > 0$ et donc $\tilde{e}_i b \neq 0$. Ainsi quel que soit le signe de $\langle h_i, w\lambda \rangle$ nous pouvons prendre $\tilde{e}_i b$ non nul. On peut de plus supposer que le vecteur $K_m(\tilde{e}_i b)$ s'écrit sous la forme $u_{w'\lambda} \otimes b''$. Il s'ensuit que $u_{w'\lambda} = \tilde{e}_i^p u_{w\lambda}$ pour un entier p ; d'où $w'\lambda = w\lambda$ si $\langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0$, et $w'\lambda = w\lambda$ ou $s_i w\lambda$ si $\langle h_i, w\lambda \rangle < 0$.

Démontrons maintenant (9.1.3). Si $K_m(b) = u_{w\lambda} \otimes b'$ et $K_m(\tilde{f}_i b) = u_{w'\lambda} \otimes b''$, alors $u_{w'\lambda} = \tilde{f}_i^p u_{w\lambda}$ pour un p . D'où le résultat escompté.

Les autres assertions en découlent. \square

Lemme 9.1.2. — *L'ensemble $\overline{B}_\lambda(\lambda)$ est réduit au vecteur u_λ .*

Démonstration. — On a trivialement $u_\lambda \in \overline{B}_\lambda(\lambda)$.

Démontrons l'inclusion réciproque. Si $\langle h_i, \lambda \rangle > 0$, alors $\tilde{f}_i u_\lambda \in \overline{B}_{s_i \lambda}(\lambda)$. En effet, en posant $n = \langle h_i, \lambda \rangle$ on a $K_n(\tilde{f}_i u_\lambda) = \tilde{f}_i^n (u_\lambda^{\otimes n}) = u_{s_i \lambda} \otimes u_\lambda^{\otimes (n-1)}$. Donc si $b \neq u_\lambda$ alors $b \notin \overline{B}_\lambda(\lambda)$ d'après (9.1.3) et l'égalité $B(\lambda) = \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} u_\lambda\} \setminus \{0\}$. \square

Posons

$$B_w(\lambda) = \bigcup_{w' \leq w} \overline{B}_{w'\lambda}(\lambda).$$

Alors on a la

Proposition 9.1.3. — (1) *Les ensembles $B_w(\lambda)$ vérifient*

$$\tilde{e}_i B_w(\lambda) \subset B_w(\lambda) \sqcup \{0\},$$

$$\tilde{f}_i B_w(\lambda) \subset B_w(\lambda) \sqcup \{0\} \text{ si } s_i w < w,$$

$$\tilde{e}_i^{\max} B_w(\lambda) \subset B_{s_i w}(\lambda) \text{ si } s_i w < w.$$

(2) *Si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ est une décomposition réduite de $w \in W$, alors*

$$\begin{aligned} B_w(\lambda) &= \{\tilde{f}_{i_1}^{m_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell}^{m_\ell} u_\lambda; m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\} \\ &= \{b \in B(\lambda); \tilde{e}_{i_\ell}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{\max} b = u_\lambda\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — (1) La première assertion sur \tilde{e}_i est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus. La seconde assertion découle de la même proposition et du fait que si $w' \leq w$ et $s_i w < w$ alors

$s_i w' \leq w$. Le dernier point résulte de la même proposition et du fait que si $s_i w' < w' \leq w$ et $s_i w < w$ alors $s_i w' \leq s_i w$.

(2) Soient B_1 et B_2 les second et dernier ensembles. Alors par (1) nous avons $B_w(\lambda) \subset B_2 \subset B_1 \subset B_w(\lambda)$.

□

Corollaire 9.1.4. — *Supposons \mathfrak{g} de dimension finie. Soit w_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl.*

(1) *Les ensembles $B_{w_0}(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont égaux.*

(2) *Soit $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ une décomposition réduite de w_0 ; alors pour tout $b \in B(\lambda)$ l'élément $\tilde{e}_{i_1}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_\ell}^{\max} b$ est le vecteur u_λ de plus haut poids de $B(\lambda)$; de plus l'élément $\tilde{f}_{i_1}^{\max} \cdots \tilde{f}_{i_\ell}^{\max} b$ est le vecteur $u_{w_0 \lambda}$ de plus bas poids de $B(\lambda)$.*

Démonstration. — (1) Immédiat.

(2) Il suffit d'appliquer la proposition ci-dessus à $B(\lambda)$ et $B(-w_0 \lambda) = B(\lambda)^\vee$.

□

En fait $B_w(\lambda)$ s'interprète en termes de représentations de la façon suivante. Dans la proposition ci-après, nous désignons par $u_{w\lambda}$ un élément $G_\lambda(u_{w\lambda})$ de $V(\lambda)$ de poids $w\lambda$.

Proposition 9.1.5 ([15]). — *Pour $w \in W$ dont une décomposition réduite est $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$, nous avons*

$$\bigoplus_{b \in B_w(\lambda)} KG_\lambda(b) = U_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda} = \sum_{m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}} K f_{i_1}^{m_1} \cdots f_{i_\ell}^{m_\ell} u_\lambda.$$

Le $U_q^+(\mathfrak{g})$ -module $U_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda}$ est appelé *module de Demazure*. Son caractère est donné dans la section suivante.

En faisant tendre λ vers l'infini, nous obtenons le résultat suivant pour $B(\infty)$.

Proposition 9.1.6. — (1) *Pour tout $w \in W$, il existe un sous-ensemble $B_w(\infty)$ de $B(\infty)$ tel que*

$$\begin{aligned} B_w(\infty) &= \{ \tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell}^{a_\ell} u_\infty ; a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{N} \} \\ &= \{ b \in B(\infty) ; \tilde{e}_{i_\ell}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{\max} b = 0 \} \end{aligned}$$

pour toute décomposition réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$.

(2) La base cristalline est partitionnée en $B(\infty) = \bigsqcup_{w \in W} \overline{B}_w(\infty)$, où $\overline{B}_w(\infty) = B_w(\infty) \setminus \left(\bigcup_{w' < w} B_{w'}(\infty) \right)$.

