数理解析研究所講究録
第2巻 1965年 41-58

§1. 形式的Reduction

parameter ε と独立変数xを含むn階の単独線型常微分方程式

$$\varepsilon^{n-m}N(y)+M(y)=0$$

を考える。こゝで$N(y)$及び$M(y)$は次のかたちのn階及びm階の微分作用素とする。
(parameter ε が zero になった場合，方程式はm階に退化する。)

$$N(y)=\sum_{k=0}^{n}N_k(x,\varepsilon)d^ky/dx^k \qquad N_n(x,\varepsilon)=1$$

$$M(y)=\sum_{k=0}^{m}M_k(x,\varepsilon)d^ky/dx^k \qquad (0<m<n)$$

こゝで第k成分が$\varepsilon^{k-1}d^{k-1}y/dx^{k-1}$であるvectorを$Y$と書いてsystemに書き直せば

$$\varepsilon dY/dx=A(x,\varepsilon)Y$$

となる。もし$N_k(x,\varepsilon)$，$M_k(x,\varepsilon)$が

$$|x|<x_0,\quad |\varepsilon|<\varepsilon_0,\quad |\arg\varepsilon-\Psi|<\theta_0$$

で展開

$$N_k(x,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}N_{kj}(x)\varepsilon^j,\quad M_k(x,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}M_{kj}(x)\varepsilon^j$$

$$N_{kj}(x),\ M_{kj}(x)\ \text{holomorphic in}\ |x|<x_0,\quad \varepsilon\to 0$$

を持つものとすれば，$A(x,\varepsilon)$も同様に

$$A(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)\varepsilon^k,\quad A_k(x)\ \text{holo.}\ |x|<x_0,\quad \varepsilon\to 0$$

なる展開を持つ。特に主要項$A_0(x)$の形は

$$A_0(x)=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0, & & , 0\\ 0, & 0, & 1, & \cdot & , 0\\ \cdots\cdots & & & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & 1, & 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 1\\ 0, & \cdots, & M_{m,0}(x), & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

となる。今$M_{m,0}(x) = x$ の場合を考えよう。

（一般に$M_{m,0}(x)$ が $x=0$ に一位の零点を持てば独立変数と従属変数の適当な変換によつて，今の場合に帰着出来るので，これはきわめて一般の仮定である。）

たとえば一次元のSchrödinger 方程式は$n=2$ ，$m=0$ であり流体力学に現われるOrr-Sommerfeld 方程式は$n=4$ ，$m=2$ の場合である。

ふつう単独一階の線型方程式には簡単な初等積分によつて解を発見する方法が与えられているから，連立一階線型方程式系の積分は，何等かの方法によつて系の右辺（こゝでは$A(x, \varepsilon)$）の行列を対角化することにより解を見出す。しかし今考えるTurning Point をもつ方程式の場合，最も簡単な$n=2$ ，$m=0$ のときでさえ行列

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

を対角化する変換

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{1/2} & -x^{1/2} \end{pmatrix}$$

は原点でsingular である。このため対角化を続ければ，それだけ原点での特異性は高まり良い近似は得られず，原点の近傍を除けば変数xの異なる偏角に対してuniform な展開を得ることが不可能になる。

同様の事情はParameter を含まない不確定特異点を無限遠点に持つ微分方程式系

$$x dY/dx = x^q A(x) Y \qquad (q : \text{positive integer})$$

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k} \qquad |x| > x_1$$

を研究する際にも生ずる。たとえば$q=1$ として，この方程式系は，形式解

$$Y^k(x) \sim \exp(\lambda_k x) x^{\sigma_k} \sum_{k=0}^{\infty} H^k(s) x^{-s} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

によつてasymptotic に表現される解$Y^k{}_\theta(x)$ が，$x=\infty$の近傍

$$|x| > x_2 \qquad |\arg x - \theta| < \pi/(n+1)$$

で任意のθに対して存在することを，対角化の方法によつて証明することが出来る。しかし，二つの相異なるθ_1，θ_2 に対する二つの解$Y^k{}_{\theta_1}(x)$，$Y^k{}_{\theta_2}(x)$ は一般には相異なり，

その間の関係は arg $x=\theta$ の不連続な函数である。

turning point を含む系の場合も irregular singularity を含む系の場合も $x=0$ 又は $x=\infty$ の近傍での解といういわば local な研究が，実際はその部分部分の sectorial neighborhood の解の接続という global な問題になるという意味で。この二つの問題に対する手法は共通のものを含むのは，充分察せられるであろう。

