

まえがき 次の形の線型常微分方程式を考える：

$$(0.1) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x, \varepsilon) \vec{y},$$

- 1) σ は正の整数；
- 2) x は複素変数， ε は複素パラメーター；
- 3) \vec{y} は n 次の列ベクトル；
- 4) $A(x, \varepsilon)$ は n 次元正方行列で，領域

$$(0.2) \quad (x, \varepsilon) \in \{x : |x| < a_0\} \times \{\varepsilon : \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+, 0 < |\varepsilon| < b_0\}$$

において (x, ε) の函数として正則かつ有界；

- 5) 領域 (0.2) のなかから $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき， x に関して一様に ε のべき級数

$$(0.3) \quad A(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A^{(k)}(x)$$

に漸近展開できる。 $A^{(k)}(x)$ は $|x| < a_0$ において正則有界な n 次の正方行列。

$x=0$ が (0.1) の 変り点でない とは，福原の方法にしたがつて， $x=0$ において正則な函数を係数にもつ ε のあるべき根の多項式を要素とする行列を適当にとつて (0.1) に 1 次変換を行い行列 $A^{(0)}(x), A^{(1)}(x), \dots, A^{(\sigma)}(x)$ を対角型になおせる場合をいう。したがつて， $x=0$ が (0.1) の 変り点である とは，福原の Reduction が途中で都合が悪くなる場合である。それらの条件を $A^{(k)}(x)$ ($k=0, 1, \dots, \sigma$) の要素を用いて具体的に書き表わすことはむづかしいが，(行列の固有値が正確に計算できれば) 福原の方法によつて有限回の操作で $x=0$ が変り点であるかないかは判定できる。

上に述べた変換の行列は $x=0$ において正則としたが，極をもつことを許せば， $A^{(0)}(x), \dots, A^{(\sigma)}(x)$ を対角型になおすことはいつでもできる。(ただし，変換された方程式における σ はもとのものとは一般に異なる。) ε の分数べきは現われないうして，変換された方程式を次の形に書く：

$$\varepsilon^\sigma \frac{dz_j}{dx} = \lambda_j(x, \varepsilon) z_j + \varepsilon^\sigma \sum_{k=1}^n b_{jk}(x, \varepsilon) z_k,$$

$$\lambda_j(x, \varepsilon) = \lambda_j^{(\sigma-\sigma_j)}(x) \varepsilon^{\sigma-\sigma_j} + \dots + \lambda_j^{(\sigma)}(x) \varepsilon^\sigma.$$

$$b_{jk}(x, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \max \{\sigma_j\} = \sigma_0$$

結果的にいえば、 $x=0$ が変り点でなければ次の二つの条件が満足されている：

1) $\sigma_j \geq 1$ ならば $\lambda_j^{(\sigma-\sigma_j)}(0) \neq 0$;

2) $\lambda_j(x, \varepsilon) - \lambda_k(x, \varepsilon) \equiv \lambda_{jk}^{(\sigma-\sigma_{jk})}(x) \varepsilon^{\sigma-\sigma_{jk}} + \dots + \lambda_{jk}^{(\sigma)}(x) \varepsilon^\sigma$

とおくとき、

$$\sigma_{jk} \geq 1 \text{ ならば } \lambda_{jk}^{(\sigma-\sigma_{jk})}(0) \neq 0.$$

このとき、次の性質をもつた基本解をつくることのできる(福原の結果)：

$$\Phi(x, \varepsilon) = (\vec{\phi}_1(x, \varepsilon), \vec{\phi}_2(x, \varepsilon), \dots, \vec{\phi}_n(x, \varepsilon)),$$

$$\vec{\phi}_k(x, \varepsilon) \text{ は } |x| < a'_0, \quad \theta'_- < \arg \varepsilon < \theta'_+, \quad 0 < |\varepsilon| < b'_0$$

において (x, ε) の函数として正則有界かつ $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 x に関し一様に

$$\vec{\phi}_k(x, \varepsilon) \exp \{-A_k(x, \varepsilon)\} \sim \sum_{l=0}^{\infty} p_{k,l}(x) \varepsilon^l,$$

$$A_k(x, \varepsilon) = \int^x \lambda_k(x, \varepsilon) \varepsilon^{-\sigma} dx,$$

なる形に漸近展開される。 $\vec{p}_{k,l}(x)$ は $|x| < a'_0$ において正則有界な列ベクトル。

$x=0$ が変り点の場合には、解の漸近展開式が $|x| < a'_0$ (a'_0 は ε に無関係) なる x に関して一様に成り立つような解をつくることはできない。例えば、微分方程式

$$(0.4) \quad \varepsilon \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

の $x=0$ は変り点である。解の行動は、 x が二つの不等式

$$(0.5) \quad |x| \leq 2M |\varepsilon|^{\frac{2}{3}} \quad (M > 0; \text{十分大})$$

$$(0.6) \quad M |\varepsilon|^{\frac{2}{3}} < |x|$$

のどちらを満足するかによつて全く異なる。

実際、(0.5) においては

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vec{z}, \quad \varepsilon^{-\frac{2}{3}} x = \xi$$

とおくと、(0.4) と (0.5) とはそれぞれ

$$\frac{d\vec{z}}{d\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \vec{z}, \quad |\xi| \leq 2M$$

に帰着される。この方程式の解は ξ の収束べき級数で表現される。

(0.6) においては、

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \vec{z}, \quad \varepsilon x^{-\frac{3}{2}} = \eta$$

とおけば、(0.4) と (0.6) とはそれぞれ

$$\eta^2 \frac{d\vec{z}}{d\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\eta \end{pmatrix} \vec{z}, \quad |\eta| < M^{-\frac{3}{2}}$$

に帰着される。 $\eta=0$ は不確定特異点で、しかも右辺の係数のつくる行列の固有値は $\eta=0$ において互に異なる。ゆえに、この方程式は、

$$\vec{z}_1(\eta) \sim e^{\frac{2i}{3\eta}} \eta^{\frac{1}{6}} \{ \dots \}, \quad \left| \arg \eta + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{3}{2} \pi, \quad \eta \rightarrow 0;$$

$$\vec{z}_2(\eta) \sim e^{-\frac{2i}{3\eta}} \eta^{\frac{1}{6}} \{ \dots \}, \quad \left| \arg \eta - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{3}{2} \pi, \quad \eta \rightarrow 0$$