(3) Nous avons

$$\tilde{f}_i \overline{B}_w(\infty) \subset \begin{cases} \overline{B}_w(\infty) & \text{si } s_i w < w, \\ \overline{B}_w(\infty) \sqcup \overline{B}_{s_i w}(\infty) & \text{si } s_i w > w. \end{cases}$$

(4) Soit λ un poids dominant. En considérant $B(\lambda)$ comme sous-cristal de $B(\infty) \otimes T_\lambda$, on a $B_w(\lambda) = B(\lambda) \cap (B_w(\infty) \otimes T_\lambda)$.

Remarque 9.1.7. — Choisissons une décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ d'un élément $w \in W$. Soit $\Psi: B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_\ell}$ le plongement introduit dans la section 7.2. Alors on a ([15])

$$B_w(\infty) = \{b \in B(\infty); \Psi(b) \in u_\infty \otimes B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_\ell}\}.$$

9.2. Formule du caractère de Demazure-Littelmann

Demazure ([3]) a démontré le théorème suivant (dans le cas $q = 1$).

Théorème 9.2.1. — Soient $\lambda \in P_+$ et $w \in W$. Choisissons une décomposition réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ de w . Alors

$$\text{ch}(U_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda}) = D_{i_1} \cdots D_{i_\ell} e^\lambda.$$

Ici D_i est l'opérateur sur $\bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{Z}e^\lambda$ défini par

$$D_i(e^\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{\lambda - \langle h_i, \lambda \rangle + 1 \alpha_i}}{1 - e^{-\alpha_i}} = \begin{cases} \sum_{0 \leq n \leq \langle h_i, \lambda \rangle} e^{\lambda - n \alpha_i} & \text{si } \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0, \\ - \sum_{0 < n < -\langle h_i, \lambda \rangle} e^{\lambda + n \alpha_i} & \text{si } \langle h_i, \lambda \rangle < 0. \end{cases}$$

Voyons l'interprétation par Littelmann de cet énoncé en termes de bases cristallines. Définissons de façon similaire un opérateur \mathcal{D}_i sur $\mathbb{Z}^{\oplus B(\lambda)}$ par

$$\mathcal{D}_i(b) = \begin{cases} \sum_{0 \leq n \leq \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} \tilde{f}_i^n b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0, \\ - \sum_{0 < n < -\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} \tilde{e}_i^n b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle < 0. \end{cases}$$

Soit $\text{ch} : \mathbb{Z}^{\oplus B(\lambda)} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{Z} e^\lambda$ l'application \mathbb{Z} -linéaire définie par $\text{ch}(b) = e^{\text{wt}(b)}$. Les opérateurs \mathcal{D}_i et D_i sont reliés à l'aide de l'application ch d'après la formule

$$(9.2.1) \quad \text{ch}(\mathcal{D}_i \psi) = D_i \text{ch}(\psi) \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbb{Z}^{\oplus B(\lambda)}.$$

Soit S_i l'involution de l'ensemble $B(\lambda)$ définie ci-après en (9.4.1). Nous avons $\mathcal{D}_i(b + S_i b) = b + S_i b$. Ainsi $\mathcal{D}_i \psi = \psi$ lorsque $\psi \in \mathbb{Z}^{\oplus B(\lambda)}$ est invariant par S_i . Par conséquent, pour toute i -chaîne S de $B(\lambda)$ on a

$$(9.2.2) \quad \mathcal{D}_i \left(\sum_{b \in S} b \right) = \sum_{b \in S} b.$$

De plus, si b_0 est le vecteur de plus haut poids de S alors

$$(9.2.3) \quad \mathcal{D}_i b_0 = \sum_{b \in S} b.$$

Proposition 9.2.2. — Soient S une i -chaîne de $B(\lambda)$ et b_0 le vecteur de plus haut poids de S . Alors pour tout $w \in W$ l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- (1) $S \cap B_w(\lambda) = \emptyset$.
- (2) $S \cap B_w(\lambda) = \{b_0\}$.
- (3) $S \subset B_w(\lambda)$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que :

- (a) Si $b \in S$ satisfait à $\tilde{e}_i b \in S$ et $b \in B_w(\lambda)$, alors $\tilde{e}_i b \in B_w(\lambda)$.
- (b) Si $b_0, \tilde{f}_i b_0 \in B_w(\lambda)$, alors $S \subset B_w(\lambda)$.

(a) est évidente d'après la proposition 9.1.3 (1).

Démontrons (b). Supposons $b_0 \in \overline{B}_{w'}(\lambda)$ pour $w' \leq w$. Si $\langle h_i, w'\lambda \rangle \leq 0$, alors (b) découle de (9.1.3). On peut donc supposer $\langle h_i, w'\lambda \rangle > 0$. Par conséquent $\tilde{f}_i b_0 \in \overline{B}_{w'}(\lambda) \cup \overline{B}_{s_i w'}(\lambda)$. Si $\tilde{f}_i b_0 \in \overline{B}_{s_i w'}(\lambda)$, la même formule implique (b). Nous pouvons ainsi supposer $\tilde{f}_i b_0 \in \overline{B}_{w'}(\lambda)$. Prenons $m > 0$ tel que $K_m(b_0) = u_{w'\lambda} \otimes b'$ et $K_m(\tilde{f}_i b_0) = u_{w'\lambda} \otimes b''$. Alors $\tilde{f}_i^m(u_{w'\lambda} \otimes b') = u_{w'\lambda} \otimes b''$, d'où $\varepsilon_i(b') \geq \varphi_i(u_{w'\lambda})$ d'après (2.3.11). Il s'ensuit que $\tilde{f}_i^n(u_{w'\lambda} \otimes b') = u_{w'\lambda} \otimes \tilde{f}_i^n b'$ pour tout $n \geq 0$. Finalement $S \subset \overline{B}_{w'}(\lambda)$. \square

