

1 この談話会では、19世紀中頃から20世紀中頃にかけて、J.Liouville, E.Picard, R.Nevanlinna, L.Ahlfors といった人々によって研究された一変数有理型関数の値分布論の高次元化に関する話題をお話したい。よく知られているように複素平面 \mathbb{C} 上で有界な解析関数は定数関数に限られる (Liouville の定理)。この定理をさらに精密にすると「 \mathbb{C} 上の定数関数でない有理型関数 f は、高々2つの値を除いて他のすべての値 α に対し、方程式 $f(z) = \alpha$ は無限個の解を持つ」という Picard の定理になる。この定理で ‘無限個’ という部分をさらに定量化する独創的な理論を Nevanlinna はつくり、いわゆる第一主要定理、第二主要定理という二つの定理でそれまでの値分布論の結果をまとめた。

2 Nevanlinna の理論は非コンパクト、超越的な交差理論とみて高次元化を考えることができる。すなわち、 \mathbb{C} から滑らかな射影代数多様体 X への正則写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ の像 $f(\mathbb{C})$ と、 X の有効因子 D との交わり $f(\mathbb{C}) \cap D$ を考えるのである。このとき、ただ素朴に交わりを考えただけでは $f(\mathbb{C})$ が非コンパクトであるため、きれいな交差理論とはならない。そこで f が無限に D に接近する、という量を考えることで一種のコンパクト化を行ない、なおかつ $f(\mathbb{C}) \cap D$ の重複度を込めて考えれば、きれいな交差理論 (交点数の和 = コホモロジカルな量) ができる。これが P.Griffiths らによって確立された第一主要定理の高次元化である。

ところで Nevanlinna 理論においては第二主要定理がしばしば深い内容を持つ。それは第一主要定理で敢えてコンパクト化を行わず、また $f(\mathbb{C}) \cap D$ の重複度も考慮しなければ「交点数の和 = コホモロジカルな量」という等式はどのくらい壊れ得るのか? という問題である。それが漸近的にはだいたい正則写像 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ の”変形空間の次元(?)”のようなもので壊れ得る限界を抑えられるだろう、というのが次の予想である。

予想 1

X, D, f は上の通りとして、 L を X の豊富な直線束とする。このとき、すべての正数 $\epsilon > 0$ に対して (f には依存しない) X の真代数的部分集合 $V(\epsilon, L) \subsetneq X$ が存在して、次のいずれかが成り立つ。

1. $f(\mathbb{C}) \subset V(\epsilon, L)$
2. $T_{f,D}(r) + T_{f,K_X}(r) \leq N_{f,D}^{(1)}(r) + \epsilon T_{f,L}(r) //$

この予想は現在のところ一般には未解決であるが、 X が代数曲線の場合には Nevanlinna, Ahlfors の定理であり、上記の Picard の定理を導く。(予想1で X の標準因子 K_X が登場することと Picard の定理で2という数字が出てくることが関係している。 $K_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(-2)$!)

3 講演では、代数的な交差理論との関係を意識しつつ Nevanlinna 理論の説明をし、予想1と複素双曲多様体論との関係、予想1の現状、 X が Abel 多様体の場合の話、及び関連する話題などを Nevanlinna 理論の予備知識は仮定せずに、お話する予定である。