

§1 緒 論

よく知られているように、流体の運動には層流および乱流とよばれる二種類の型がある。そして、流れの代表的な linear dimension L_0 、代表的な速度 U_0 、動粘性率 ν の組合せでえられる無次元のパラメーター、Reynolds 数 $R = L_0 U_0 / \nu$ が大きいときには流れは一般に乱流であることもよく知られた経験事実である。層流は、Reynolds 数が充分小さくて、それに加えられたすべての攪乱がいつでも減衰するような場合に限って可能である。

Reynolds 数が大きくなつて、ある臨界値 R_c をこえると攪乱が増大し、与えられた層流は不安定となる。ところが、この R_c の値は加えられた攪乱の大きさに依存し、ある種の層流では、攪乱を小さくしていくと、それにつれて R_c がいくらかでも大きくなることが知られている。円管 Poiseuille 流、二次元 Couette 流等がその例である。そこで、ただちにつぎの問題が提起される。すなわち、

1) ある与えられた層流は無限小の攪乱に対して究極的に — すなわち無限に大きい Reynolds 数に対しても — 安定でありうるか否か？

2) もし不安定であれば、その臨界 Reynolds 数 R_c の値はいくらであるか？

この問題に対する答を求めることが、いわゆる線型安定理論の主な課題である。

ここでは議論をはつきりさせるために、もつとも簡単な流れとして、互に平行な無限平板の間を定常的に流れる二次元の平行流を考える。また流体は粘性をもつが非圧縮であると仮定する。この仮定は、流速がその流体中での音速にくらべて充分小さい場合に妥当である。板に平行な方向に x 軸を、垂直な方向に y 軸をもつ直角座標系をとる。板の位置は、 $y = y_1, y_2$ で与えられる。ここで二次元平行流というのは、流れが x 方向だけに存在し、しかもその速度分布が y だけの関数であるような流れを意味する。厳密な意味で Navier-Stokes 方程式を満足する二次元平行流は、 y の一次関数である二次元 Couette 流、 y の二次関数である二次元 Poiseuille 流、および両者の組合せでできる流れだけである。しかし、広い意味の境界層流、たとえば平板に一樣流が当たる Blasius 流、平行平板の間へ流入する入口附近の流れ、柱状物体の背後にできる wake、細長い隙間から噴出する jet、同方向に流れる速

* 乱流の発生については、原理的につぎの二通りの可能性がある。一つは、ある Reynolds 数を境にして層流解と乱流解とが互に排他的に存在する場合であり、他の一つは、層流解は全 Reynolds 数にわたって存在するが、Reynolds 数の大きいときには、それが攪乱に対して不安定となり、この攪乱の増大によつて終局的に乱流に移行する場合である。いわゆる層流安定理論では、もちろん後者の可能性を前提としている。この種の議論については巽(1962) 参照。

さの異なる二つの流れの混合領域等も近似的には平行流とみなしうる。この種の“準平行流”を平行流として取扱うことに対する批判もあるが、ここではこの問題にはふれない。ただ、平行流の線型安定理論の結果が初めて実験的に検証されたのは Blasius 流についてであつたことが、この立場を力づけたことを注意しておく。なお、Blasius 流においては板の一方は無限遠点に、jet・wake・混合領域等のような自由境界層流の場合には両方共に無限遠点に遠ざかつた極限を考えなければならないのはもちろんである。

さて問題の定式化はつぎのようにして行われる。まず、上記のような主流（平行流）に無限小振幅の擾乱を加えたものを Navier-Stokes 方程式および連続の式に代入し、擾乱についてこれを線型化する。方程式が一旦線型化されれば、いわゆる重ね合せの原理によつて、任意波形の擾乱を考える代りに、それらを normal mode に分解し、その一つの成分だけを考えれば充分であろう。擾乱をこのような正弦的平面波であると仮定すると、Squire (1933) によつて指摘されたように二次元擾乱のみを取扱えば充分である。そこで擾乱の流れ函数 ψ を

$$\psi(x, y, t) = \text{Re} \{ \phi(y) \exp [i \alpha (x - ct)] \}, \quad (1.1)$$

で表わすと、上述のような手続により、その複素振幅 $\phi(y)$ を支配する方程式が、無次元形で

$$(w - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - w' \phi = -\frac{i}{\alpha R} (\phi^{iv} - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi), \quad (1.2)$$

のようにえられる。これが、これから議論しようとする Orr-Sommerfeld の方程式である。* ここに、 α は擾乱の波数で正の実数、 R は流れの Reynolds 数で正の実数、 c は複素位相速度で、その実部 c_r が擾乱の位相速度を、その虚部 \times 波数 αc_i が擾乱の時間的増幅率を表わす。また、 $w(y)$ は主流の速度分布を表わし、物理的には $y_1 \leq y \leq y_2$ なる実変数 y のみについて定義されたものであるが、以後、必要に応じて、適当な解析接続によつてえられた複素変数 y の解析函数であると考え。そうすると、方程式 (1.2) は考えている領域内の各点で正則であり、その四つの基本解もまた同じ領域内で y の解析函数である。