Proposition 9.2.3. — Supposons $s_i w > w$. Alors

$$\sum_{b \in B_{s_i w}(\lambda)} b = \mathcal{D}_i \left(\sum_{b \in B_w(\lambda)} b \right).$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que

$$(9.2.4) \quad \sum_{b \in S \cap B_{s_i w}(\lambda)} b = \mathcal{D}_i \left(\sum_{b \in S \cap B_w(\lambda)} b \right)$$

pour toute i -chaîne S . Nous avons

$$S \cap B_{s_i w}(\lambda) = \{ \tilde{f}_i^n b; b \in S \cap B_w(\lambda) \} \setminus \{0\}.$$

Donc si $S \cap B_w(\lambda) = \emptyset$, alors $S \cap B_{s_i w}(\lambda) = \emptyset$ et (9.2.4) est vérifiée. Si $S \subset B_w(\lambda)$, alors $S \subset B_{s_i w}(\lambda)$ et (9.2.4) est également vérifiée. Enfin si $S \cap B_w(\lambda)$ consiste seulement en le vecteur b_0 de plus haut poids de S , alors $S \subset B_{s_i w}(\lambda)$ et $\mathcal{D}_i b_0 = \sum_{b \in S} b$ implique (9.2.4). \square

Cette proposition a pour conséquence immédiate le théorème suivant.

Théorème 9.2.4 ([23]). — Soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ une décomposition réduite d'un élément $w \in W$. Alors pour tout poids dominant λ nous avons

$$\sum_{b \in B_w(\lambda)} b = \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_\ell} u_\lambda.$$

La formule du caractère de Demazure originale (théorème 9.2.1) est une conséquence de ce théorème, de la proposition 9.1.5 et de la formule (9.2.1).

9.3. Cristaux normaux

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition 4.2.2. Commençons par le

Théorème 9.3.1 ([20]). — Soit B un cristal semi-normal satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) Pour tout $J \subset I$ comptant au plus deux éléments, toute composante connexe de $\Phi_J(B)$ contenant un vecteur de plus haut poids (c'est-à-dire un vecteur annulé par \tilde{e}_i pour tout $i \in J$) est un cristal isomorphe au cristal associé à un $U_q(\mathfrak{g}_J)$ -module intégrable de \mathcal{O}_{int} .

(2) Toute composante connexe de B contient un vecteur de plus haut poids, c'est-à-dire un vecteur annulé par tous les \tilde{e}_i ($i \in I$).

Alors B est une union disjointe de cristaux $B(\lambda)$.

Démonstration. — Posons

$$B^h := \{b \in B; \tilde{e}_i b = 0 \text{ pour tout } i\}.$$

Pour $b_0 \in B^h$, notons $B(b_0)$ l'ensemble des vecteurs non nuls de la forme $\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_\ell} b_0$. Prouvons d'abord que $B(b_0)$ est isomorphe à $B(\lambda)$, où $\lambda = \text{wt}(b_0)$.

Pour toute suite $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\ell)$ de I , posons $|\sigma| = \ell$, $\tilde{f}^\sigma = \tilde{f}_{\sigma_1} \cdots \tilde{f}_{\sigma_\ell}$ et $\sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_\ell)$. Démontrons l'assertion suivante par récurrence sur ℓ .

- (a) $_\ell$ $\tilde{f}^\sigma u_\lambda = 0 \iff \tilde{f}^\sigma b_0 = 0$ pour tout σ tel que $|\sigma| \leq \ell$.
- (b) $_\ell$ Si $|\sigma| \leq \ell$ et $\tilde{f}^\sigma u_\lambda \neq 0$, alors $\varepsilon_i(\tilde{f}^\sigma u_\lambda) = \varepsilon_i(\tilde{f}^\sigma b_0)$ et $\varphi_i(\tilde{f}^\sigma u_\lambda) = \varphi_i(\tilde{f}^\sigma b_0)$ pour tout i .
- (c) $_\ell$ $\tilde{f}^\sigma u_\lambda = \tilde{f}^\tau u_\lambda \iff \tilde{f}^\sigma b_0 = \tilde{f}^\tau b_0$ pour tous σ et τ tels que $|\sigma|, |\tau| \leq \ell$.

Le cas $\ell = 0$ est trivial, donc supposons l'assertion vérifiée jusqu'à $\ell - 1$ et démontrons-la pour ℓ .

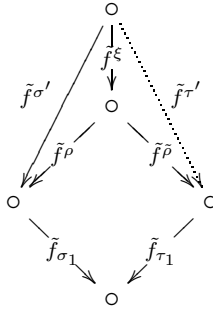
Commençons par (a) $_\ell$. Supposons $\tilde{f}^\sigma u_\lambda = 0$. Si $\tilde{f}^{\sigma'} u_\lambda = 0$, alors $\tilde{f}^{\sigma'} b_0 = 0$ d'après (a) $_{\ell-1}$, et ainsi $\tilde{f}^\sigma b_0 = 0$. Si $\tilde{f}^{\sigma'} u_\lambda \neq 0$, alors $\tilde{f}^{\sigma'} b_0 \neq 0$ et $\varphi_{\sigma_1}(\tilde{f}^{\sigma'} b_0) = \varphi_{\sigma_1}(\tilde{f}^{\sigma'} u_\lambda) = 0$ d'après (a) $_{\ell-1}$ et (b) $_{\ell-1}$. Donc $\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^{\sigma'} b_0 = 0$. L'autre implication se démontre de façon similaire.