なる形に漸近展開可能な二組の1次独立な解をもつ。

“(0.4)の解 $\vec{y}(x, \varepsilon)$ の行動は、 x が(0.5)に属するか(0.6)に属するかによつて、全く違つてくる。ことがわかる。

よつて、 $x=0$ をvariety pointにもつ(0.1)の解の漸近的行動を完全に知るためには、次の三つの問題を解かねばならない。

1) 領域の分割: (x, ε) -空間の領域

$$(x, \varepsilon) \in \{x: |x| < a_0\} \times \{\varepsilon: \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+, 0 < |\varepsilon| < b_0\}$$

を有限個の部分領域に分けて、各部分領域のなかから ε が0に近づくとき、解の漸近的行動が全く異なるようにする。

2) 漸近展開式: これらの各部分領域において有効な基本解の漸近展開式をつくる。

3) 解の接続: 2) で得られた異なる二組の基本解の間の関係、すなわち接続公式を求める。

ここでは1)と2)の二つの問題の解き方を説明する。R. E. Langer および彼の弟子たちは、variety pointをもつ特別な形の2階、3階、4階の線型微分方程式に対して、これら三つの問題を解いた。最近、渋谷、大久保の両氏によつて彼等の結果がやや拡張された。

さて、 n 階の単独線型常微分方程式

$$\varepsilon^m y^{(n)} + a_1(x, \varepsilon) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x, \varepsilon) y = 0$$

は、 σ (一般には有理数) を適当にとり、

$$y_1 = y, y_2 = \varepsilon^\sigma y', \dots, y_n = \varepsilon^{(n-1)\sigma} y^{(n-1)}$$

とおけば、(0.1)の形に帰着される。このとき行列 $A(x, \varepsilon)$ は

$$(0.7) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ * & * & \dots & * & * \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} * \text{は恒等的には0でない} \\ \text{函数を示す。} \end{array} \right)$$

なる形をもつ。これをもう少し一般にして、まず行列 $A(x, \varepsilon)$ が次の条件を満足する場合を考える。

仮定 A. $A(x, \varepsilon)$ は block 三角型である:

$$A(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots & A_{s-1, s-1} & 0 \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s.$$

$A_{\eta\kappa}$ は $n_\eta \times n_\kappa$ 型の行列で, とくに $A_{\mu\mu}(x, \varepsilon)$ は (0.7) と同じ形をもつ.

§ 1. 方程式 (0.1) を標準の形になおすこと.

仮定 Aのもとに, (0.1) は次の七つの条件を満足する方程式に帰着される.

$$(1.1) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x, \varepsilon)\vec{y};$$

1) σ は正の有理数;

2) $A(x, \varepsilon)$ は

$$(1.2) \quad (x, \varepsilon) \in \{x: |x| < a_0\} \times \{\varepsilon: \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+, 0 < |\varepsilon| < b_0\}$$

において正則かつ有界な次の形をもつ n 次の正方行列:

$$(1.3) \quad A(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s-11} & A_{s-12} & \cdots & A_{s-1, s-1} & 0 \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}.$$

$A_{\mu\kappa}$ の size は $n_\mu \times n_\kappa$ で, とくに

$$P(x, \varepsilon) = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_s, \quad (\oplus \text{は直和}).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \begin{pmatrix} [\alpha]_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ [\alpha]_1 & [\alpha]_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha]_{n_1-1} \binom{n_1-1}{1} [\alpha]_{n_1-2} & \cdots & \cdots & \binom{n_1-1}{n_1-2} [\alpha]_1 [\alpha]_0 \end{pmatrix}, \\ P_\mu = [\alpha]_0 \cdot \mathbf{1}_\mu, \quad \mu \neq 1, \quad \mathbf{1}_\mu : \mu \text{次単位行列}, \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} [\alpha]_0 = \alpha_1, \quad [\alpha]_1 = \varepsilon^\sigma \frac{d}{dx} [\alpha]_0, \quad \cdots, \quad [\alpha]_k = \varepsilon^\sigma \frac{d}{dx} [\alpha]_{k-1} \\ \alpha_1 = \exp \int \frac{a_{11}(x, \varepsilon)}{n_1 \varepsilon^\sigma} dx \end{array} \right)$$

このとき、 $A_{\mu\mu}(x, \varepsilon)$, $\mu \neq 1$, の対角線上に 0 でない要素が現われるので、それらを消すために、さらに次の変換を行なう。

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = z_1, \quad u_2 = \varepsilon^\sigma u_1', \quad \cdots, \quad u_{n_1} = \varepsilon^\sigma u_{n_1-1}' ; \\ u_{n_1+1} = z_{n_1+1}, \quad u_{n_1+2} = \varepsilon^\sigma u_{n_1+1}', \quad \cdots, \quad u_{n_1+n_2} = \varepsilon^\sigma u_{n_1+n_2-1}' ; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ u_{n-n_s+1} = z_{n-n_s+1}, \quad u_{n-n_s+2} = \varepsilon^\sigma u_{n-n_s+1}', \quad \cdots, \quad u_n = \varepsilon^\sigma u_{n-1}' . \end{array} \right.$$

\vec{u} を改めて \vec{y} と書けばよい。

条件 6): $N_1 > N_2 > \cdots > N_{s-1} > N_s = 0$ かつ $N_\mu - N_{\mu+1}$ が十分大きい s 個の整数

N_μ を適当にえらんで、(1.1) に次の形の変換を行なえばよい:

$$\vec{y} = P(x, \varepsilon) \vec{z},$$

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_s, \quad P_\mu = \varepsilon^{N_\mu} \cdot \mathbf{1}_\mu.$$

条件7) : 条件が満足されなければ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\mu l}(x, \varepsilon) \varepsilon^{N_{\mu l}} \neq 0$$

となる正の整数 $N_{\mu l}$ がとれる。そこで, σ' を

$$\min \{ N_{\mu l} - \sigma' l \} = 0$$

で決め, (1.1) に変換

$$\vec{y} = P(x, \varepsilon) \vec{z},$$

$$P(x, \varepsilon) = 1 \oplus \varepsilon^{\sigma'} \oplus \varepsilon^{2\sigma'} \oplus \dots \oplus \varepsilon^{(n-1)\sigma'}$$

を行なう。変換された方程式を $\varepsilon^{\sigma - \sigma'} d\vec{z}/dx$ の形に書けばよい。 σ' は一般に有理数であるから, 新しい σ は必ずしも整数とはならない。したがって, 最初から σ は正の有理数としておく方がよい, これは条件1) である。