一方、境界条件は、流れが平板に粘着しなければならないという要請から、ただちに

* 擾乱をこのような normal mode だけに限ることについての批判が Case (1962) によつて行われているが、ここではこれについての議論にはたちいらない。

** 詳しい導出については安定理論の標準的なテキスト、たとえば Lin (1955)、巽 (1962) 参照。

$$\phi(y_1) = \phi'(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_2) = 0. \quad (1.3)$$

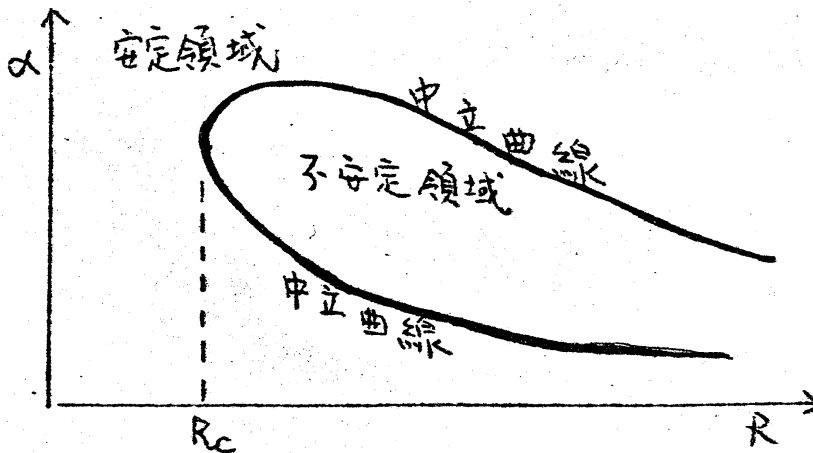
方程式(1.2)の一般解は四つの基本解の線型結合で与えられるが齊次境界条件(1.3)によつて、その解が有意であるためには方程式(1.2)のパラメータ α, R, C の間に、

$$F(\alpha, R, C) = 0, \quad (1.4)$$

なる固有値方程式が成立しなければならない。(1.4)を C について解けば、

$$C_r = C_r(\alpha, R); \quad C_i = C_i(\alpha, R). \quad (1.5)$$

流れ函数(1.1)の形からあきらかなように、ある与えられた α, R に対して、 $C_i \geq 0$ に応じて流れはそれぞれ不安定・中立・安定となる。 (α, R) 一面で、 C_i (または αC_i)一定の値に対する曲線をプロットするのが習慣である。とくに $C_i = 0$ の曲線が中立曲線とよばれるもので、第1図に示すように、通常二つの漸近枝をもつた“舌”状をしている。



第1図： (α, R) 面における中立曲線の一般形

§2 $\alpha R > 1$ に対するOrr-Sommerfeld 方程式の漸近解

すでに述べたように、層流に増幅擾乱が現れるときのReynolds 数の値は一般に1にくらべてはるかに大きい。ここでは、さらに R のみでなく αR の値もまた1にくらべてはるかに大きい場合を考える。ただし、jet, wake, 混合領域等のような自由境界層流に対しては、増幅擾乱が現れるときでも、 αR の値が逆に非常に小さくなるような場合のあることがわかっているが、(Tatsumi-Kakutani (1958))、ここでは、そのような場合は考えない。さて、 αR が1にくらべて充分大きいときには、方程式(1.2)の二種類の漸近解がつきのようにしてえられる。

第一種の漸近解 まず、第一の方法によると、方程式(1.2)の四つの基本解に対応する漸近解が二つずつの二組にわかれて求められる。最初の組は、

$$\phi(y) = \phi^{(0)}(y) + (\alpha R)^{-1} \phi^{(1)}(y) + \dots, \quad (2.1)$$

のように αR の逆べき級数の形でえられ、第一近似 $\phi^{(0)}(y)$ は、(1.2) で形式的に $\alpha R = \infty$ とおいてえられる“非粘性”方程式：

$$(w-c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - w\phi = 0, \quad (2.2)$$