Poursuivons par la démonstration de (b) $_\ell$. Soit b'_1 le vecteur de plus haut poids dans la composante connexe de $\Phi_{\{i, \sigma_1\}}(B(\lambda))$ contenant $b_1 := \tilde{f}^\sigma u_\lambda$. Alors il existe une suite τ dans I et une suite ρ dans $\{i, \sigma_1\}$ telles que $b'_1 = \tilde{f}^\tau u_\lambda$ et $b_1 = \tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_1$. On a $1 + |\rho| + |\tau| = |\sigma|$, donc $|\tau| < |\sigma| \leq \ell$. Posons $b'_2 = \tilde{f}^\tau b_0$. D'après (b) $_{\ell-1}$ nous avons $\varepsilon_j(b'_1) = \varepsilon_j(b'_2)$ pour tout $j \in I$. Ainsi b'_2 est le vecteur de plus haut poids de $\Phi_{\{i, \sigma_1\}}(B)$. Puisque b'_1 et b'_2 ont même poids, la composante connexe de $\Phi_{\{i, \sigma_1\}}(B(\lambda))$ contenant b'_1 est isomorphe à la composante connexe de $\Phi_{\{i, \sigma_1\}}(B)$ contenant b'_2 . Il s'ensuit que $\varepsilon_i(\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_1) = \varepsilon_i(\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_2)$. Or $\tilde{f}^{\sigma'} u_\lambda = \tilde{f}^\rho \tilde{f}^\tau u_\lambda$, d'où $\tilde{f}^{\sigma'} b_0 = \tilde{f}^\rho \tilde{f}^\tau b_0 = \tilde{f}^\rho b'_2$ par (c) $_{\ell-1}$. Par conséquent $\tilde{f}^\sigma b_0 = \tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_2$, puis $\varepsilon_i(\tilde{f}^\sigma u_\lambda) = \varepsilon_i(\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_1) = \varepsilon_i(\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_2) = \varepsilon_i(\tilde{f}^\sigma b_0)$.

Terminons par la démonstration de (c) $_\ell$. D'après (a) $_\ell$, nous pouvons supposer que $\tilde{f}^\sigma u_\lambda, \tilde{f}^\tau u_\lambda \in B(\lambda)$ et $\tilde{f}^\sigma b_0, \tilde{f}^\tau b_0 \in B$. Si $|\sigma|$ ou $|\tau|$ est nul,

l'assertion est trivialement vérifiée. Par exemple si $|\sigma| = 0$ et $|\tau| > 0$ alors l'égalité $b_0 = \tilde{f}^\tau b_0$ implique $\tilde{e}_{\tau_1} b_0 \neq 0$, ce qui est absurde.

Nous pouvons donc supposer que $|\sigma|$ et $|\tau|$ sont strictement positifs. Supposons vérifiée une des conditions de (c) $_\ell$. Alors $\varepsilon_{\tau_1}(\tilde{f}^\sigma u_\lambda) = \varepsilon_{\tau_1}(\tilde{f}^\sigma b_0) > 0$ par (b) $_\ell$. Soit b'_1 le vecteur de plus haut poids de la composante connexe de $\Phi_{\{\sigma_1, \tau_1\}}(B(\lambda))$ contenant $b_1 := \tilde{f}^\sigma u_\lambda$.



On peut alors écrire $b'_1 = \tilde{f}^\xi u_\lambda$ et $b_1 = \tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_1 = \tilde{f}_{\tau_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} b'_1$, où ρ et $\tilde{\rho}$ sont des suites dans $\{\sigma_1, \tau_1\}$. Ainsi les vecteurs $\tilde{f}^{\sigma'} u_\lambda$ et $\tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi u_\lambda$ sont égaux. Grâce à (c) $_{\ell-1}$, nous avons $\tilde{f}^{\sigma'} b_0 = \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi b_0$. Posons $b'_2 = \tilde{f}^\xi b_0$. Alors b'_2 est le vecteur de plus haut poids de la composante connexe de $\Phi_{\{\sigma_1, \tau_1\}}(B)$ contenant $b_2 := \tilde{f}^\sigma b_0$. Par le même argument que dans la démonstration de (b) $_\ell$, il découle de $\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_1 = \tilde{f}_{\tau_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} b'_1$ que $\tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^\rho b'_2 = \tilde{f}_{\tau_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} b'_2$. Par conséquent $\tilde{f}^\sigma b_0 = \tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^{\sigma'} b_0 = \tilde{f}_{\sigma_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi b_0 = \tilde{f}_{\tau_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi b_0$.

Donc nous avons $\tilde{f}^\sigma u_\lambda = \tilde{f}^\tau u_\lambda \iff \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi u_\lambda = \tilde{f}^{\tau'} u_\lambda \iff \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi b_0 = \tilde{f}^{\tau'} b_0 \iff \tilde{f}_{\tau_1} \tilde{f}^{\tilde{\rho}} \tilde{f}^\xi b_0 = \tilde{f}^\tau b_0 \iff \tilde{f}^\sigma b_0 = \tilde{f}^\tau b_0$. Ici, la seconde équivalence est une conséquence de (c) $_{\ell-1}$.

L'application définie par $\tilde{f}^\sigma u_\lambda \mapsto \tilde{f}^\sigma b_0$ nous fournit alors un plongement plein $B(\lambda) \hookrightarrow B$, d'image $B(b_0)$. Ainsi $B(b_0)$ est une composante connexe de B et est isomorphe à $B(\text{wt}(b_0))$ en tant que cristal. L'hypothèse (2) implique $B = \bigsqcup_{b_0 \in B^h} B(b_0)$. □

Proposition 9.3.2. — *Soit B un cristal normal. Alors pour tout $w \in W$, il existe une unique application $\tilde{e}_w^{\max} : B \rightarrow B$ telle que $\tilde{e}_w^{\max} = \tilde{e}_{i_1}^{\max} \dots \tilde{e}_{i_\ell}^{\max}$ pour toute décomposition réduite $s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ de w . Ici $\tilde{e}_i^{\max} b = \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b$.*

Démonstration. — D’après la proposition 3.4.4, il suffit de prouver que les opérateurs \tilde{e}_i^{\max} ($i \in I$) satisfont aux relations de tresse. Donc nous pouvons supposer que le rang de \mathfrak{g} est égal à 2 et que \mathfrak{g} est de dimension finie. Soit w_0 l’élément le plus long du groupe de Weyl. Il suffit de démontrer que $\tilde{e}_{i_1}^{\max} \dots \tilde{e}_{i_\ell}^{\max}$ ne dépend pas du choix de la décomposition réduite $s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ de w_0 . D’après le corollaire 9.1.4 (2), pour tout $b \in B$ l’élément $\tilde{e}_{i_1}^{\max} \dots \tilde{e}_{i_\ell}^{\max} b$ est le vecteur de plus haut poids de la composante connexe contenant b . Ainsi il ne dépend pas du choix de la décomposition réduite de w_0 . \square

Nous sommes maintenant prêts à démontrer la proposition 4.2.2.