§ 2. 特性多辺形。領域

$$(D) \quad \{x: |x| < a_0\} \times \{\varepsilon: \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+, 0 < |\varepsilon| < b_0\}$$

を有限個の部分領域

$$(D_1) \quad M_{i+1} |\varepsilon|^{\rho_{i+1}} < |x| < a_i |\varepsilon|^{\rho_i} \quad (i=0, 1, \dots, m-1),$$

$$(D_2) \quad \begin{cases} \frac{a_i}{2} |\varepsilon|^{\rho_i} < |x| < 2M_i |\varepsilon|^{\rho_i} & (i=1, 2, \dots, m-1), \\ |x| < 2M_m |\varepsilon|^{\rho_m} \end{cases}$$

に分けて, 各部分領域のなかから $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき解の行動が全く異なるような, 有理数 $\{\rho_i\}$ の求め方を説明する。 (D_1) の形の部分領域を主要部分領域, (D_2) の形の補助部分領域とよぶ。

このためには、一階常微分方程式における福原の多辺形のような意味をもつ(1.1)の特性多辺形をつくれればよい。

行列 $A(x, \varepsilon)$ は block 三角型で、その対角 block の対角線のすぐ上には 1 が並び、さらにその上の方はすべて 0 という特殊な形をもつことに注意する。 $A(x, \varepsilon)$ の対角線およびその下にある要素を $\mathcal{O}_{jk}(x, \varepsilon)$ ($j \geq k$) と書き、

$$\mathcal{O}_{jk}(x, \varepsilon) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \mathcal{O}_{jk}^{(\nu)}(x),$$

$$\mathcal{O}_{jk}^{(\nu)}(x) = \sum_{h=n_{jk}^{(\nu)}}^{\infty} x^h \mathcal{O}_{jk,h}^{(\nu)} \cdot \mathcal{O}_{jk,\pi_{jk}^{(\nu)}}^{(\nu)} \neq 0$$

とおく。 (X, Y) - 平面上に点

$$(2.1) \begin{cases} P_{jk}^{(\nu)} = \left(\frac{\nu}{j+1-k}, \frac{\pi_{jk}^{(\nu)}}{j+1-k} \right), & (j \geq k, \nu = 0, 1, \dots), \\ R = (\sigma, -1) \end{cases}$$

をとり、これらの点から成る下に凸な最小の凸多辺形 Π をつくる。

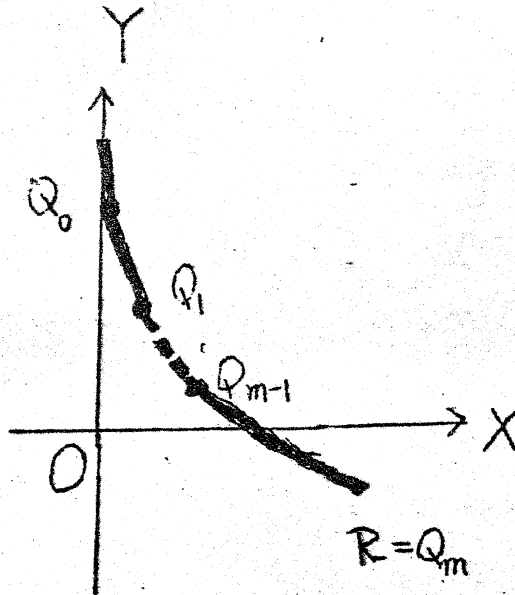
R は一番右の頂点であり、

また条件 7) から Y 軸上に頂点 Q_0 — Y 座標は正 — があることがわかる。 Q_0 と $R \equiv Q_m$ との間にある頂点を、左から右に並べて、 Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} とする。

このような多辺形を (1.1) の特性多辺形という。

注意. Π をつくるために $A(x, \varepsilon)$ の主対角線の下側にあるすべての要素を考えたが、実際には、条件 6) が仮定されているために、 $A(x, \varepsilon)$ の対角 block $A_{\mu l}$ の

要素 $a_{\mu l}(x, \varepsilon)$ ($l = n_{\mu}, \dots, 1; \mu = 1, 2, \dots, s$) のみを考えればよい。(1.4)



からわかるように,

$$a_{\mu l} = \prod_{\nu} n'_{\nu}, \quad n'_{\mu} = n_1 + \dots + n_{\mu}$$

であるから, (2.1) の代わりに, 点

$$(2.2) \quad \begin{cases} P_{\mu l}^{(\nu)} = \left(\frac{\nu}{l}, \frac{m_{\mu l}^{(\nu)}}{l} \right), \\ R = (\sigma, -1) \end{cases}$$

をとつて多辺形をつくれればよい。ただし,

$$a_{\mu l}(x, \varepsilon) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} a_{\mu l}^{(\nu)}(x), \quad a_{\mu l}^{(\nu)}(x) = \sum_{h=n_{\mu l}^{(\nu)}}^{\infty} x^h a_{\mu l, h}^{(\nu)},$$