を満足する。高次近似は(2.1)を(1.2)に代入し、 $(\alpha R)^{-1}$ のべきを比較することにより逐次計算することができる。方程式(2.2)は $w_c \neq 0$ であるかぎり $w-c=0$ となる点 y_c において正則特異点をもつ。一般には c が複素数であるから、 y_c もまた複素数値をとる。しかし、中立擾乱に対しては y_c は実数で、もし $y_1 < y_c < y_2$ ならば、 $(\alpha R = \infty)$ のときにはたしかにそうである。ここでは $1 < \alpha R < \infty$ のときでもそうであるとする。) ϕ は流場内のある面 ($y=y_c$) で特異性を示す。しかし、この特異性は非粘性方程式(2.2)に特有のもので、もとの方程式(1.2)においては、この点は正則点である。したがって、この点の近傍では、一般にいかにか αR が大きくても粘性の影響を無視することができない。流体力学者は、 y_c を中心とするこのような薄い層のことを、固体壁近傍にできる Prandtl の境界層に対比して“内部摩擦層 (inner friction layer)”と呼んでいるが、量子力学における W.K.B. 法等にあらわれる類似の二階方程式とのアナロジーで、この点を“転移点 (turning point)”と名付けてもよからう。

さて、(2.2)の解は Frobenius の方法で

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(y) &= (y-y_c) P_1(y-y_c), \\ \phi_2(y) &= P_2(y-y_c) + \frac{w_c^*}{w_c} \phi_1(y) \log(y-y_c) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

のように求められる*。ただし、 P_1, P_2 は定数項から始まる $(y-y_c)$ の昇べき級数である。あきらかに ϕ_2 は $w_c \neq 0$ であるかぎり y_c において対数的特異性を示し無限多価性を示す。

つぎに第二の組は、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{3,4}(y) &= e^{\mp(\alpha R)^{\frac{1}{2}}} Q(y) [f_0(y) + (\alpha R)^{-\frac{1}{2}} f_1(y) + \dots], \\ Q(y) &= \int_{y_c}^y \sqrt{i(w-c)} dy, f_0(y) = (w-c)^{-\frac{5}{4}}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

の形でえられる。高次近似 f_1, f_2, \dots は(2.4)を(1.2)に代入して $(\alpha R)^{-\frac{1}{2}}$

*具体的な流れについて、実際に境界値問題を計算するときには、(2.3)のような“局所的”な解よりも、 α^2 展開による“大域的”な解の方が便利なが多いが、ここでは、転移点が議論の中心であるから(2.3)のような転移点まわりの解の形で求めた。

のべきを比較することにより、逐次計算することができる。この解もまた y_{c1} において代数的特異性を示し、多価函数になる。また、この解は大きなパラメータ $(\alpha R)^{\frac{2}{3}}$ を指数函数的に含むので、第一の組の解(2.1)とちがって y と共に急激に変化する解である。

ここで簡単のために、以下の議論では転移点 y_c は考えている y の変域内で唯一つしか現れず、またその点における $w(y)$ の勾配 w'_c は $y_c \rightarrow$ 実数のとき正であるような場合だけを考えることにする。 $(w'_c < 0$ の場合にも、簡単な修正によつて同様の議論を進めることができる) Blasius 流の場合のように $w(y)$ が y の単調函数の場合には、あきらかにこの条件は満足される。また二次元 Poiseuille 流のように対称性をもつ速度分布の場合にも y の変域を対称面によつて二分することが許されるから、やはり上記の条件は満たされる。一般に非対称の速度分布をもち、したがって y_c が本質的に二つある場合への拡張が、Foote-Lin (1950) によつて行われているが、ここでは割愛する。

第二種の漸近解 上にみたように、第一種の漸近解は転移点 y_c の近傍で特異なふるまいを示すので、つぎのような scale-change を行つて、 y_c 近傍を拡大して観察するのに便利な漸近解を求めよう。

$$\left. \begin{aligned} \phi(y) \equiv x(\eta) &= x^{(0)}(\eta) + \varepsilon x^{(1)}(\eta) + \dots, \\ \varepsilon &= (\alpha R)^{-\frac{1}{3}}, \quad \eta = (y - y_c)/\varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

とおいて、(1.2) に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(0)} &= \eta, \quad x_2^{(0)} = 1, \\ x_3^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \right], \\ x_4^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \right], \\ \alpha_0 &= (w'_c)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

のように四つの第一近似解が一度にえられ、これらはすべて $\eta = 0$ で正則である。高次近似は ε のべきを比較することにより逐次計算することができる。

さて、第一種の漸近解は $\alpha R > 1$ のとき、あるきまつた y の値 ($\infty > |y - y_c| > 0$) に対して有効であり境界値問題の計算には便利であるが、 y_c の近傍ではその特異性のために使えない。一方、第二種の漸近解は $\alpha R > 1$ のとき、あるきまつた η の値 ($|\eta| < \infty$) に対し

て有効な解である。しかし、その有効範囲は y -scale では y_c を中心にして $O[(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}]$ の程度の狭い範囲に限られ、 $\alpha R \rightarrow \infty$ と共に y -scale では唯一点 y_c に収縮してしまうという性質をもっている。ここで、当然つぎの三つの問題が提起される。