Démonstration de la proposition 4.2.2. — Soit B un cristal normal. Supposons vérifiée la condition (2) de la proposition 4.2.2 et démontrons (1). On peut supposer $J = I$. Soit w_0 l’élément le plus long de W . Alors pour tout $i \in I$ les opérateurs $\tilde{e}_{w_0}^{\max}$ et $\tilde{e}_i^{\max} \tilde{e}_{s_i w_0}^{\max}$ sont égaux. Donc $\varepsilon_i(\tilde{e}_{w_0}^{\max} b)$ est nul pour tout $b \in B$. Ainsi la condition (2) du théorème 9.3.1 est satisfaite, d’où le résultat escompté d’après le théorème 9.3.1. \square

9.4. Action du groupe de Weyl sur les cristaux normaux

Soit B un cristal semi-normal. Pour $i \in I$, définissons un automorphisme S_i de l’ensemble B par

$$(9.4.1) \quad S_i b = \begin{cases} \tilde{f}_i^{\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0, \\ \tilde{e}_i^{-\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle} b & \text{si } \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi l’élément $S_i b$ est le symétrique de b par rapport au milieu de la i -chaîne contenant b . Les automorphismes S_i sont tels que $S_i^2 = \text{id}$ et

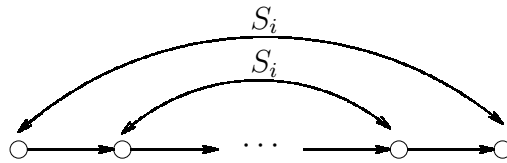


FIGURE 9.1. Action du groupe de Weyl

$\text{wt}(S_i b) = s_i(\text{wt}(b))$. De plus, ils satisfont à $S_i \tilde{e}_i S_i^{-1} = \tilde{f}_i$.

Rappelons que $\tilde{e}_i^{\max} b = \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b$ et $\tilde{f}_i^{\max} b = \tilde{f}_i^{\varphi_i(b)} b$.

Théorème 9.4.1. — *Si B est un cristal normal, alors il existe une seule action $S: W \rightarrow \text{Aut}(B)$ de W sur l'ensemble B telle que $S_{s_i} = S_i$ pour tout $i \in I$ (c'est-à-dire prolongeant l'action des S_i). En outre, les S_w vérifient $\text{wt}(S_w b) = w(\text{wt}(b))$ pour tous $w \in W$ et $b \in B$.*

Démonstration. — Pour prouver que les S_i engendrent une action du groupe de Weyl, il faut vérifier qu'ils satisfont aux relations de tresse pour \mathfrak{g} de dimension finie de rang 2, c'est-à-dire

$$(9.4.2) \quad S_{i_1} \cdots S_{i_\ell}(b) \text{ est indépendant du choix de } (i_1, \dots, i_\ell) \in R(w_0),$$

où w_0 est l'élément le plus long de W et $R(w_0)$ est l'ensemble des décompositions réduites de w_0 .

Si b vérifie (9.4.2), alors $S_i b$ vérifie (9.4.2). On se ramène ainsi à $\text{wt}(b)$ dominant.

D'après un résultat similaire à celui de la proposition 9.3.2, on a

$$(9.4.3) \quad \tilde{f}_{i_1}^{\max} \cdots \tilde{f}_{i_\ell}^{\max}(b) \text{ est indépendant du choix de } (i_1, \dots, i_\ell) \in R(w_0).$$

Remarquons que (voir l'exercice 9.1)

$$(9.4.4) \quad \tilde{f}_i^{\max}(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i^{\varphi_i(b_1) - \varepsilon_i(b_2)} b_1 \otimes \tilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

Le lemme suivant nous permettra de conclure.

Lemme 9.4.2. — *Soit b un vecteur tel que $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0$. Alors pour tout cristal semi-normal B' et pour tout $b' \in B'$, il existe un entier m et un vecteur $b'' \in B^{\otimes m} \otimes B'$ tels que pour tout $n \geq m$ nous ayons*

$$\tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes n} \otimes b') = (S_i b)^{\otimes(n-m)} \otimes b''.$$

Démonstration. — Pour tout $n \geq 1$, l'entier $\varepsilon_i(b^{\otimes n} \otimes b')$ est par définition égal à

$$\begin{aligned} & \max\left(\{\varepsilon_i(b) - k\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle; 0 \leq k < n\} \cup \{\varepsilon_i(b') - n\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle\}\right) \\ & = \max(\varepsilon_i(b), \varepsilon_i(b') - n\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle). \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle > 0$. Prenons m tel que $\varepsilon_i(b') - m\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \leq \varepsilon_i(b)$. Alors $\varepsilon_i(b^{\otimes(n-1)} \otimes b') = \varepsilon_i(b)$ pour tout $n > m$ et

$\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b^{\otimes(n-1)} \otimes b') = \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle \geq 0$. À l'aide de la formule (9.4.4), on en déduit

$$\tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes n} \otimes b') = \tilde{f}_i^{\max}(b \otimes (b^{\otimes(n-1)} \otimes b')) = S_i(b) \otimes \tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes(n-1)} \otimes b').$$

En répétant le processus, nous obtenons $\tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes n} \otimes b') = (S_i b)^{\otimes(n-m)} \otimes \tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes m} \otimes b')$.

