

粘性流中の楕円体の相互作用

新潟大 工 脇 屋 正 一

1. 楕円体のまわりの粘性流体の運動を論じる場合, Stokes の運動方程式の解で楕円体: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ の中心に特異点をもつものは, 一般に次のように与えられるであろう。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_0^n \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_{ijk} - 2 A_{ijk} X_n \right), \\ v &= \sum_0^n \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \left(\frac{\partial}{\partial y} A_{ijk} - 2 B_{ijk} X_n \right), \\ w &= \sum_0^n \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_{ijk} - 2 C_{ijk} X_n \right), \\ p &= \mu \sum_0^n \frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \left(\nabla^2 A_{ijk} \right), \quad i + j + k = n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= A_{ijk} \left(x X_n - a^2 \frac{\partial X_{n+1}}{\partial x} \right) + B_{ijk} \left(y X_n - b^2 \frac{\partial X_{n+1}}{\partial y} \right) \\ &\quad + C_{ijk} \left(z X_n - c^2 \frac{\partial X_{n+1}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

($A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$ は任意定数), また

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} - 1 \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

ただし $\lambda(x, y, z)$ は次の方程式の正の根を表わす。

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

(1)の中の幾つかの項は場合によつては次の解の内の同数の項で置代えてもよい。

$$\left. \begin{aligned}
 u' &= \sum_0^n (D_{ijk} \frac{\partial}{\partial x} + E_{ijk} \frac{\partial}{\partial y} - F_{ijk} \frac{\partial}{\partial z}) \frac{\partial^n X_{n+1}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \\
 v' &= \sum_0^n (D_{ijk} \frac{\partial}{\partial y} + G_{ijk} \frac{\partial}{\partial z} - E_{ijk} \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial^n X_{n+1}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \\
 w' &= \sum_0^n (D_{ijk} \frac{\partial}{\partial z} + F_{ijk} \frac{\partial}{\partial x} - G_{ijk} \frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial^n X_{n+1}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \\
 p' &= 0.
 \end{aligned} \right\} (2)$$

2. 静止流体中を運動する二つの楕円体のまわりの流れは、夫々の楕円体の中心を座標の原点とした (1) の型の解を重ね合わせるることによつて近似的に得られるであろう。すなわち、それらを (v_1, p_1) 及び (v_2, p_2) とすれば

$$v = v_1 + v_2, \quad p = p_1 + p_2. \quad (3)$$

(3) には二組の任意定数 $(A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk})$ の型の) が含まれるが、楕円体の表面に於ける境界条件はこれら二組の定数に関する二組の無限一次の連立方程式を与える。二楕円体の距離が大きく相互作用が小さい場合にはこの内の幾つかの式を解いて定数を近似的に決定することが出来るが、更に電子計算機の如き手段を借りて十分な数の定数の値を求めたらどうなるであろうか。同様な方法が適用される類似の幾つかの問題にも関連して興味をもっている。

3. ここでは計算を多少容易にする為、二つの同形の回転楕円体 ($a=c$) の、等しい一様な並進運動を取扱つた。回転対称軸が共に運動方向に垂直な平面内にある場合、楕円体のうける抵抗は、相互作用が小さいときこれで展開した形で次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 D_{x_1} &= 16\pi\mu UR_1 \left[1 - \frac{2R_1}{l} (1 + \sin^2\psi) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4R_1}{l^2} \{ R_1 (1 + \sin^2\psi)^2 + (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2) \sin^2\psi \cos^2\psi \} + \dots \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{y_1} = & -16\pi\mu UR_2 \sin\psi \cos\psi \frac{2R_1}{\ell} \cos\phi_1 \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ R_1 (1 + \sin^2\psi) \right. \right. \\
& \left. \left. + (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2) (1 + \cos^2\psi) + (R_2 - R_1) \sin\phi_2 \cos\phi_2 \frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_1} \right\} + \dots \right], \\
D_{z_1} = & 16\pi\mu UR_1 \sin\psi \cos\psi \frac{2R_1}{\ell} \sin\phi_1 \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ R_1 (1 + \sin^2\psi) \right. \right. \\
& \left. \left. + (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2) (1 + \cos^2\psi) - (R_2 - R_1) \sin\phi_2 \cos\phi_2 \frac{\cos\phi_1}{\sin\phi_1} \right\} + \dots \right],
\end{aligned} \tag{4}$$

ここに

$$R_1 = \frac{1}{K + a^2 L_a}, \quad R_2 = \frac{1}{K + b^2 L_b};$$

$$K = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{b^2 + s}}, \quad L_a = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \sqrt{b^2 + s}},$$

$$L_b = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)(b^2 + s) \sqrt{b^2 + s}}$$

中心に関するモーメントは

$$\begin{aligned}
M_{x_1} = & \frac{64}{3} \pi \mu U \frac{R_1 R_2}{\ell^2} \sin\psi \cos^2\psi (3k^2 \sin\phi_1 \cos\phi_1 \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ (1 + \sin^2\psi) R_1 \right. \right. \\
& \left. \left. + (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2) \cos^2\psi \right\} \right] + \frac{2}{\ell} (a^2 + b^2) (R_2 - R_1) \sin\phi_2 \cos\phi_2 + \dots),
\end{aligned}$$