(1) 両種の漸近解は、はたして同時に用いることができるか？ すなわち、両種の解の有効領域は互に重複することができるか？

(2) 方程式 (1.2) は、あきらかに y_c において正則であり、一価の解析解を与える筈である。それでは、第一種の漸近解に現れる多価函数の正しい分枝は、どうしてえらばよいか？

この問題に対する、物理的な立場からの“発見的”な答はつぎの通りである。まず、実在の流体では $\alpha R = \infty$ ということはありえない。したがって αR は非常に大きいけれども、一応有限であるとしておくと、第二種の漸近解の有効範囲は $|\eta| = O(1)$ のとき、 y -scale では $O[(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}]$ という小さいが有限の広がりをもった範囲におさまる。さらに $|\eta| > 1$ 、たとえば $|\eta| = O[(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}]$ のあたりを考えると、これはまさしく $|y - y_c|$ が $O(1)$ の領域に対応し、第一種の漸近解の適用可能な範囲に入る。そこで、第二種の漸近解の $|\eta| > 1$ に対するふるまいを、Hankel 函数の漸近展開公式を用いて調べると、

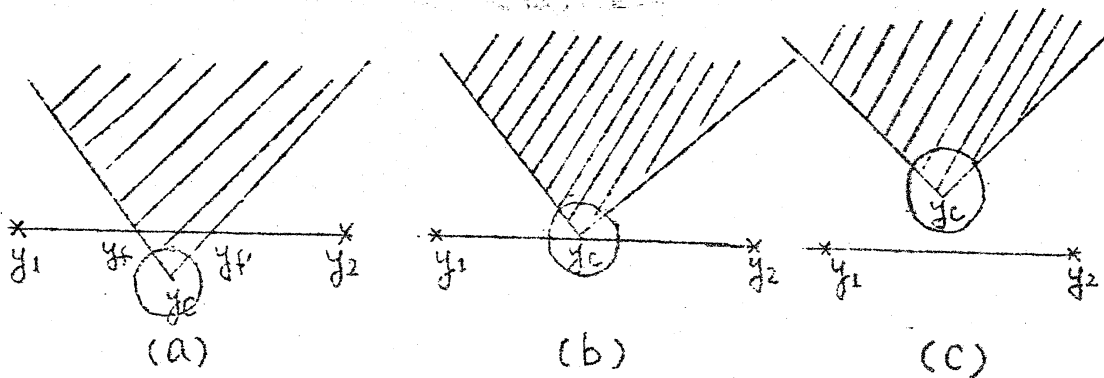
$$\left. \begin{aligned}
 x_1 \sim x_1^{(0)} + \varepsilon x_1^{(1)} &\sim \eta + \frac{\varepsilon w_c''}{2w_c'} \eta^2 \sim \frac{1}{w_c' \varepsilon} \left[w_c'(y-y_c) + \frac{w_c''}{2}(y-y_c)^2 \right] \sim \phi_1, \\
 x_2 \sim x_2^{(0)} + \varepsilon x_2^{(1)} &\sim 1 + \varepsilon \frac{w_c''}{w_c'} \eta \log \eta \sim 1 + \frac{w_c''}{w_c'} (y-y_c) \log(y-y_c) \sim \phi_2, \\
 x_3 \sim x_3^{(0)} &\sim \text{const} \times \eta^{-\frac{5}{4}} \exp\left\{ \frac{2}{3} (\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{5}{4}\pi i\right) \right\} \\
 &\sim \text{const} \times (y-y_c)^{-\frac{5}{4}} \exp\left[-\int_{y_c}^y \sqrt{i\alpha R w_c'(y-y_c)} dy \right] \sim \phi_3, \\
 x_4 \sim x_4^{(0)} &\sim \text{const} \times \eta^{-\frac{5}{4}} \exp\left\{ \frac{2}{3} (\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right) \right\} \\
 &\sim \text{const} \times (y-y_c)^{-\frac{5}{4}} \exp\left[\int_{y_c}^y \sqrt{i\alpha R w_c'(y-y_c)} dy \right] \sim \phi_4,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

のようになり、第一種の漸近解との対応がつく。しかも、上記の第二の問題に対する答も

Hankel 函数の漸近展開に対する制限：

$$-\frac{7}{6}\pi < \arg(\alpha_0 \eta) < \frac{\pi}{6} \quad (2.8)$$

から“自然に”えられる。 y 面で、この“cut”(2.8)を図示すると、“ $w'_c > 0$ ”の場合、減衰・中立・増幅の各場合に応じて、それぞれ第2図の(a),(b),(c)のようになる。