$$a_{\mu l}^{(\nu)}, m_{\mu l}^{(\nu)} \neq 0.$$

§ 3. 特性多辺形の性質. この多辺形は次の二つの性質をもっている。

1° 多辺形は

$$\vec{y} = T(\alpha, \beta; \varepsilon, x) \vec{z},$$

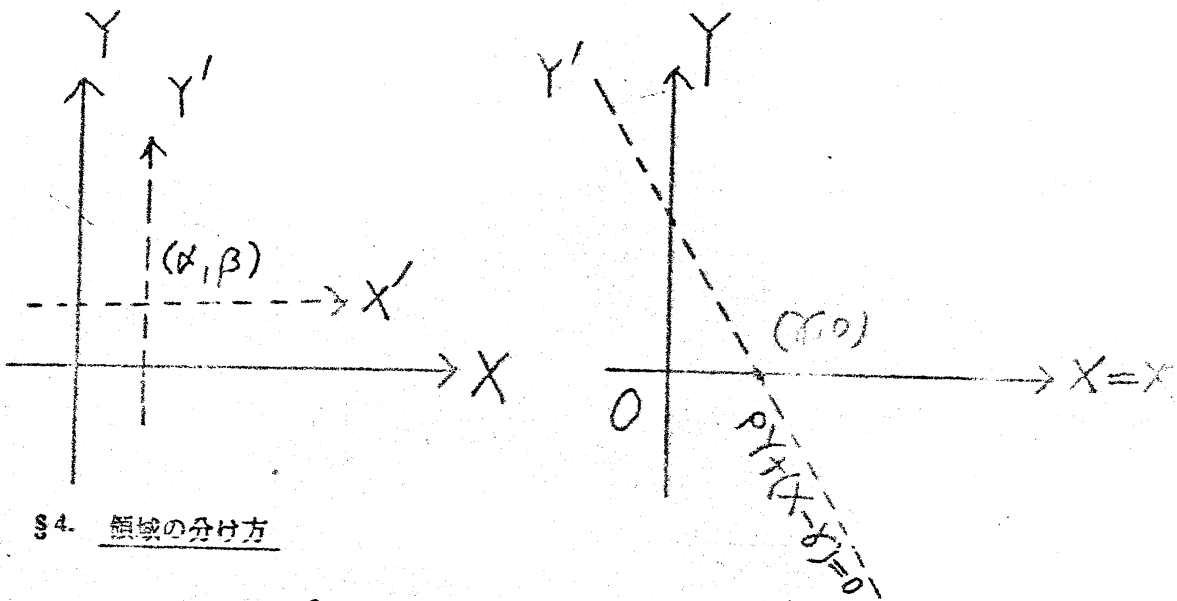
$$T = 1 \oplus \varepsilon^{\alpha} x^{\beta} \oplus \varepsilon^{2\alpha} x^{2\beta} \oplus \dots \oplus \varepsilon^{(n-1)\alpha} x^{(n-1)\beta},$$

なる形の変換に対して不変。

2° 多辺形は

$$\vec{y} = T(\gamma, 0; \varepsilon, x) \vec{z}, \quad x = \varepsilon^{\gamma} \vec{z},$$

なる形の変換に対して不変。



§4. 領域の分け方

$$Q_i = (\alpha_i, \beta_i) \quad (i=0, 1, \dots, m; Q_m = \mathbb{R})$$

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 > 0; \alpha_i > 0, \beta_i \geq 0; \alpha_m = \sigma, \beta_m = -1.$$

$$\rho_i = -\frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}} \quad \text{と置く}$$

$$\rho_0 \equiv 0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_m < +\infty$$

$$(Q_1) \quad M_{i+1} |\varepsilon|^{\rho_{i+1}} < |x| < \alpha_i |\varepsilon|^{\rho_i} \quad (i=0, 1, \dots, m-1);$$

$$(Q_2) \quad \begin{cases} \frac{\alpha_i}{2} |\varepsilon|^{\rho_i} < |x| < 2M_i |\varepsilon|^{\rho_i} & (i=1, \dots, m-1), \\ |x| < 2M_m |\varepsilon|^{\rho_m}. \end{cases}$$

§5. 領域 (Q_1) とそこにおける基準型.

$$1^\circ \quad \vec{y} = T(\alpha_i, \beta_i; \varepsilon, x) \vec{z},$$

$$(5.1) \quad \varepsilon^{\alpha_i} x^{-\beta_i} \frac{d\vec{z}}{dx} = B(x, \varepsilon) \vec{z},$$

$$B(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-\alpha_i} x^{\beta_i} T^{-1} A(x, \varepsilon) T - \beta_i \varepsilon^{\alpha_i} x^{-\beta_i-1} C_0.$$

$$C_0 = 0 \oplus 1 \oplus 2 \oplus \dots \oplus n-1.$$

$$(5.2) \quad \varepsilon^{\alpha_i} x^{-\beta_i-1} = (x^{-1/\rho_{i+1}} \varepsilon)^{p_i} (x \varepsilon^{-\rho_i})^{q_i}$$

とおけば, $p_i \geq 0, q_i \geq 0.$

$$(5.3) \quad B(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1/\rho_{i+1}} \varepsilon)^{k/\omega} H^{(k)}(x \varepsilon^{-\rho_i}), \quad \omega \text{ は正の整数.}$$

$H^{(k)}(\xi)$ は $\xi^{1/\omega}$ の多項式。ただし, $i=0$ のときは正則函数。

$$H^{(0)}(0) = \overset{\circ}{H}_1 \oplus \overset{\circ}{H}_2 \oplus \dots \oplus \overset{\circ}{H}_s.$$

$$\overset{\circ}{H}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ C_{\mu\mu} & C_{\mu\mu-1} & \dots & C_{\mu 2} & C_{\mu 1} \end{bmatrix}, \quad C_{11} = 0.$$

ゆえに $H^{(0)}(0)$ の固有方程式は,

$$\prod_{\mu=1}^s C_\mu(\lambda) = 0; \quad C_\mu(\lambda) \equiv \lambda^\mu - \lambda^{\mu-1} C_{\mu\mu} - \dots - C_{\mu\mu}, \quad C_{11} = 0.$$

したがって, 少なくとも二つの異なる根をもつ。

$H^{(0)}$ の異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ とすれば, $H^{(0)}$ の Jordan 標準型は,

$$(5.4) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{E}_1 \oplus \overset{\circ}{E}_2 \oplus \dots \oplus \overset{\circ}{E}_r, \\ \overset{\circ}{E}_j = \overset{\circ}{E}_{j,1} \oplus \overset{\circ}{E}_{j,2} \oplus \dots \oplus \overset{\circ}{E}_{j,s}, \\ \overset{\circ}{E}_{j,\mu} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}, \quad n_{j,\mu} \times n_{j,\mu} \text{ 型} \end{cases}$$

なる形に表わせる。 $n_{j,\mu}$ は $C_\mu(\lambda) = 0$ の根 $\lambda = \lambda_j$ の重複度である。

2° 主要部分領域 (\mathcal{D}_1) の各々において、(1.1) は次の形の方程式に帰着される。

$$(x^{-\mu} \varepsilon)^p (x \varepsilon^{-\nu})^q x \frac{d\vec{z}}{dx} = E(x, \varepsilon) \vec{z} ;$$

$$0 \leq \nu_\mu < 1, \mu \geq 0, \nu \geq 0 ; p \geq 0 ; q \geq 0 ; -\mu p + q > 0 ;$$

$$E(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x^{-\mu} \varepsilon)^k E^{(k)}(x \varepsilon^{-\nu}) ;$$

$$E^{(k)}(\xi) : \xi = 0 \text{ の近くで正則} ;$$

$E(x, \varepsilon)$ は block-三角型 ;

$E^{(0)}(0)$ の jordan 標準型は (5.4) .