さて先ず第一に考えられるのは，係数と同じ性質を持つ変換によつて，出来得るかぎり簡単な系に reduce することであろう。これにより reduce された系の本質的な性質，たとえば given local problem........need for global analysis という様なことが損われることはないから問題の本質的な解決とはならないが，少なくとも問題の見通しはよくなる筈である。ここで係数と同様な性質というのは，turning point の問題では

$$Y=P(x,\varepsilon)Z \qquad P(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\varepsilon^k$$

$$P_k(x) \text{ holomorphic in } |x|<x_0 \quad \det(P_0(0))\neq 0$$

$$|\arg\varepsilon-\Psi|<\theta_0 \quad |\varepsilon|<\varepsilon_0 \quad \varepsilon\to 0$$

という形であることが望ましいし，又不確定特異点の場合では

$$Y=P(x)Z$$

$$P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_kx^{-k} \quad \text{holomorphic in } |x|>x_1,\ \det(P(0))\neq 0.$$

という形であることが望ましいという意味である。但し変域が多少せまくなつたり，上の場合に parameter についての漸近展開になつたりするのは止むを得ないが，$x=0$ 又は $x=\infty$ を内点に含む近傍で意味を持つことが重要である。

現在これらの系が上に述べたような変換で一体どこまで簡単になるかということに関して，確定的な最終結果が得られてはいない。この困難さは reduce された系の global な性質を用いて reduction の解析性を証明するという……二兎を追う……ところにある様に思える。

まず，turning point の場合，最初に現われたのは 1949 (Trans. A.M.S) R.E.Langer の論文で $n=1$，$m=0$ をとりあつかつている。reduce された結果は

$$\varepsilon dZ/dx=A_0(x)Z$$

であつて $P(x,\varepsilon)$ の展開は ε について偏角が π より小さい範囲で asymptotic であり，

彼はこのreduce された系をrelated equation の名で呼んでいる。

この論文の始めに彼は対角化の方法以外にこゝで述べた様なsimplificationがturning point を持たぬ系にも応用出来ることを強調している。

続いて$n=3$，$m=0$，1；$n=4$，$m=2$の場合を1960年に至る一連の論文でとりあつかっている。一般のnについては1961年に$m=0$，1をK.Okubo $2\leq m\leq n-1$の場合はY.Sibuya がほゞ解決している。但しreduced system が充分研究されていないため形式的展開はturning point を内点にふくむ近傍でholomorphicな係数を持つがεについての解析性がそのfull neighborhood で解明された訳ではない。

代表的なcase を二つ述べる。

定理1 （K. Okubo） 任意のn（$1<n$）について$m=0$であればreduced form は

$$\varepsilon dZ/dx = A_0(x)Z$$

定理2 （K. Okubo） 任意のn，（$1<n$）について$m=1$であれば reduced form は

$$\varepsilon dZ/dx = \left(A_0(x) + \sigma(\varepsilon)\begin{pmatrix} 0, 0, \ldots\ldots, 0 \\ 0, 0, \ldots\ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 1, 0, \ldots\ldots, 0 \end{pmatrix}\right)Z$$

こゝに$\sigma(\varepsilon)$はεにのみ関係する常数である。

一方不確定特異点の場合は既に1913年のG.D.Birkhoff の研究がある。この場合はまず原方程式系の解の構造を調べることから出発しているのでturning pointの場合の様にreduced form を始めにinspiration で推定するよりも理論的と云えよう。しかしこれも実は未解決の部分が多く，代表的なのは次の定理である。

定理3 （G.D.Birkhoff） 方程式系のmonodoromy matrix が対角化出来れば，適当な有限個の常数行列 B_j を用いてreduced form は

$$x dZ/dx = \left(x^q \sum_{k=0}^{q} B_k x^{-k}\right)Z$$

とかける。（Math.Ann. vol.74）

$\boxed{\text{定理4}}$ （H.L.Turrittin） 右辺の展開の初項 A_0 がすべて相異なる固有値を持てば

$$x\,dZ/dx = \left(x^q \sum_{k=0}^{q} B_k x^{-k}\right) Z$$

とする変換 $Y=P(x)Z$ がある。但し

$$P(x) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^{-k}$$

で $\det(P_0) \neq 0$ であることを要求しない。

これらの定理に現われる方程式系は何れも原点に確定特異点を持ち x の巾と x^{-1} の整函数の積という形の解を持つのでとりあつかい易いのではないかという訳であるが，実際は変換の求め方はわからないし，$q=1$ の場合を除いて解の大域的性格はまだ調べられていない。