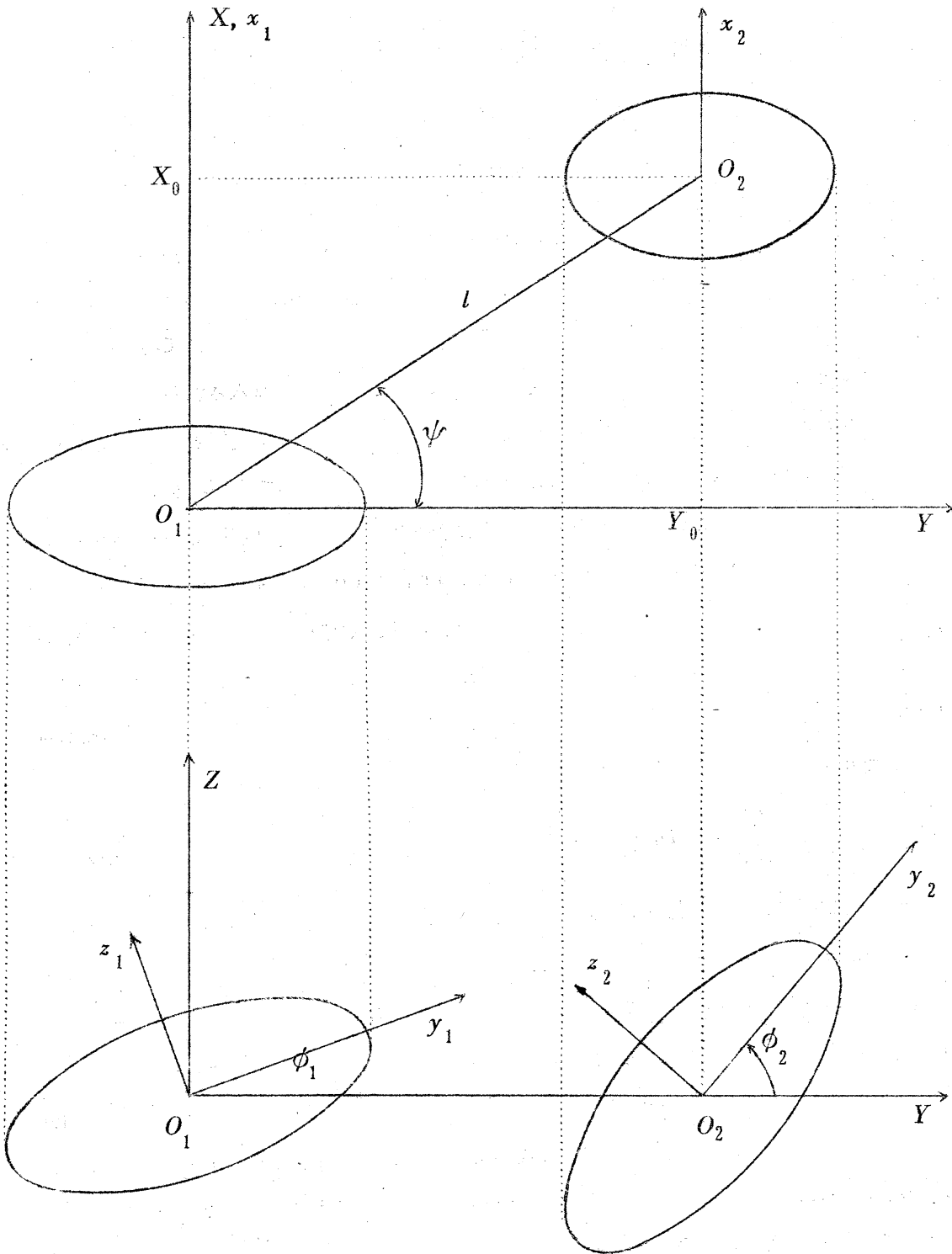
$$\begin{aligned}
M_{y_1} = & \frac{64}{3} \pi \mu U \frac{R_1}{2L_a \ell^2} \cos\psi \sin\phi_1 \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ R_1 (1 + \sin^2\psi) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin^2\psi (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2 - (R_2 - R_1) \sin\phi_2 \cos\phi_2 \frac{\cos\phi_1}{\sin\phi_1}) \right\} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{z_1} = & \frac{64}{3} \pi \mu U \frac{R_1 R_2}{\ell^2} \cos\psi \cos\phi_1 (3k^2 \sin^2\psi \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ R_1 (1 + \sin^2\psi) \right. \right. \\
& \left. \left. + (R_2 \cos^2\phi_2 + R_1 \sin^2\phi_2) \cos^2\psi \right\} \right] + (a^2 + b^2) \left[1 - \frac{2}{\ell} \left\{ R_1 (1 + \sin^2\psi) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$- \sin^2 \psi (R_2 \cos^2 \phi_2 + R_1 \sin^2 \phi_2 + (R_2 - R_1) \sin \phi_2 \cos \phi_2 \frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1}) + \dots \quad (5)$$

(4) 及び (5) に使われている記号は図で説明されている。

これらの結果は球については既に求められている。その最初の項だけを考えて多数の球の影響による抵抗をこれらの和として計算し不均質な流体の見掛けの粘性系数を求める試みは、電子計算機を使つて行われた。(4) 式を基礎にしたの同様な試みは、浮遊粒子の形状効果の議論の為に興味もたれる。



回転対称軸 : y_1, y_2 軸

楕円体の運動方向 : X 軸の負の向き。