定理

$$z = P(x, \varepsilon) \vec{u}, \quad P \sim \sum (x^{-\mu} \varepsilon)^k P^{(k)}(x \varepsilon^{-\nu}) ;$$

$$\begin{cases} \theta_- < \arg x < \theta_+, & \theta'_- < \arg \varepsilon < \theta'_+, \\ M |\varepsilon|^{1/\mu} < |x| < a |\varepsilon|^\nu, & 0 < |\varepsilon| < b'. \end{cases}$$

$$(x^{-\mu} \varepsilon)^p (x \varepsilon^{-\nu})^q x \frac{d\vec{u}}{dx} = F(x, \varepsilon) \vec{u} ,$$

$$F(x, \varepsilon) = F_1(x, \varepsilon) \oplus F_2(x, \varepsilon) \oplus \cdots \oplus F_r(x, \varepsilon) ;$$

$F_j(x, \varepsilon)$ は block-三角型かつ

$$F_j(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x^{-\mu} \varepsilon)^k F_j^{(k)}(x \varepsilon^{-\nu}) ;$$

$$F^{(0)}(0) = \overset{\circ}{E}_j .$$

Block-diagonalization された各々の連立方程式を、§1 と同じような方法によつて、ある標準の形に変換する。ふたたび同じようにして特性多辺形をつくり、 (\mathcal{D}_1) を主要部

分領域と補助部分領域の二種類の部分領域にさらに細分する。

§ 6. 領域 (Q_2) と基準型

$$\vec{y} = T(\tau_i, 0; \varepsilon, x) \vec{z}, \quad x e^{-\rho_i} = \xi.$$

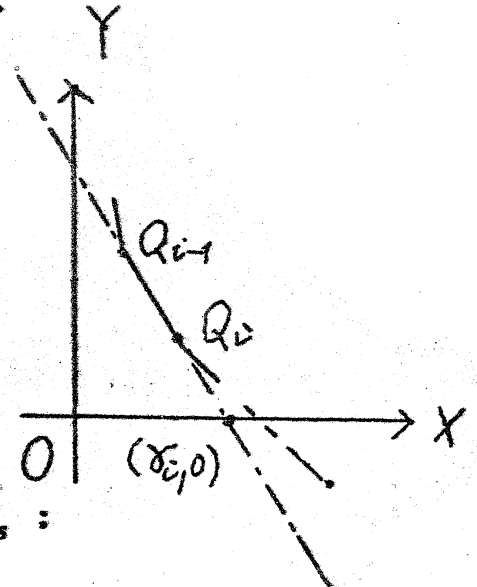
$$(6.1) \quad \varepsilon^{\sigma - \rho_i - \tau_i} \frac{d\vec{z}}{d\xi} = B(\xi, \varepsilon) \vec{z}$$

$$\sigma - \rho_i - \tau_i \geq 0;$$

$$(6.2) \quad B(\xi, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k / \omega_B^{(k)}(\xi)$$

$B^{(k)}(\xi)$: ξ の多項式.

$$B^{(0)}(\xi) = \overset{\circ}{B}_1 \oplus \overset{\circ}{B}_2 \oplus \dots \oplus \overset{\circ}{B}_s ;$$



$$\overset{\circ}{B}_\mu(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & \\ C_{\mu n_\mu}(\xi) & \dots & \dots & C_{\mu 2}(\xi) & C_{\mu 1}(\xi) \end{bmatrix}, \quad C_{11}(\xi) \equiv 0.$$

$$(6.3) \quad \prod_{\mu=1}^s (\lambda^{n_\mu} - \lambda^{n_\mu-1} C_{\mu 1}(\xi) - \dots - C_{\mu n_\mu}(\xi)) = 0.$$

ゆえに、 $B^{(0)}(\xi)$ の固有値が重根をもつ ξ の値 ξ^0 は、領域 $\frac{a_i}{2} < |\xi| < 2M_i$ 内には有限個。もし、(6.3) がある ξ^* において n 重根のもてば、 $C_{11} \equiv 0$ であるから、その n 重根の値は 0。上記の領域を有根個の領域に分け、各領域は高々一つの ξ^0 を含むようにする。 ξ^* を含まない領域では Block-diagonalization により方程式の階数を下げることができる。 ξ^* を含むところでは、(6.1) は

$$\vec{z} = \vec{y}, \quad \xi = \xi^* + x$$

とおけば, (1.1) の形の方程式になる。新しい行列 $A(x, \varepsilon)$ の size は変らないが, 新しい方程式は

$\left\{ \begin{array}{l} \text{新しい } \sigma \text{ はもとのものよりも小さい;} \\ \text{新しい点 } Q_0 \text{ はもとのものより一般に下にある。} \end{array} \right.$

の二つの性質をもっている。これらのことに注意して, 今迄と同じ方法で Reduction を行う。補助部分領域で ξ^* が現われればまた同じことを繰り返す。そうすると, 結局, 有限回の Reduction ののちに得られる方程式には, 補助部分領域で ξ^* が現われないようにできる。

§ 7. 基準型

主要部分領域

$$(x^{-\mu} \varepsilon)^p (x \varepsilon^{-\nu})^q x \frac{d\vec{z}}{dx} = B(x, \varepsilon) \vec{z},$$

$B(x, \varepsilon)$ は block-三角型でかつ

$$B(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (x^{-\mu} \varepsilon)^k B^{(k)}(x \varepsilon^{-\nu}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M|\varepsilon|^{\nu\mu} < |x| < a|\varepsilon|^{\nu}, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0 \\ \theta_- < \arg x < \theta_+, \quad \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+ \end{array} \right. ;$$

$$B^{(k)}(\xi) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \xi^l B_l^{(k)} ;$$

$$0 < |\xi| < C, \quad \Delta_- < \arg \xi < \Delta_+ ;$$

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \quad 0 \leq \mu\nu < 1 ;$$

- i) $p > 0, \quad q \geq 0, \quad -\mu p + q \neq 0 ;$
- ii) $p > 0, \quad q > 0, \quad -\mu p + q = 0 ;$
- iii) $p > 0, \quad q = 0 ;$

$$IV) \quad p=0, q=0;$$

補助部分領域。

$$\varepsilon^\sigma \frac{d\vec{z}}{dx} = C(x, \varepsilon) \vec{z},$$

$$C(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C^{(k)}(x),$$

$C^{(k)}(x)$: $x=0$ の近くで正則;

$$V) \quad \sigma > 0;$$

$$VI) \quad \sigma = 0.$$

§7. 行列 $A(x, \varepsilon)$ が仮定 A を満足しない場合,

もう少し一般に

$$\varepsilon^\sigma x^{\sigma'} \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x, \varepsilon) \vec{y}, \quad \sigma \geq 0, \sigma' \geq 0.$$