Supposons ensuite que $\langle h_i, \text{wt}(b) \rangle = 0$. Dans ce cas, on a $S_i b = b$. On a $\varphi_i(b^{\otimes(n-1)}) = \varepsilon_i(b^{\otimes(n-1)}) = \varepsilon_i(b) \leq \varepsilon_i(b \otimes b')$ pour tout $n \geq 2$. La formule (9.4.4) implique alors $\tilde{f}_i^{\max}(b^{\otimes n} \otimes b') = b^{\otimes(n-1)} \otimes \tilde{f}_i^{\max}(b \otimes b')$. \square

Nous allons démontrer qu'il existe $m_k \in \mathbb{N}$ et $b_k \in B^{\otimes m_k}$ tels que

$$(9.4.5) \quad \tilde{f}_{i_k}^{\max} \dots \tilde{f}_{i_\ell}^{\max}(b^{\otimes n}) = (S_{i_k} \dots S_{i_\ell} b)^{\otimes(n-m_k)} \otimes b_k \quad \text{pour } n \geq m_k.$$

par récurrence descendante sur k . Supposons (9.4.5) vérifiée pour $k+1$. Puisque le poids $\text{wt}(b)$ est dominant, on a $\langle h_{i_k}, \text{wt}(S_{i_{k+1}} \dots S_{i_\ell} b) \rangle \geq 0$. Alors d'après le lemme précédent il existe un entier m et un vecteur $b_k \in B^{\otimes(m+m_{k+1})}$ tels que

$$\tilde{f}_{i_k}^{\max}((S_{i_{k+1}} \dots S_{i_\ell} b)^{\otimes n} \otimes b_{k+1}) = (S_{i_k} \dots S_{i_\ell} b)^{\otimes(n-m)} \otimes b_k.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i_k}^{\max} \dots \tilde{f}_{i_\ell}^{\max}(b^{\otimes n}) &= \tilde{f}_{i_k}^{\max}((S_{i_{k+1}} \dots S_{i_\ell} b)^{\otimes(n-m_{k+1})} \otimes b_{k+1}) \\ &= (S_{i_k} \dots S_{i_\ell} b)^{\otimes(n-m-m_{k+1})} \otimes b_k \end{aligned}$$

pour $n \geq m + m_{k+1}$, ce qui démontre (9.4.5).

Par conséquent $\tilde{f}_{i_1}^{\max} \dots \tilde{f}_{i_\ell}^{\max}(b^{\otimes n}) = (S_{i_1} \dots S_{i_\ell} b) \otimes b'$ pour un $b' \in B^{\otimes(n-1)}$ lorsque n est assez grand. L'assertion (9.4.3) achève la démonstration du théorème 9.4.1. \square

Remarque 9.4.3. — Même si $w\alpha_i = \alpha_j$ pour $w \in W$ et $i, j \in I$, les opérateurs $S_w \circ \tilde{e}_i \circ S_w^{-1}$ et \tilde{e}_j ne sont pas égaux en général. Considérez par exemple pour le cristal $B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$ les opérateurs $S_w \circ \tilde{e}_1 \circ S_w^{-1}$ et \tilde{e}_2 avec $w = (1, 2, 3) = s_1 \cdot s_2$.

Exercice 9.1. — Soient B_1 et B_2 deux cristaux semi-normaux. Démon-
trez que

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i^{\max}(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i^{\max} b_1 \otimes \tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b_2) - \varphi_i(b_1)} b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \\ \tilde{e}_i^{\max} b_1 \otimes b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \\ \tilde{f}_i^{\max}(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i^{\varphi_i(b_1) - \varepsilon_i(b_2)} b_1 \otimes \tilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{si } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \end{aligned}$$

pour tous $b_k \in B_k$ ($k = 1, 2$).

Exercice 9.2. — Démontrez la remarque 9.1.7. (Indication : utilisez la
proposition 9.1.3 (2).)

Exercice 9.3. — Soient $\lambda \in P_+$ et $s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ une décomposition réduite
d'un élément w du groupe de Weyl W . Pour $b \in B_w(\lambda)$, notons

$$a_k(b) = \varepsilon_{i_k}(\tilde{e}_{i_{k-1}}^{\max} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{\max} b) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq \ell,$$

de sorte que l'on ait $b = \tilde{f}_{i_1}^{a_1(b)} \cdots \tilde{f}_{i_\ell}^{a_\ell(b)} u_\lambda$.

Démontrez que $\{f_{i_1}^{(a_1(b))} \cdots f_{i_\ell}^{(a_\ell(b))} u_\lambda; b \in B_w(\lambda)\}$ est une base de l'es-
pace vectoriel $U_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda}$.

(Indication : utilisez les propositions 6.2.3 et 9.1.5.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BENKART, S.-J. KANG & M. KASHIWARA , « Crystal bases for the quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{gl}(m, n))$ », *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 2, p. 295–331.
- [2] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Hermann, Paris, 1968.
- [3] M. DEMAZURE , « Désingularisation des variétés de Schubert généralisées », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 53–88, Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I.
- [4] V. G. DRINFEL'D , « Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **283** (1985), no. 5, p. 1060–1064.
- [5] W. FULTON – *Young tableaux, With applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] J. E. HUMPHREYS – *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] J. C. JANTZEN – *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics **6**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [8] M. JIMBO , « A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation », *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), no. 1, p. 63–69.

- [9] A. JOSEPH – *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **29**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [10] V. G. KAC – *Infinite-dimensional Lie algebras*, third éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] M. KASHIWARA , « Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras », *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), no. 2, p. 249–260.
- [12] ———, « Bases cristallines », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), no. 6, p. 277–280.
- [13] ———, « On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras », *Duke Math. J.* **63** (1991), no. 2, p. 465–516.
- [14] ———, « Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)* (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 791–797.
- [15] ———, « The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 3, p. 839–858.
- [16] ———, « Global crystal bases of quantum groups », *Duke Math. J.* **69** (1993), no. 2, p. 455–485.
- [17] ———, « Crystal bases of modified quantized enveloping algebra », *Duke Math. J.* **73** (1994), no. 2, p. 383–413.
- [18] ———, « On crystal bases », *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 155–197.
- [19] M. KASHIWARA & T. NAKASHIMA – « Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras », *J. Algebra* **165** (1994), no. 2, p. 295–345.
- [20] S.-J. KANG, M. KASHIWARA, K. C. MISRA, T. MIWA, T. NAKASHIMA & A. NAKAYASHIKI – « Affine crystals and vertex models », *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992, p. 449–484.
- [21] P. LITTELMANN , « A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras », *Invent. Math.* **116** (1994), no. 1-3, p. 329–346.
- [22] ———, « Paths and root operators in representation theory », *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 3, p. 499–525.