但し nq 個の従属変数を新らしくとれば $q=1$ の場合に定理3，4のreduced form を帰着出来る。

又定理1のreduced form で新らしい変数 ξ を $\xi=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}\left(\varepsilon^{-\frac{1}{n+1}}x\right)^{\frac{n}{n+1}}$ によつて導入し

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{dx}{d\xi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (dx/d\xi)^{n-1} \end{pmatrix} W$$

とおけば

$$\xi\frac{dW}{d\xi} = \left\{\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n-1 \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}\right\} W$$

同様に定理2のreduced form はたとえば $n=3$ のとき

$$\xi\frac{dW}{d\xi} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3\sigma}{2} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} W$$

に帰着される。

最近この重要な方程式系の大域的理論について，ある程度の結果を得たので，それを次節で報告する。

§2　$xdY/dx=(A+xB)Y$　の研究

こゝで主題とする系は原点に確定特異点を持ち，行列Aの固有値を各々

$$\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots, \rho_n.$$

として，その中に整数差を持つ組がなければ：

$$\rho_j - \rho_k \neq \text{an integer}, \quad (j \neq k),$$

次の形の収束巾級数で表現されるn個の解よりなる基本解を持つ。

$$Y_j(x) = x^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) x^m$$

又無限遠点は不確定特異点で行列 B の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ ，行列A，Bの一方はJordan 標準型と考えて良いから B をこゝでは対角型とする。もし B の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ の全てが相異なるものとすれば，Aのk番目の対角要素を a_{kk} として，次の型のn個の形式解がある。

$$Y^k(x) \sim e^{\lambda_k x} x^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) x^{-s}$$

すでに述べた様に任意に指定された無限遠点の（充分開きの小さい） sectorial neighborhood で asymptotic expansion が $Y^k(x)$ であるような解が存在するが，この解 $Y^k(x)$• を $Y_j(x)$ を用いて表現するとき

$$Y^k(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j{}^k Y_j(x)$$

その係数$S_j{}^k(\theta)$ は一般に sector の中心角 θ の不連続函数となる。（この一次結合の係数をStokes 係数とよぶ。）

Stokes 係数を定めたいのではあるが，一般にこれは一意に定まらない。そこで逆に解 $Y_j(x)$ の asymptotic expansion を求めて，二つの基本解系の関係を定めることを考える。

議論を簡単にするために，次の二つの条件を付け加える。

$$0 < |\lambda_k| < |\lambda_k - \lambda_j| \qquad (j \neq k)$$

$$\rho_j - a_{kk} : \text{not an integer for any choice of } j, k.$$

我々の目指す関係式は原点から出る一つの ray $x=re^{i\theta}$ $(0\leq r<\infty)(\theta$: fixed.)
上で次の形の関係式の一次結合係数 $T_j{}^k(\theta)$をθの函数として求めることである。

$$Y_j(x)=\sum_{k=1}^{n}T_j{}^k(\theta)Y^k(x)$$

$Y_j(x)$がこの様な分解を許すならば，当然その展開係数 $G_j(m)$ も又分解されるであろう。
それを次の様に書く。

$$G_j(m)=\sum_{k=1}^{n}T_j{}^kG_j{}^k(m) \quad .$$

$$Y_j{}^k(x)=\sum_{k=1}^{n}G_j{}^k(m)x^{m+\rho_j}$$

そうすれば当然 $Y_j{}^k(x)$ は次の形の asymptotic expansion

$$Y_j{}^k(x)\cong Y^k(x)+\psi_j{}^k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n}T_j{}^k\psi_j{}^k(\theta)\cong 0$$

を持つているのではなかろうか。次に整函数 $x^{-\rho_j}Y_j{}^k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}G_j{}^k(m)x^m$
を考えよう。あまりものの $x^{-\rho_j}$ を除外しておいて考えれば

$$\sum_{m=0}^{\infty}G_j{}^k(m)x^m\cong\exp(\lambda_kx)x^{a_{kk}-\rho_j}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}$$

