タイトル: 結び目の普遍 sl_2 不変量の整数性

講演者: 葉廣和夫

所属: 京大・数理研

アブストラクト:

3 次元球面内の結び目の普遍 sl_2 不変量の値に関するある整数性について述べる.

結び目 L の普遍 sl_2 不変量 $a(L)$ は, (位相的) Hopf 代数 $U_h = U_h(sl_2)$ （$\mathbf{Q}[[h]]$ 上の代数）の元として, R. Lawrence により定義された不変量である. おおざっぱにいうと $a(L)$ は, L のダイアグラムの各交差点に U_h の普遍 R 行列 $R \in U_h \hat{\otimes} U_h$ またはその逆元 R^{-1} をおき, 結び目に沿って置かれた元を読んでいくことにより定義される. このことから, $a(L)$ は, $R^{\pm 1} \otimes \cdots \otimes R^{\pm 1} \in U_h^{\otimes 2p}$ ($R^{\pm 1}$ は p 個, p は D の交差点の数) の成分たちにある置換を施したのちに掛け合わせて得られる U_h の元と大体等しい. $U_h(sl_2)$ の任意の「有限次元既約表現」 V に対応する不変量 (colored Jones 多項式) は, $a(L)$ を $End(V)$ の元と見て量子トレースをとることにより得られる.

$a(L)$ の定義から, $a(L)$ を定義するのに U_h が全部必要であるわけではないことがわかる. $a(L)$ を定義することができる U_h の部分代数のうちでなるべく小さいものがわかれば, $a(L)$ に関する情報がより多く得られるということになる.

普遍 R 行列を $R = e^{\frac{h}{4} H \otimes H} \Theta$ と分けると, Θ は Lusztig の $\mathbf{Z}[v, v^{-1}]$- 形式 $U^{\mathbf{Z}}$ のテンソル積 $U^{\mathbf{Z}} \otimes U^{\mathbf{Z}}$ の元のある無限和であることが知られている. $U^{\mathbf{Z}}$ の ある $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ ($q = v^2$) 上の部分代数 W で $U^{\mathbf{Z}}$ より真に小さいが, R が $W \otimes W$ の元のある無限和であるようなものを定義することができる.

このことから $a(L)$ は W のある完備化 $\hat{W}$ の元として定義することができることがわかる. $\hat{W}$ は, U_h の部分代数とみなすことができる. $a(L)$ は $\hat{W}$ の中心に属することがわかり, それを使うとつぎの結果を得ることができる.

定理 1　$a(L)$ はつぎのかたちに一意的に書くことができる.

$$a(L) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(L) \sigma_n,$$

ここで, $a_n(L) \in \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ ($n \geqq 0$) であり, W の中心の元 σ_n は,

$$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} (c^2 - (v^i + v^{-i})^2), \quad c = (v - v^{-1})^2 FE + vK + v^{-1} K^{-1}$$

により定義される.

定理 1 の帰結としてわかることは、与えられた結び目の sl_2 の種々の既約表現に対応する colored Jones 多項式たちが、決して独立ではなく、密接に関連していることである。