第2図 第一種漸近解の有効領域

斜線をほどこした部分では第一種の漸近解は適用できない。また y_c を中心とする小円は、 $|\eta| = O(1)$ の領域を示し、 $\alpha R \rightarrow \infty$ のときには、ここでも、第一種の漸近解の成立が疑わしいところである。さて減衰が非常にはげしく、 y_1, y_2 が y_f, y_f の間に入るような例外的な場合を無視すると、境界条件を課すべき実軸上の二点 y_1, y_2 はこのような“cut”(2.8)によつて二分されることはない。すなわち、両境界点はcutを横切らない連続曲線— 実際 y_1 を出発して y_c の下側を通つて y_2 に至る曲線— でつなぐことができる。こうして、第一種漸近解の多価函数の正しい分枝を決定することができる。したがつて、固有値問題に関する限り“接続”公式は不要であり、 y_c が $\alpha R \rightarrow \infty$ の極限で y_1, y_2 のいずれにも近づかない限り第一種の漸近解がそのまま使える(もちろん正しい分枝をえらんで)。この点に関しては、 y_1, y_2 がcutによつて分離される量子力学のその場合より簡単である。実際、この場合、“接続”は本質的に重要な問題である。

さて、以上の議論からつぎの結果がただちにみちびかれる。

(1)増幅擾乱の場合には、 αR が充分大きければ、流場内には内部摩擦層は現れず、第一種の漸近解は y 面の実軸上いたるところで有効である。

(2)中立擾乱の場合には、 $y = y_c$ を中心にして $O[(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}]$ の幅をもつた内部摩擦層が流場内に現れ、 y 面の実軸上で、 y_c の近傍を除いて、第一種漸近解は有効である。そして、この層の幅は $\alpha R \rightarrow \infty$ と共に零に近づく。

(3)減衰擾乱の場合には、 αR がいかに大きくても、流場内には“有限の”幅をもつた粘性領域が現れ、第一種漸近解は $\alpha R \rightarrow \infty$ のときでも、 y 面の実軸上 $y_f \leq y \leq y_f$ なる領域で無

効になる。

ここで強調すべきことは、粘性の影響は、 y_c を中心とする小円の他に、第2図の斜線領域においても現れるということである。しかも後者は $\alpha R \rightarrow \infty$ においても有限の拡がりをもっている。この意味で、前者の内部摩擦層と後者の粘性領域とは、はつきり区別しなければならない。そして粘性領域における解のふるまいを詳しく調べるためには、この領域に対する解の接続公式を求めることが不可欠となる。けれども、筆者の知る限りでは、この領域における解のふるまいを具体的な流れについて計算した例はないように思われる。^(追補参照)ただ、中立擾乱の場合の内部摩擦層における解のふるまいは、Tollmien (1929) によつて、第二種の漸近解を用いて数値計算されている。しかし、 αR が非常に大きいときには、この第二種漸近解の有効範囲は y -scale では非常に小さくなるので、とくに強い減衰擾乱に対する全流場での解のふるまいを知るためには、どうしても、 y のより広い範囲にわたり便利に使える接続公式を求めることが望ましい。これについては§3でふれるであろう。

ところで、上の議論は $\alpha R \rightarrow \infty$ のときに、 y_c が y_1, y_2 のいずれにも近づかない場合について妥当なものであるが、ある種の速度分布の場合には、 $\alpha R \rightarrow \infty$ のとき y_c が y_1 または y_2 に(y -scale で)一致する場合がある。代表的な二次元平行流である二次元 Poiseuille 流がその一例である。しかし、この場合でも η -scale では転移点は境界点に一致しない。そこで、このような場合の境界値問題の具体的な計算 — その多くは、中立曲線を求める目的の — では、第一種の漸近解のうち ϕ_3, ϕ_4 型の代りに第二種の χ_3, χ_4 型の解を用いるのが普通である。しかし、 ϕ_2 は普通 χ_2 におきかえずにそのまま使う。これは、 ϕ_2 が ϕ_3, ϕ_4 のように y と共に急激に変化しない解で、 χ_2 を使うことが境界値問題の具体的な計算に不便であるという理由からである。それ故、 ϕ_2 を使うことに対する疑問が当然おこる。しかし、都合のよいことに、Tollmien (1947), Wasow (1953) によつて評価されたように、 ϕ_2 および ϕ_2' に含まれる相対誤差は $|y - y_c| = O(\epsilon)$ のとき、それぞれ ϵ および $1/\log \epsilon$ の程度であり、少なくとも数値的には ϕ_2 を使つて計算しても、致命的な誤差を生じないのである。

最後に、Tollmien (1947) によつて行われた漸近解の改良について簡単にふれておこう。(2.7) で両種の漸近解の対応をつけたとき、 $\chi_3 \rightarrow \phi_3$ 対応で $\frac{2}{3}(\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{4} \pi i} \sim -(\alpha R)^{\frac{1}{2}} Q$ と考えている。そこで、この考えを拡張して、新たに

$$\zeta \equiv (\alpha R)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{2} \int_{y_c}^y \sqrt{w - c} dy \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (2.9)$$