であるから展開係数 $G_j{}^k(m)$ は次の形の展開

$$G_j{}^k(m)=\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j{}^k(m,s)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}g_j{}^k(m,s)x^m\cong\exp(\lambda_kx)x^{a_{kk}-\rho_j-s}$$

を持つていれば都合が良い。

又一方から考えると $G_j(m)$ は定差方程式

$$((\rho_j+m)I-A)\ G_j(m)=BG_j(m-1)$$

を満足するから，$G_j{}^k(m)$ もまた解と思つて良いだろう。一方 $H^k(s)$ の満足する定差方

程式

$$(B-\lambda_k I)H^k(s+1)=((a_{kk}-s)I-A)H^k(s)$$

から $G_j^k(m)$ の展開式が差分系の解になる様に函数 $g_j^k(m,s)$ を決定して見よう。函数 g_j^k の形として二つの変数 m と s の和の函数であると考えて，これがスカラーであり，他の二つ $G_j^k(m)$ と $H^k(s)$ がベクトルであることに注意すれば

$$((\rho_j+m)I-A)G_j^k(m)-BG_j^k(m-1)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)(\rho_j+m)g_j^k(m+s)-\sum_{s=0}^{\infty}AH^k(s)g_j^k(m+s)$$
$$-\sum_{s=0}^{\infty}BH^k(s)g_j^k(m+s-1)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)\left(((\rho_j+m+s-a_{kk})g_j^k(m+s)-\lambda_k g_j^k(m+s-1)\right)$$

つまり $g_j^k(m)$ は次の単独一階常微分方程式の原点で holomorphic な解の係数となる。

$$xdy_j^k/dx=(\lambda_k x+a_{kk}-\rho_j)y_j^k+c_j^k \quad (c_j^k:\text{constant})$$

この解の asymptotic expansion は容易に求められる。つまり一般解

$$y_j^k(x)\cong e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}-\rho_j}\left(d_j^k+c_j^k\int_0^x \exp(-\lambda_k u)u^{\rho_j-a_{kk}-1}du\right)$$

が原点で holomorphic となる条件 $d_j^k=0$

より積分路を $\arg(-\lambda_k u)=\pi$ ととつて

$$y_j^k(x)=c_j^k e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}-\rho_j}\left(\int_0^\infty-\int_\infty^x\right)$$

$$\cong c_j^k\lambda_k^{a_{kk}-\rho_j}\Gamma(\rho_j-a_{kk})e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}-\rho_j}-\sum_{s=1}^{\infty}g_j^k(-s)x^{-s}$$

$$(|\arg\lambda_k x|\leq\pi)$$

が求める asymptotic expansion である。

さてこれらの関係を図式化すれば

$$(a_{kk}-s-A)H^k(s)=(B-\lambda_k)H^k(s+1)$$

$$Y^k(x)\sim e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}$$

$$x\frac{dY}{dx}=(A+xB)Y \qquad x\frac{dy_j^k}{dx}=(\lambda_k x+a_{kk}-\rho_j)y_j^k+c_j^k$$

$$Y_j(x)=x^{\rho_j}\sum_{m=0}^{\infty}G_j(m)x^m \qquad y_j^k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}g_j^k(m)x^m$$

$$(\rho_j+m-A)G_j(m)=BG_j(m-1) \qquad (\rho_j+m-a_{kk})g_j^k(m)=\lambda_k g_j^k(m-1)$$

$$G_j^k(m)\sim\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j^k(m+s)$$

$$Y_j^k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^{\rho_j}G_j^k(m)x^m$$

さて $Y_j^k(x)(k=1,2,\ldots,n)$ と $Y_j(x)$ との関係は $G_j^k(m)$ と $G_j(m)$ との関係に帰着する。これは $G_j(m)$ に対する初期条件

$$(\rho_j I-A)G_j(m)=0$$

によつて決定されるから係数 T_j^k を一次連立方程式

$$\sum_{k=1}^{n}T_j^k G_j^k(0)=G_j(0)$$

によつて解けば良い。これが解けるためには形式的に作つた $G_j^k(m)$ が (1) 一次独立であること。(2) 実際計算出来ること，言いかえれば，級数 $\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j^k(m+s)$ が収束するか， asymptotic series となつていることが必要である。