を考え、これを §1 と同じような方法である標準の形に変換する。変換された方程式を再び (1.1) と書く。§1 で述べた条件と異なるところは、

$$3') \quad a_{\mu\mu}(x, \varepsilon) \text{ は } x=0 \text{ を極にもつ;}$$

$$6') \quad (x\varepsilon)^{-M_{\mu\kappa}} A_{\mu\kappa}(x, \varepsilon) = O(1), \quad \mu \neq \kappa, (x, \varepsilon \rightarrow 0),$$

$M_{\mu\kappa}$ はいくらでも大きくとれる正の整数;

条件 4) は意味をもたなくなるから除く、の三つである。

同じようにして特性多辺形をつくる。領域

$$\{x: 0 < |x| < a_0\} \times \{\varepsilon: \theta_- < \arg \varepsilon < \theta_+, 0 < |\varepsilon| < b_0\}$$

を、主要部分領域と補助部分領域の二種類の部分領域に分ける。

主要部分領域では方程式(1.1)の階数は下り、各block-diagonalization された方程式は、§7における基準型 I) ~IV) のどれか一つに帰着される。

補助部分領域では仮定Aを満足する(1.1)の形の方程式に帰着される。

§8. Bessel の微分方程式への応用

Bessel の微分方程式は、

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2) y = 0.$$

t と n との絶対値が十分大きいときの解の行動を調べる。

$$x = 1/t, \quad \varepsilon = 1/n,$$

$$y = z/x.$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x^{-2} \left[-1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} + x^{-2} \right) \right] z = 0.$$

$$y_1 = z, \quad y_2 = \varepsilon \frac{dz}{dx},$$

$$\varepsilon \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^{-2} - \varepsilon^2 x^{-4} \left(1 + \frac{1}{4} x^2 \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

仮定Aが満足される。 $|t|$ と $|n|$ とが十分大きい範囲は次のようになる：

$$|x| < a_0, \quad |\varepsilon| < b_0.$$

$$a_{12}(x, \varepsilon) = x^{-2} - \varepsilon^2 x^{-4} \left(1 + \frac{1}{4} x^2 \right) \quad \text{であるから,}$$

$$m_{12}^{(0)} = -2, \quad m_{12}^{(1)} = +\infty, \quad m_{12}^{(2)} = -4; \quad \sigma = 1.$$

$$\begin{cases} P_{12}^{(0)} = (0, -1), \\ P_{12}^{(2)} = (1, -2), \\ R = (1, -1), \end{cases}$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

$$(R_1) \quad M_1 |\varepsilon| < |x| < a_0, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

$$(R_2) \quad \frac{a_1}{2} |\varepsilon| < |x| < 2M_1 |\varepsilon|, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

$$(R_3) \quad 0 < |x| < a_1 |\varepsilon|, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

領域 (R₁). $\vec{y} = T(0, -1; \varepsilon, x) \vec{z}$

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = x^{-1} z_2,$$

$$\varepsilon x \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - (x^{-1} \varepsilon)^2 & (1 + \frac{1}{4} x^2) \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = (x^{-1} \varepsilon)(x), \quad \text{固有値 } \pm 1, \text{ Type II.}$$

$$\begin{cases} |\arg x| < \pi + \delta_0, \quad |\arg \varepsilon| < \pi/2 \\ M_1' |\varepsilon| < |x| < a_0', \quad 0 < |\varepsilon| < b_0' \end{cases}$$

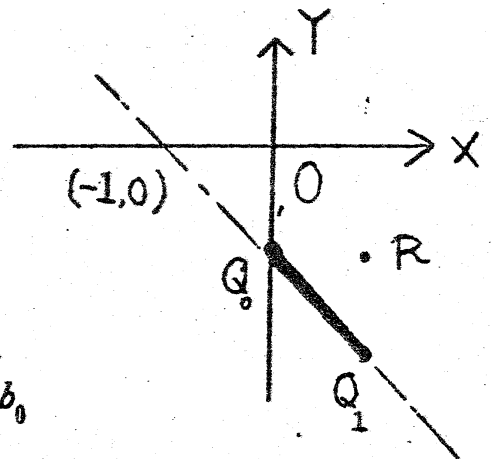
または

$$|\arg x| < \pi + \delta_0, \quad |\arg \varepsilon - \pi| < \pi/2, \quad \left(\begin{array}{l} \delta_0 \text{ は任意の} \\ \text{正の数} \end{array} \right)$$

$$M_1' |\varepsilon| < |x| < a_0', \quad 0 < |\varepsilon| < b_0'.$$

領域 (R₃). $\vec{y} = T(1, -2; \varepsilon, x) \vec{z}$

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \varepsilon x^{-2} z_2,$$



$$x^2 \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (x\varepsilon^{-1})^2 - (1 + \frac{1}{4}x^2) & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$x = (x^{-1}\varepsilon)(x\varepsilon^{-1}), \quad \pm i, \quad \text{Type i.}$$

$$\begin{cases} |\arg x| < \pi, & |\arg \varepsilon| < \pi + \delta_0, \\ |x| < a_1 |\varepsilon|, & 0 < |\varepsilon| < b_0', \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} |\arg x - \pi| < \pi, & |\arg \varepsilon| < \pi + \delta_0, \\ |x| < a_1 |\varepsilon|, & 0 < |\varepsilon| < b_0'. \end{cases} \quad (\delta_0 \text{ は任意の正の数})$$

領域 (R_2). $(r, \theta) = (-1, 0)$.

$$\vec{y} = T(-1, 0; \varepsilon, x) \vec{z}, \quad x\varepsilon^{-1} = \xi,$$

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \varepsilon^{-1}z_2, \quad x = \varepsilon\xi,$$

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi^{-2} - \xi^{-4} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \xi^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\tilde{R}_2) \quad \frac{a_1}{2} < |\xi| < 2M_1, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

$$B^{(0)}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi^{-4}(\xi^2 - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \pm 1 \quad \underline{\text{変り点}}$$

$$(\tilde{R}_2)' \quad \frac{a_1}{2} < |\xi| < 2M_1, \quad |\xi \mp 1| > a_2, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

では、変り点は現われないから、Type v. 残りの領域

$$(\tilde{R}_2)'' \quad |\xi \mp 1| < 2a_2, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0$$