で定義される ζ を $x_3^{(0)}$, $x_4^{(0)}$ の独立変数と考え、これに伴い、(2.4) の f_0 を適当に修正して、つぎのような形の解をくみだす。

$$x_{3,4}^{(0)} = \left(\frac{\zeta}{w-c} \right)^{\frac{5}{4}} \int_{\pm\infty}^{\zeta} d\zeta \int_{\pm\infty}^{\zeta} d\zeta \zeta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1),(2)} \left[\frac{2}{3} (i\zeta)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (2.10)$$

同様に $x_2 \leftrightarrow \phi_2$ 対応をみると (2.3) の対数項を $\epsilon x_2^{(1)}$ でおきかえればよいことが示唆される。したがって、 ϕ_2 は

$$\phi_2 = P_2(y-y_c) + \epsilon x_2^{(1)} P_1(y-y_c)/P_1(0), \quad (2.11)$$

と修正すればよい。このようにしてえられた解は当然のことながら、 y -scale でより広い範囲で有効な第一種型の性格と、転移点における特異なふるまいから逃れるという第二種型の利点をもっているが、“実用的”にはあまり便利な改良であるとは思われない。さらに、この方法では高次近似を求めるための簡単な計算法がない。

§ 3 数学的裏づけ

前節では、Orr-Sommerfeld 方程式の境界値問題を計算する際に、流体力学で実際に用いられている転移点の処理法について述べたが、これらは数学的にみれば、いくつかの点で不完全さを含んでいる。すなわち、(1)第一種漸近解の存在、(2)転移点の直接近傍における解のふるまい、(3)第2図の斜線領域への解の接続、がその主なものである。この節では、主として Wasow によつて展開された数学的理論の主な結果を用いて § 2 の問題点を吟味する。

(1) 第一種漸近解

§ 2 で求めた第一種漸近解が、確かに方程式 (1.2) の厳密な基本解の $\alpha R > 1$ に対する漸近形になっているかどうかということは自明ではない。この点に関連して Wasow (1948) は、方程式：

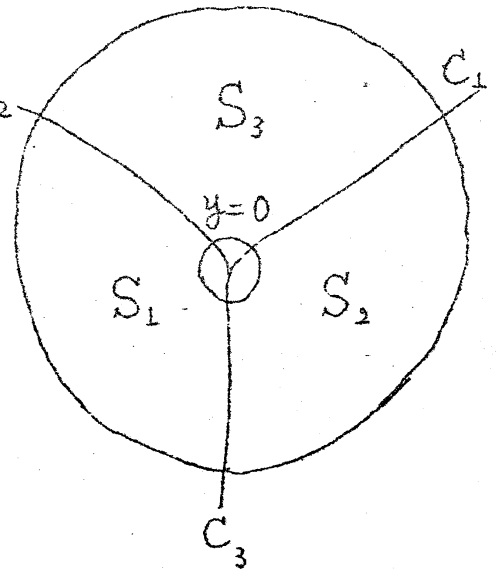
$$L_g[\phi] \equiv \phi^{(4)} + \sum_{j=1}^4 a_j(y) \phi^{(4-j)} + \lambda^2 \sum_{j=0}^2 b_j(y) \phi^{(2-j)} = 0, \quad (3.1)$$

の漸近解の存在に関する四つの定理を証明している。この方程式で、 $a_j(y)$, $b_j(y)$ は $y=0$ の近傍で正則な解析関数で、とくに、

$$b_0(0) = 0, \quad b_0'(0) \neq 0, \quad (3.2)$$

とする。したがって、ここでは原点が転移点である。 λ は $|\lambda| > 1$ なる複素パラメーターで、 $\arg \lambda = \text{const.}$ とする。方程式 (3.1) は、われわれの Orr-Sommerfeld 方程式をその特別な場合として含む。

今、 $0 < \delta \leq |y| \leq a$ で定義される二重連結領域 S を考える。 δ は任意であるが、あるきまつた正の数、 a は $b_0(y)$ の $y=0$ からもつとも近い零点までの距離よりは小さい適当な正の数とする。つぎに $R_e(\lambda Q) = 0$, $Q = \int_0^y \sqrt{-b_0(t)} dt$, で定義される曲線 C_i ($i=1, 2, 3$) を考えると、これは第3図のように $y=0$ で合し、その近傍で S を互に等角の三つの扇形領域 S_i ($i=1, 2, 3$) に分割する。 S_i と C_i との相対位置は図の通りで、 C_j ($j \neq k$) の弧は S_k の一部と考える。 λQ の分枝は、 $\text{Re}(\lambda Q) \geq 0$ に応じて、dominant, subdominant と呼ぶ。 C_k を横切つて λQ の分枝を解析接続すると、それは dominant \leftrightarrow subdominant のように性格を変える。以後、便宜上 S の閉じた subdomain T において、その任意の y に関する導函数と共に、 λ について一様有界な y, λ の任意の函数を $E(T)$



第3図 領域 S とその subdomain S_i .