まず (2) を先に示そう。こゝでは収束する場合のみを扱う。

形式的な級数

$$F_j^k(\varepsilon,m)\sim\varepsilon^{\rho_j+m-a_{kk}}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j^k(m+s)\varepsilon^s$$

が $\varepsilon=1$ で収束することを示せば充分である。形式的に変数εで微分して $g_j{}^k(m+s)$, $H^k(s)$ に関する差分方程式を用いれば

$$\varepsilon dF_j{}^k(\varepsilon,m)/d\varepsilon=\sum_{s=0}^{\infty}(m+s+\rho_j-a_{kk})H^k(s)g_j{}^k(s+m)\varepsilon^{m+\rho_j+s-a_{kk}}$$

$$=\lambda_k\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j{}^k(m+s-1)\varepsilon^{\rho_j+m+s-a_{kk}}$$

$$=\lambda_k\varepsilon F_j{}^k(\varepsilon,m-1)$$

又は

$$=\sum_{s=0}^{\infty}((s-a_{kk})I+A+(m+\rho_j)I-A)H^k(s)g_j{}^k(m+s)\varepsilon^{\rho_j+m+s-a_{kk}}$$

$$=(\lambda_kI-B)\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s+1)g_j{}^k(m+s)\varepsilon^{\rho_j+m+s-a_{kk}}$$

$$+((m+\rho_j)I-A)F_j{}^k(\varepsilon,m)$$

$$=(\lambda_kI-B)F_j{}^k(\varepsilon,m-1)+((\rho_j+m)I-A)F_j{}^k(\varepsilon,m)$$

を得る。これらの式より $F_j{}^k(\varepsilon,m-1)$ を消去すれば

$$(\varepsilon I+(B-\lambda_kI)/\lambda_k)dF_j{}^k(\varepsilon,m)/d\varepsilon=((\rho_j+m)I-A)F_j{}^k(\varepsilon,m)$$

となる。この微分方程式系は有限なεに対してはn個の確定特異点$(\lambda_k-\lambda_p)/\lambda_k$ ($p=1,2,\ldots,n$) しか持たない。もし条件

$$0<|\lambda_k|<|\lambda_k-\lambda_p| \qquad (p\neq k)$$

が満足されゝば，これらの特異点は原点を別にすれば，原点を中心とする半径1の単位円の外に全部がある。だから原点で固有指数 $\rho_j-a_{kk}+m$ に対応する解 $F_j{}^k(\varepsilon,m)$ は$\varepsilon=1$ で収束する。定義から

$$F_j{}^k(1,m)=G_j{}^k(m)$$

であるからこれで $G_j{}^k(0)$ が決定される。

次に一次独立性を示そう。n個の解 $G_j{}^k(m)$ $k=1,2,\ldots,n$ を縦にならべた

(n, n)型の行列を $\mathfrak{G}(m)$で表現しよう。明らかに行列方程式

$$(\rho_j+m-A)\mathfrak{G}(m)=B\mathfrak{G}(m-1)$$

が成立する。最初に述べた条件から行列式 $\det(\rho_j+m-A)$ が zero になるのは A の固有値の間に整数差がない以上 m の整数値に対しては起り得ないし，また B に関する条件から B の行列式は zero ではない。だから$\mathfrak{G}(0)$の行列式が zero でないことを示すのには任意の整数 m に対して$\mathfrak{G}(m)$ が zero でないことを示せば充分である。そこで充分大きな正の整数 m に対してこれを示そう。それには次の積分表示が便利である。

$$G_j^{\,k}(m)=\frac{\lambda_k^{\,m}}{\Gamma(m)}\int_0^1(1-\varepsilon)^{m-1}F_j^{\,k}(\ \ \varepsilon,0)d\varepsilon$$

これから直ちに

$$G_j^{\,k}(m)\cong\frac{H^k(0)\lambda_k^{\,m}}{\Gamma(m+\rho_j-a_{kk}+1)}\Gamma(\rho_j-a_{kk}+1)g_j^k(0)$$

であることがわかり，対角型行列 B のn個の固有ベクトル $H^1(0),H^2(0),\dots,H^n(0)$ の独立性から行列 $\mathfrak{G}(m)$ の行列式が zero でないことがわかる。