における解の行動を調べるために、

$$\xi = \tilde{x} \pm 1$$

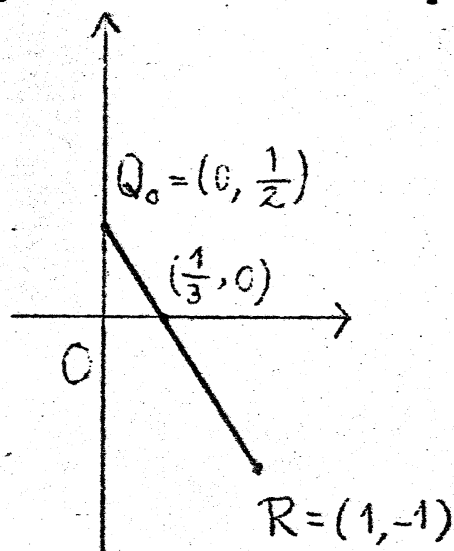
とおく。

$$\varepsilon \frac{d}{d\tilde{x}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tilde{x}^2 \pm 2\tilde{x}}{(\tilde{x} \pm 1)^4} & 0 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon^2}{4(\tilde{x} \pm 1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{2}{3}$$

$$(\tilde{R}_2)'_1 \quad M_2 |\varepsilon|^{\frac{2}{3}} < |\tilde{x}| < 2a_2, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0 :$$

$$(\tilde{R}_2)'_2 \quad |\tilde{x}| < 2M_2 |\varepsilon|^{\frac{2}{3}}, \quad 0 < |\varepsilon| < b_0.$$



領域 $(\tilde{R}_2)_1^*$ $\vec{z} = T(0, \frac{1}{2}; \epsilon, \tilde{x}) \vec{u}$.

$$z_1 = u_1, \quad z_2 = \tilde{x}^{\frac{1}{2}} u_2,$$

$$\epsilon \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tilde{x}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tilde{x} \pm 2}{(\tilde{x} \pm 1)^4} - \frac{\epsilon^2}{4(\tilde{x} \pm 1)^2} & -\frac{1}{2} \epsilon \tilde{x}^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} = (\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} \epsilon) \cdot \tilde{x}, \quad \epsilon^2 \tilde{x}^{-1} = (\tilde{x}^{-\frac{3}{2}} \epsilon)^2 \cdot \tilde{x}^2,$$

$$\pm \sqrt{2} \quad \text{or} \quad \pm \sqrt{2} i, \quad \text{Type III.}$$

領域 $(\tilde{R}_2)_2^*$, $\vec{z} = T(\frac{1}{3}, 0; \epsilon, \tilde{x}) \vec{u}$, $\tilde{x} \epsilon^{-\frac{2}{3}} = \tilde{\xi}$,

$$z_1 = u_1, \quad z_2 = \epsilon^{\frac{1}{3}} u_2, \quad \tilde{x} = \epsilon^{\frac{2}{3}} \tilde{\xi}.$$

$$\frac{d}{d\tilde{\xi}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\frac{2}{\epsilon^{\frac{2}{3}} \tilde{\xi}^2} \pm 2\tilde{\xi}}{(\epsilon^{\frac{2}{3}} \tilde{\xi} \pm 1)^4} - \frac{\epsilon^{\frac{4}{3}}}{4(\epsilon^{\frac{2}{3}} \tilde{\xi} \pm 1)^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Type VI.

結局次の五つの部分領域に分ければよい。

$$M_1 |\epsilon| < |x| < a_0, \quad \dots \text{Type (ii)}$$

$$\frac{a_1}{2} |\epsilon| < |x| < 2M_1 |\epsilon|, \quad |x_+ \epsilon| > a_2 |\epsilon|, \quad \dots \text{Type (iv)}$$

$$\begin{aligned}
M_2 |\varepsilon|^{\frac{5}{3}} < |x_+^- \varepsilon| < 2a_2 |\varepsilon|, & \dots \text{Type (ii)} \\
|x_+^- \varepsilon| < 2M_2 |\varepsilon|^{\frac{5}{3}} & \dots \text{Type (v)} \\
|x| < a_1 |\varepsilon|, & \dots \text{Type (i)}
\end{aligned}$$

§ 9. Whittaker の微分方程式への応用

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{t} + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{t^2} \right] W = 0.$$

t, k, n の絶対値が十分大きいときの解の行動を調べる。

$$\varepsilon = 1/k, \quad \tau = 1/n, \quad x = 1/t, \quad W = y/x,$$

$$\varepsilon \tau^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{\varepsilon \tau^2}{4x^4} (x^2 - 1) + \frac{\tau^2}{x^3} - \frac{\varepsilon}{x^2} \right] y = 0.$$

さらに, $y_1 = y, y_2 = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau} \frac{dy}{dx}$ とおけば,

$$(9.1) \quad \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau} \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon x^{-2} - \tau^2 x^{-3} + \frac{1}{4} \varepsilon \tau^2 x^{-4} (1 - x^2) & 0 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

領域

$$(9.2) \quad 0 < |\varepsilon| < a_0, \quad 0 < |\tau| < b_0, \quad 0 < |x| < c_0$$

におけるこの方程式の解の行動を調べるために, 特性多辺形の代わりに, 特性多面体を定義する。

そのためには、(9.1)よりやや一般的な形の次の方程式を考える方が都合がよい。

$$\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau} \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ \varepsilon x^{-2} f_{10} - \tau^2 x^{-3} f_{02} + \frac{1}{4} \varepsilon \tau^2 x^{-4} f_{12} & & 0 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

$$f_{jk} = \sum_r \sum_q \sum_p \varepsilon^p \tau^q x^r f_{jk}^{(p,q,r)}, \quad f_{jk}^{(0,0,0)} = 1.$$