で表わす。このとき、つぎの四つの定理が成り立つ。

定理1: $A_k(y, \lambda) = e^{\lambda Q} \left[\sum_{\nu=0}^t \sigma_{1\nu}(y) \lambda^{-\nu} + E(S-C_k) \lambda^{-t-1} \right]$ なる漸近形をもつ (3.1) の解 $A_k(y, \lambda)$, ($k=1, 2, 3$) が存在する。ただし、 λQ は S_k において subdominant, t は任意の負でない整数。 $\sigma_{1\nu}$ は対応する“形式的”漸近解の項。(dominant-subdominant solution)。

定理2: $u(y)$ を “reduce” された方程式 ((3.1) で $\lambda \rightarrow \infty$ とおいた方程式) $\sum_{j=0}^2 b_j \phi^{(2-j)} = 0$ の任意の解とすると、 $U_k(y, \lambda) = u(y) + E(S-S_k) \lambda^{-2}$ なる漸近形をもつ (3.1) の解 $U_k(y, \lambda)$, ($k=1, 2, 3$) が存在する。(balanced solution)。

定理3: $u(y)$ を $y=0$ で多価になる $\sum_{j=0}^2 b_j \phi^{(2-j)} = 0$ の解とする。そして $U_k(y, \lambda)$ を $\lambda \rightarrow \infty$ のとき、 $S-S_k$ で $u(y)$ に近づく (3.1) の解とする。このとき $U_k(y, \lambda)$ は S_k の内部で $\lambda \rightarrow \infty$ と共に発散する。(partly balanced solution)。

定理4: $v(y)$ を $y=0$ で正則な $\sum_{j=0}^2 b_j \phi^{(2-j)} = 0$ の解とし、他の解はこの点で一価でないとする。このとき、 $V(y, \lambda) = v(y) + E(S) \lambda^{-2}$ なる漸近形をもつ (3.1) の解 $V(y, \lambda)$ が存在する。(well balanced solution)。

ここで、 A_k が § 2 の $\phi_{3,4}$ に U_k が ϕ_2 に、 V が ϕ_1 に対応していることが了解されるであろう。さらに、三種の解が、すべて形式的漸近解に一致する共通領域は上記の三つの扇形領域の

うちの二つであることがわかる。残る第三の領域が、§2の第2図の斜線領域に他ならない。

(2) 転移点の直接近傍における解

第一種・第二種漸近解の有効範囲の重複に関する発見的な答はずでに§2で述べた。けれども、これは数学的には完全ではない。何故なら上述のように、第一種漸近解の成立範囲は $\delta \leq |y - y_c| \leq a$ であり、一方、第二種のその成立条件は $|\eta| \leq N$ 、(N は任意であるが、あるきまつた正の数)である。したがって $\alpha R \rightarrow \infty$ のときには、あきらかに両者の成立範囲は重複しなくなる。したがって、数学的観点からは、 $\alpha R \rightarrow \infty$ のときにも転移点近傍で一樣に有効な解を求めることが望ましい。この目的のために、Wasow(1953)は、つぎのようなプログラムをたてた。これは二つの段階からなり、まず、与えられた方程式 $L_g[\phi] = 0$ の基本解に近似的に漸近するような "related function" を組立てる。つぎに related function を基本解とする related equation $L_r[\phi] = 0$ と方程式 $L_g[\phi] = 0$ とを比較する。これは与方程式を $L_r[\phi] = L_r[\phi] - L_g[\phi]$ の形にかき、右辺を形式的に非斉次項とみなして Volterra 型の積分方程式に変換する。この積分方程式の kernel の λ に関する大きさの程度を調べることによつて、related function と、与方程式の基本解との漸近的等価性を証明する。

さて、related function を組立てるのに、

$$d^4\Phi/dz^4 + \lambda^2(zd^2\Phi/dz^2 + \Phi) = 0 \quad (3.3)$$

なる "special equation" を考える。この方程式は、Laplace 変換によつて定積分の形で厳密にとくことができる。(Wasow(1950))。この方程式は、もちろん与方程式 $L_g[\phi] = 0$ より、はるかに簡単ではあるが、その本質的な特徴は残している。しかし、まだそのままでは "related equation" としては使えない。そこで、 $L_g[\phi] = 0$ の形式的な漸近解の初項：

$$b_0(y)^{-\frac{5}{4}} \exp\left[\pm \lambda \int_0^y \sqrt{-b_0(t)} dt\right] \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^y \{[b_1(t) - a_1(t)b_0(t)] / b_0(t)\} dt\right]; \quad {}_0u_3(y), \quad {}_0u_4(y), \quad (3.4)$$