さて形式的に

$$Y_j(x)=x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}Y_j^{\,k}(x)T_j^{\,k}$$

$$=x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{m=0}^{\infty}G_j^{\,k}(m)x^m$$

$$\sim x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)g_j^{\,k}(m+s)x^m$$

$$(*)\qquad\sim x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)\sum_{m=0}^{\infty}g_j^{\,k}(m+s)x^m$$

$$\sim x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}\Big(y_j^{\,k}(x)-\sum_{s'=0}^{s-1}g_j^{\,k}(s')x^{s'}\Big)$$

$$\sim x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}\Big(e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}-\rho_j}-\sum_{-s+1}^{\infty}g_j^k(-s')x^{s'}\Big)$$

$$\sim\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}e^{\lambda_k x}x^{a_{kk}}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}-x^{\rho_j}\sum_{k=1}^{n}T_j^{\,k}\sum_{s=0}^{\infty}H^k(s)x^{-s}\sum_{s'=1}^{\infty}g_j^k(s-s')x^{s'}$$

$$(*)\qquad \sim \sum_{k=1}^{n} T_j{}^k Y^k(x) - x^{\rho_j} \sum_{s=0}^{\infty} G_j(-s) x^{-s}$$

という関係を得る。こゝで形をとゝのえるために

$$c_j{}^k \lambda_k{}^{a_{kk}-\rho_j}\, \Gamma(\rho_j - a_{kk}) = 1$$

とおいた。一方 $G_j(0)$ に対する初期条件から正整数 s に対しては

$$G_j(-s) = 0$$

であることに注意すれば求める一次結合の係数が決定されたわけである。

但し以上の計算で（＊）印の部分の和の順序を交換して良いという所が形式的で，その解析的意味付けを行なうのには，次の補題が必要である。

$\boxed{\text{Lemma (E.M.Wright)}}$

もし $\varphi(w)$ が右半平面

$$\mathrm{Re}\ w \geqq h > 0 \qquad \left(h > \frac{3}{2} - \mathrm{Re}\,\beta\right)$$

で有界で holomorphic であるとすれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{\Gamma(m+\beta)} x^m = e^x x^{1-\mathrm{Re}\,\beta} O(1) + O(x^h)$$

が $x=\infty$ の sectorial neighborhood

$$|\arg x| \leqq \frac{3}{2}\pi - \delta$$

で成立する。

こゝではその証明には立入らない。この補題を用いて，次の様な結果を得る。

$\boxed{\text{定理 5}}$

$$Y_j(x) \cong \sum_{k=1}^{n} T_j{}^k Y^k(x) + O(x^h)$$

$$h > \mathrm{Max}\left\{1,\ \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\ a_{11},\ \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\ a_{22},\ \ldots,\ \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\ a_{nn}\right\}$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \left\{x :\ |x| \geqq R,\ |\arg(\lambda_k x)| \leqq \frac{3}{2}\pi - \delta\right\}$$

次にこの公式の成立する x の偏角が，固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ の偏角のきめ方に依存することに着目すれば，一つの sector で係数 $\{T_j^k ; k=1,2,\ldots, n\}$ を定めれば，他の sector への接続が定まることに注意しよう。つまり $y_j^k(x)$ の展開

$$y_j^k(x) \cong c_j^k \lambda_k^{a_{kk}-\rho_j} \Gamma(\rho_j - a_{kk}) e^{\lambda_k x} x^{a_{kk}-\rho_j} \sum_{s=1}^{\infty} g_j^k(-s) x^{-s+\rho_j}$$

で常数 $_j^k$ を一定に保って λ_k をたとえば $\lambda_k e^{2\pi i}$ でおきかえれば他の sector での接続公式が得られるというわけである。

参 考 文 献

1. Birkhoff G. D., Collected mathematical papers.
2. Ford, W. B., Asymptotic series-Divergent series. 1960 Chelsea, New York.
3. Horn, J., Über eine lineare Differentialgleichug zweiter Ordnung mit eimem willkürichen Parameter, Math. Ann., 52 (1899) 271-292.
4. Friedrichs, K. O., Special Topics in Analysis. Lecture Notes, New York Univ., 1953-54.
5. Hukuhara, M., Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations differentielles linéaires contenant un paramtre, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Imperial University, Fukuoka, 8 (1937), 249-280.
6. Knobloch, H. W., Zusammenhänge zwischen konvergenten und asymptotischen Entwicklungen bei Lösungen linearer Differentiasystems von Range Eins, Math. Ann., 134 (1958) 260-288.
7. Hopf, L., Fortsetzungs relationen bei der Lösungen der gewöhnlichen linearer Differentialgleichungen, Math. Ann., 111 (1935) 679-712.
8. Heading, J., The Stokes phenomenon and certain n-th order differential equations, Proc. Cambridge Philosophical Soc. 53 (1957) 399-441.
9. Langer, R. E., The asymptotic solutions of ordinary differential equations of the second order, with special reference to a turning point, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 461-490.