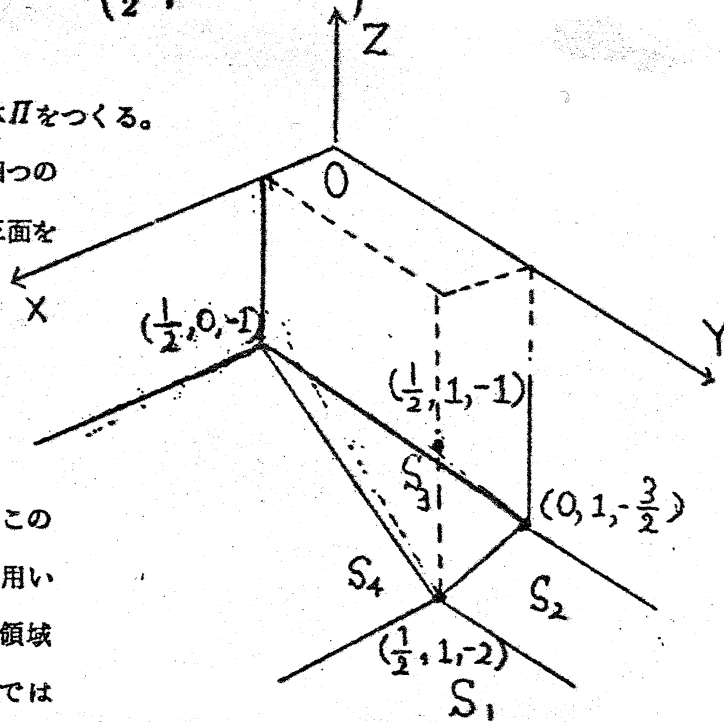
(X, Y, Z)-空間に、点

$$\left\{ \begin{aligned} P_2^{(1+p, q, r-2)} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, -1 + \frac{r}{2} \right), \\ P_2^{(p, 2+q, r-3)} &= \left(\frac{p}{2}, 1 + \frac{q}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{r}{2} \right), \\ P_2^{(1+p, 2+q, r-4)} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}, 1 + \frac{q}{2}, -2 + \frac{r}{2} \right), \\ R &= \left(\frac{1}{2}, 1, -1 \right) \end{aligned} \right.$$

をとり、下に凸な最小の凸多面体 Π をつくる。

頂点は三つある。各頂点には四つの面が集まっている。四面のうち三面を任意に固定して考える。その三面から成る三角錐は特性多面体を内部に包む。このような三角錐を特性三角錐とよぶ。

特性三角錐は全部で12個ある。この特性多面体の三つの稜の方向比を用いて、主要部分領域とよばれる部分領域を定義する。このような部分領域では



(9.1) は必ず独立な二つの方程式に変換できる。例えば, S_1, S_2, S_3 から成る $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ を頂点とする特性三角錐の三稜の方向比は,

$$(1; -1; 0), (0; 1; 0), (-1; 0; 1).$$

これに対応する部分領域は,

$$\begin{aligned} |\varepsilon \tau^{-1}| < a, \quad |\tau| < b, \quad |\varepsilon^{-1} x| < c, \\ \vec{y} = T \left(\frac{1}{2}, 1, -2; \varepsilon, \tau, x \right) \vec{z}, \\ y_1 = z_1, \quad y_2 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tau x^{-2} z_2, \end{aligned}$$

$$x^2 \frac{d\vec{z}}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tau^{-2} x^2 - \varepsilon^{-1} x + \frac{1}{4} (1 - x^2) & 2x \end{pmatrix} \vec{z}.$$

$$x = (\varepsilon \tau^{-1}) (\tau) (\varepsilon^{-1} x), \quad \tau^{-1} x = (\varepsilon \tau^{-1}) (\varepsilon^{-1} x),$$

右辺の行列の主要項の固有値は $\pm 1/2$.

しかし主要部分領域だけでは, (9.2) を隙間なくおおうことはできないので, 補助部分領域 とよばれる部分領域をつけ加える。例えば,

$$|\varepsilon \tau^{-1}| < a, \quad c < |\varepsilon^{-1} x| < C$$

$x_1 = \varepsilon^{-1} x$, $\varepsilon_1 = \varepsilon \tau^{-1}$ とおけば, 方程式は,

$$\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\tau^2} \frac{d\vec{y}}{dx_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1^{-1} \tau^{-1} x_1^{-2} - \varepsilon_1^{-3} \tau^{-1} x_1^{-3} + \frac{1}{4} \varepsilon_1^{-3} \tau^{-1} x_1^{-4} - \frac{1}{4} \varepsilon_1^{-1} \tau x_1^{-2} & 0 \end{pmatrix} \vec{y},$$

$$0 < |\varepsilon_1| < a, \quad 0 < |\tau| < b_0, \quad c < |x_1| < C.$$

独立変数 α_1 については特異性はないから、 ε_1 と τ とに関して特性多辺形をつくる(このときは R 点は考えなくてよい。)このようにして Reduction を続けてゆく。

One parameter のときは、変り点の近傍を隙間なくおおうような主要部分領域と補助部分領域との選び方は特性多辺形から一意的にきまつたが、two parameters の場合には一般には一意にはきまらない。

あとがき。 問題 1), 2) を解くのに特性多辺形の役割は大きい。主要部分領域をきめる有理数 $\{\rho_i\}$ の求め方は岩野が最初に考えたが、その方法は少し複雑であつた。それは特性多辺形のつくり方が少し異なっていたからである。現在のような特性多辺形を考えたのは渋谷である。

参 考 文 献

- [1] M. Hukuhara, Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. Mem. Fac. Engin. Kyushu Univ. 8 (1937), 249-280.
- [2] M. Iwano, Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I. Funkcialaj Ekvacioj 5 (1963), 71-134.
- [3] M. Iwano, Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I. Funkcialaj Ekvacioj 7 (at press).
- [4] M. Iwano, On the study of asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a parameter with a singular point. (to appear soon).
- [5] M. Iwano, Asymptotic solutions of Whittaker's differential equation as the moduli of the independent variable and two parameters tend to infinity. Japanese Jour. Math. 33 (1963), 1-92.
- [6] M. Iwano and Y. Sibuya, Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter. Kodai Math. Semi. Rep. 15 (1963), 1-28.
- [7] R. E. Langer, The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point. Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), 461-490.
- [8] K. Okubo, On certain reduction theorems for systems

of differential equations which contain a turning point. Proc. Japan Acad. 37 (1961), 544-549.

[9] Y. Sibuya, Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre. Jour. Fac. Sci Univ. Tokyo, I, 7 (1958), 527-540.

[10] Y. Sibuya, Formal solutions of a linear ordinary differential equation of the n^{th} order at a turning point. Funkcialaj Ekvacioj, 4 (1962), 115-139.

[1] は, $x=0$ が変わり点であるかないかの判定法および変わり点でない場合の基本解を表現する解の漸近展開式のつくり方が述べられてある。

[7] は, Langer および彼の弟子たちの変わり点に関する一連の仕事の基礎になっているように思われる。それらについての詳しい文献は, 大久保氏の予稿を御覧下さい。

[9] は, Block-diagonalization による方程式の階数のひきさげの方法が述べられてある。