- [23] ———, « Crystal graphs and Young tableaux », *J. Algebra* **175** (1995), no. 1, p. 65–87.
- [24] G. LUSZTIG , « Canonical bases arising from quantized enveloping algebras », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 2, p. 447–498.
- [25] ———, « Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. II », *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* (1990), no. 102, p. 175–201 (1991), Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990).
- [26] ——— – *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics **110**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [27] T. NAKASHIMA , « Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras », *Comm. Math. Phys.* **154** (1993), no. 2, p. 215–243.
- [28] ———, « Polyhedral realizations of crystal bases for integrable highest weight modules », *J. Algebra* **219** (1999), no. 2, p. 571–597.
- [29] T. NAKASHIMA & A. ZELEVINSKY , « Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras », *Adv. Math.* **131** (1997), no. 1, p. 253–278.
- [30] C. M. RINGEL – « Hall algebras », Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), PWN, Warsaw, 1990, p. 433–447.
- [31] N. XI , « Canonical basis for type A_3 », *Comm. Algebra* **27** (1999), no. 11, p. 5703–5710.

INDEX DES NOTATIONS

$(L(\infty), B(\infty))$, 92	L , 17, 79
$(L(\lambda), B(\lambda))$, 55	$L(\infty)$, 92
(L, B) , 17, 53	$L(\lambda)$, 55
(\cdot, \cdot) , 31	L_∞ , 79
$-$, 47	M , 8
A , 17	$M(\lambda)$, 39, 40
B , 17, 24	$M(a)$, 8
$B(-\lambda)$, 59	M^h , 20
$B(\infty)$, 91	M_+ , 11
$B(\lambda)$, 55	M_- , 11
$B(\lambda)_\mathbb{Q}$, 103	$M_\mathbb{Z}$, 82
$B(n)$, 23	M_λ , 43
B^\vee , 58	M_n , 12
B^h , 20, 55, 125	P , 31
B_i , 59	P_+ , 38
$B_w(\infty)$, 121	$P_\mathbb{R}$, 106
$B_w(\lambda)$, 120	Q , 31
C , 59	Q_\pm , 31
$D(M)$, 47	$R(B_1, B_2)$, 60
$D^2(M)$, 48	$R(w)$, 45
D_i , 122	S , 47, 128
E , 79	S_i , 127
$E_{\ell, m}^p$, 14	S_m , 102
G , 81	S_w , 128
G_λ , 82	$S_{\lambda, \mu}$, 93
$H_i(\pi)$, 106	T^\pm , 47
H_{n_i} , 47	T_λ , 59
I , 31	$U(\mathfrak{g})$, 38
K , 1	$U(\mathfrak{sl}_2)$, 1
K_m , 112	$U^+(\mathfrak{g})$, 38

- $U^-(\mathfrak{g})$, 38
 $U_q(\mathfrak{g})$, 31
 $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$, 40
 $U_q(\mathfrak{g})_{\xi}$, 33
 $U_q(\mathfrak{g})_i$, 32
 $U_q^+(\mathfrak{g})$, 33
 $U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$, 40
 $U_q^-(\mathfrak{g})$, 33
 $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$, 40
 $U_q^0(\mathfrak{g})$, 33
 $U_q^0(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$, 40
 $U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$, 32
 V , 17
 $V(-\lambda)$, 50, 59
 $V(\lambda)$, 39
 $V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$, 41, 82
 $V_{\mathbb{Z}}$, 79
 V_{ℓ} , 12
 V_{ℓ}^{\pm} , 10
 $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$, 38
 W , 45
 $Y(\lambda)$, 66
 $[n]!$, 4
 $[n]!_i$, 32
 $[n]$, 4
 $[n]_i$, 32
 \mathcal{D}_i , 122
 Δ , 2, 34, 38
 Δ_+ , 3, 38, 49
 Δ_- , 2, 38, 49
 Δ_0 , 3
 Λ_i , 63
 $\Phi_J(B)$, 58
 Ψ , 96
 Ψ^n , 96
 Ψ_{λ} , 92
 Ψ_{i_0} , 95
 Θ_{λ} , 94
 α_i , 31
 α_i^{\vee} , 31
 \mathcal{O}_{int} , 44
 ch , 123
 χ , 12, 38
 $\ell(w)$, 45
 ε , 4, 22, 37
 ε_i , 54, 56
 ϵ_i , 63
 \boxed{i} , 65
 \mathfrak{g} , 37
 \mathfrak{g}_J , 58
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 31
 \mathcal{C} , 60
 \mathcal{P} , 96
 \mathcal{P}_L , 106
 $\mathcal{P}_L^{(i)}$, 110
 $\mathfrak{sl}_2(K)$, 1
 \mathfrak{t} , 37
 μ_{a_i} , 47
 $\overline{B}_{w\lambda}(\lambda)$, 119
 $\overline{B}_w(\infty)$, 122
 $\overline{u_{\lambda}}$, 42
 ϕ , 47
 π_{λ} , 109
 ψ , 47
 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, 4
 $\begin{Bmatrix} x \\ k \end{Bmatrix}$, 6
 ρ , 38
 \tilde{e} , 19, 24
 \tilde{e}_w^{max} , 126
 \tilde{e}_i , 53, 56
 \tilde{e}_i^{max} , 84, 120
 \tilde{f} , 19, 24
 \tilde{f}_i , 53, 56
 \tilde{f}_i^{max} , 84, 120
 \tilde{P}_+ , 63
 φ , 22
 φ_i , 54, 56
 wt , 21, 54, 56
 $wt(M)$, 47
 $\{x\}$, 6
 b^{\vee} , 58
 b_i , 59
 $b_i(n)$, 59
 $e^{(n)}$, 5
 e_i , 32
 $e_i^{(n)}$, 32

$f^{(n)}$, 5
 f_i , 32
 $f_i^{(n)}$, 32
 g , 41, 49
 p_μ , 93
 $p_{\lambda,\mu}$, 93
 $q(h)$, 32
 q^h , 32

s_i , 45
 t , 2
 t_λ , 59
 u_λ , 38
 u_λ^M , 39
 $u_k^{(\ell)\pm}$, 10
 $u_k^{(\ell)}$, 12
 $u_{-\lambda}$, 50