10. ______ , The solutions of the differential equations $v''' + \lambda^2 z v' + \mu \lambda^2 v = 0$. Duke Math. J. 22 (1955), 525–542.

11. ______ , The solutions of a class of ordinary differential equations of the third order in a region containing a multiple turning point, ibid, 23 (1956) 93–110.

12. ______ , On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957) 144–191.

13. ______ , Formal solutions and a related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type, ibid, 92 (1959), 371–410.

14. Lees, L. and Lin, C. C., Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, NACA Technical note, No. 1115 (1946)

15. Lin, C. C., and A. L. Rabenstein, On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equation of the fourth order, Trans. Amer. Math. Soc., 94 (1960) 24–57.

16. Masani, P., Ona result of G. D. Birkhoff on linear differential systems, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 696–698.

17. Mckelvey, R. W., The solutions of second order linear differential equations about a turning point of order two, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 103–123.

18. Morawetz, C. S., Asymptotic solutions of the stability equations of a compressible fluids, J. Math. Phys., 33 (1954), 1–26.

19. Okubo, K., On certain reduction theorems for systems of differential equations which contain a turning point,

Prc. Japan Acad., 9 (1961) 544–549.

20. Okubo, K., A global representation of A fundamental set of solutions, and a Stokes Phenomenon for a system of linear ordinary differential equations. J. Math. Soc. Japan, 15 (1963) 268–288.

21. Philipson, L. L., The asymptotic character of the solutions of a class of ordinary linear equations depending on a parameter, Dissertation, U. C. L. A. 1954.

22. Rabenstein, A. L., Asymptotic solutions for $u^{iv}+\lambda^2(zu''+au'+bu)=0$ for large $|\lambda|$, Arch. Rat. Mech. and Anal., 1. (1958) 418–435.

23. Sibuya, Y., Second order linear ordinary differential equations containing a large parameter, Proc. Japan. Acad., 34 (1958), 229–234.

24. ______, Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point, Funk. Ekv., 4 (1962) 29–56.

25. ______, Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a parameter, ibid. 4 (1962) 83–113.

26. ______, Formal solutions of a linear ordinary differential equations of the n-th order at a turning point, Arch. Rat. Mech. Analy., 13 (1963) 206–221.

27. Stokes, G. G., On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent development, Trans. Cambridge Philosophical Soc., 10 (1857) 106–128.

28. Turrittin, H. L., Stokes multipliers for a class of linear differential equations. Trans. Amer Math. Soc. 68 (1950), 304, 329.

29. ______, Asymptotic expansions of solutions of systems of

ordinary differential equations containing a parameter, Contributions to the Theory of non-linear Oscillations II Ann. Math. Studies No. 29, (1952) 81–116.

30. ——, Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff Canonical form. Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963) 485–507.

31. ——, Reducing the rank of ordinary differential equations. Duke Math. J. 30 (1963) 271–274.

32. Wasow, W., The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics, Ann. of Math., 49 (1948) 852–871.

33. Wasow, W., A study of the solution of the differential equation $y^{(4)}+\lambda^2(xy''+y)=0$ for large values of λ, ibid. 52 (1950), 350–361.

34. ——, Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point, ibid. 58 (1953) 225–251.

35. ——, A turning point problem for a system of two linear differential equations, J. Math. Physics, 39 (1959) 257–278.

36. ——, Turning point problems for systems of linear differential equations, Part I, The formal theory, Comm. Pure. Appl. Math., 14 (1961) 657–673.

37. ——, ——, Part II, The analytic theory, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962) 173–187.

38. ——, Lectures on asymptotic thory of ordinary differential equations, Lecture note, Israel Institute of Technology, 1962.

39. Wright, E. M., The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series, Philosophical Trans. Roy. Soc. London, ser. A, 238 (1940) 423–451.

31' H. L. Turritin, Soluable related equations pertaining to turning point problems. Precedings of the Symposium on asymptotic solution of differential equations and their applications. 1964, John Wiley & Sons.