と、対応する special equation の形式解の初項：

$$z^{-\frac{5}{4}} \exp\left[\pm \frac{2}{3} \lambda (-z)^{\frac{3}{2}}\right]; \quad {}_0\Phi_3(z), \quad {}_0\Phi_4(z), \quad (3.5)$$

とを比較する。ここに、 ${}_0u_3, {}_0u_4$ は "reduce" された与方程式 $\sum_{j=0}^2 b_j \phi^{(2-j)} = 0$ の二つの独立な解、 ${}_0\Phi_3, {}_0\Phi_4$ は "reduce" された special equation

$z d^2 \Phi / dz^2 + \Phi = 0$ の同様の解である。そうすると、定理 1~4 によつて、(3.4) および (3.5) はそれぞれ y および z のあるきまつた領域でそれぞれ方程式 (3.1) および (3.3) の厳密な基本解の漸近形になつている。すでに述べたように、方程式 (3.3) は厳密に解けるから、 $z=0$ の全近傍の漸近的性質は既知である。しかも、注意すべきことは、“第三の領域”における解の漸近的ふるまいも既知である。そこで、この special equation (3.3) の既知の基本解を $\Phi = \Phi_j(z, \lambda)$, ($j=1, 2, 3, 4$) で表わし、

$$v = x_j(y) \Phi, z = \phi_j(y), j=1, 2, 3, 4 \quad (3.6)$$

なる座標変換を考え、(3.5) を (3.4) に変換するような x_j, ϕ_j をみつける。そうすれば

$$v_j(y, \lambda) = x_j(y) \Phi_j \{ \phi_j(y), \lambda \} \quad (3.7)$$

は (3.4) よりも広い範囲で与方程式の解を近似するであろう。こうして、必要な related function v_j がくみだてられる。このようにして Wasow は問題点(2)と同時に、(3)斜線領域への解の接続、の問題も同時に解決した。その結果によると、partly balanced solution U_k は、 S_k において、“dominant” solution A_k のようにふるまうことがわかつた。

最後に、転移点を含む四階方程式の漸近解の理論は、Wasow の他にも、Langer (1957), Rabenstein (1958), Lin-Rabenstein (1960) らによつても、やや異つた方法で展開されていることをつけ加えておこう。ただ、上に紹介した Wasow の仕事を含めて、この種の論文の詳しい解説、ならびに、相互の長・短についての論評は筆者のように数学に暗いものの任ではない。数学に堪能な方の明快な解説を切望しつつ、この拙稿のペンを擱きたい。

[追補]

具体的な流れについて減衰攪乱 ($\alpha < 0$) の解のふるまいを計算した例はないように思われると記したが、これは筆者の記憶が正しいである。 $\alpha = 1$ という特別な場合についてはあるが Grohne が 2次元 Couette 流および 2次元 Poiseuille 流に対する減衰攪乱の固有函数の分布を計算していることがわか、たのでここに付け加えておく。その結果によると、 $y_f \equiv y \equiv y_f'$ (第2図 (a) 参照) の領域で、解は y について、はげしく振動しており、 αR が非常に大きくても、この領域で粘性を無視できないことを示している。

Grohne, D. (1954): Z. angew. Math. Mech., 34, 344.

引用文献

- Case, K. M. (1962): Proc. Symp. Appl. Math. 13, 25.
- Foote, J. R. - Lin, C. C. (1950): Quart. Appl. Math. 8, 265.
- Langer, R. E. (1957): Trans. Amer. Math. Soc. 84, 144.
- Lin, C. C. (1955): The Theory of Hydrodynamic Stability,
Camb. Univ. Press.
- Lin, C. C. - Rabenstein, A. L. (1960): Trans. Amer. Math.
Soc. 94, 24.
- Rabenstein, A. L. (1958): Arch. Rat. Mech. Anal. 1, 418.
- Squire, H. B. (1933): Proc. Roy. Soc. (A) 142, 621.
- 巽 友正 (1962): 乱流, 新物理学シリーズ6, 槇書店.
- Tatsumi, T. - Kakutani, T. (1958): J. Fluid Mech. 4, 261.
- Tollmien, W. (1929): Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. -
phys. Klasse, 21.
- Tollmien, W. (1947): Z. angew. Math. Mech. 25/27, 33, 70.
- Wasow, W. (1948): Ann. Math. 49, 852.
- Wasow, W. (1950): Ann. Math. 52, 350.
- Wasow, W. (1953): Ann. Math. 58, 222.