INDEX TERMINOLOGIQUE

- admissible, 70
 - (lecture), 74
- algèbre
 - de Hopf, 4, 37
 - de Kac-Moody, 37
 - symétrisable, 37
 - enveloppante, 1
 - quantique, 2, 31
- antipode, 47
- arabe (lecture), 74
- autodual (module), 48
- base
 - canonique, 87
 - cristalline, 18, 53
 - globale
 - d'un espace vectoriel, 81
 - d'un module, 82
 - locale, 17
- bidual, 48
- binôme q -analogue, 5
- Bruhat (ordre de), 46
- coefficients de Racah, 14
- canonique (base), 87
- caractère, 12, 38
 - (formule de Demazure du), 122
 - (formule du), 38
- Cartan (matrice de), 32
- chaîne, 22
 - (longueur d'une), 22
- chemin, 106
 - (concaténation), 106
 - de Lakshmibai-Seshadri, 115
 - inverse, 106
- Clebsch-Gordan (théorème de), 13
- co-gèbre, 4, 37
- co-produit, 2, 34
- co-racine, 31
- co-unité, 4, 37
- colonne (procédure d'insertion par), 77
- concaténation de chemins, 106
- Coxeter (groupe de), 46
- cristal, 24, 56
 - (morphisme de), 24, 57
 - (produit tensoriel), 24
 - normal, 58
 - semi-normal, 58
- cristallin (graphe), 54
- cristalline (base), 18, 53
- décomposition réduite, 45
- Demazure
 - (formule de), 122
 - (module de), 121
- diagramme de Young, 66
 - gauche, 72
- dominant (poids), 38
- Drinfeld, vii
- dual (d'un module), 48
- Dynkin (diagramme de), 63
- équilibré (triplet), 81
- équivalence de Knuth, 74

- espace
 - de poids, 12, 43
 - propre généralisé, 8
- e -strict (morphisme), 57
- fondamental (poids), 63
- formule du caractère
 - de Demazure, 122
 - de Weyl-Kac, 38
- f -strict (morphisme), 57
- Gabber-Kac (théorème de), 38
- gauche
 - (diagramme de Young), 72
 - (tableau de Young), 73
- gonflage d'un cristal, 102
- graphe cristallin, 54
- groupe
 - de Coxeter, 46
 - de Weyl, 45
- Hopf (algèbre de), 4
- i -chaîne, 54
- i -flèche, 54
- insertion
 - par colonne (procédure de), 77
 - par ligne (procédure d'), 76
- intégrable (module), 12, 43
- inverse (d'un chemin), 106
- japonaise (lecture), 74
- Jimbo, vii
- Kac (théorème de), 38
- Kac-Moody (algèbre de), 37
- Knuth (équivalence de), 74
- Lakshmibai-Seshadri
 - (chemins de), 115
- lecture, 74
 - admissible, 74
 - arabe, 74
 - japonaise, 74
- ligne (procédure d'insertion par), 76
- Littelman (réalisation de), 109
- Littlewood-Richardson
 - (règle de), 70–72
- longueur d'une chaîne, 22
- matrice de Cartan, 32
 - symétrisable, 32
- module
 - autodual, 48
 - de Demazure, 121
 - de plus bas poids, 50
 - de plus haut poids, 39
 - de Verma, 39
 - dual, 48
 - intégrable, 12, 43
 - semi-simple, 2
 - simple, 9
- morphisme
 - e -strict, 57
 - f -strict, 57
 - de cristaux, 24, 57
 - plein, 57
 - plongement, 57
 - strict, 57
- normal (cristal), 58
- partie positive, négative
 - (d'une algèbre enveloppante), 33
- plein (morphisme), 57
- plongement (morphisme), 57
- plus bas poids
 - (module de), 50
 - (vecteur de), 50
- plus haut poids
 - (module de), 39
 - (vecteur de), 8, 39, 55
- poids
 - (application), 24
 - (espace de), 12, 43
 - (module de plus bas), 50
 - (module de plus haut), 39
 - (treillis des), 31
 - (vecteur de plus bas), 50
 - (vecteur de plus haut), 8, 39, 55
 - d'un chemin, 106
 - d'un module, 47
 - d'un vecteur, 21, 54
 - dominant, 38
 - fondamental, 63
- Poincaré-Birkhoff-Witt
 - (théorème de), 7
- procédure d'insertion
 - par colonne, 77
 - par ligne, 76

- produit tensoriel (de cristaux), 24
- puissance divisée, 5
- q -coefficient binomial, 4
- q -entier, 4
- q -factorielle, 4
- réalisation de Littelmann, 109
- réduite (décomposition), 45
- règle de Littlewood-Richardson, 70–72
- racines, 31
 - (système des), 38
 - (treillis des), 31
- relations
 - de Serre, 32
 - de tresse, 46
- représentation vectorielle, 64
- semi-normal (cristal), 58
- semi-simple
 - (catégorie), 44
 - (module), 2
- semi-standard
 - (tableau de Young gauche), 73
 - (tableau de Young), 68
- Serre (relations de), 32
- simple (module), 9
- \mathfrak{sl}_2 -triplet, 32
- sous-cristal, 57
- spectre, 8
- strict (morphisme), 57
- symétrisable
 - (algèbre de Kac-Moody), 37
 - (matrice de Cartan), 32
- symboles 6-j, 14
- système des racines, 38
- tableau de Young, 66
 - gauche, 73
 - semi-standard, 73
 - semi-standard, 68
- théorème
 - de Clebsch-Gordan, 13
 - de Gabber-Kac, 38
 - de Kac, 38
 - de Poincaré-Birkhoff-Witt, 7
- treillis
 - des poids, 31
 - des racines, 31
- tresse (relations de), 46
- triplet
 - (sur \mathfrak{sl}_2), 32
 - équilibré, 81
- vecteur
 - de plus bas poids, 50
 - de plus haut poids, 8, 39, 55
- vectorielle (représentation), 64
- Verma (module de), 39
- Weyl (groupe de), 45
- Weyl-Kac (formule du caractère), 38
- Yang-Baxter (équation de), 61
- Young
 - (diagramme de), 66
 - gauche, 72
 - (tableau de), 66
 - gauche, 73