数理解析研究所講究録
第7巻 1965年 20-24

衝撃波の構造

東大 宇宙研 小 口 伯 郎

衝撃波の構造に関しては理論的および実験的に数多くの研究がなされている。衝撃波はそれ自身重要な意味をもつばかりでなく，形状が簡単である上境界条件が明確に与えられる点でしばしば気体論的方法の応用，検討の対照となる。 Boltzmann 式そのものによつて現象を解析することは現在のところ殆んど望みがないから，実際には何らかの近似が導入される。

Boltzmann式の難点はその右辺の衝突項の複雑さによつているから，近似としては簡単な衝突模型を取り入れるか，さらにさかのぼつて分布関数そのものを近似して衝突項を取り扱いうる程度に簡単化するかに大別される。前者の例として最近種々の問題に応用されている Krook らの提案になるいわゆるB－G－K模型（Bhatnagar, Gross and Krook[1]）があり，後者の例として分布関数を Maxwellian の線型和と仮定する Mott-Smith の方法がある。ここでは主としてB－G－K模型を出発点とする立場をとることにする。したがつてBoltzmann式の代りにB－G－K式を取り扱うことになる。よく知られているようにそれは（定常一次元問題）

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} = An\,[\,F - f\,] \tag{1}$$

と書かれる。ここで f は分布関数，v_x は粒子速度の x 成分，n は粒子密度， F は粒子の平均速度 u，温度 T および n から定まる Maxwellian で An は衝突頻度である。直ちに見られるように Boltzmann 式に比較して“形式上”非常に簡単になつている。その定性的な性質は例えば Euler, 自由分子流の両極限で一致している。すなわち $n \to \infty$ ($An \to \infty$) で，分布関数 f は局所的 Maxwellian F に一致し，一方 $n \to 0$ ($An \to 0$) で自由分子流に対する $v_x \partial f / \partial x \to 0$ となる。有限な衝突頻度 An に対しては Boltzmann 式からのものとは一致しない。しかしながら Liepmann et al[2]（以下〔2〕として引用する）によつて示されたように，分布 f を Chapman-Enskog 流に

$$f = F + \frac{1}{An} f_1 + \frac{1}{(An)^2} f_2 + \cdots\cdots$$

と展開して (1) 式に代入して第一項まで求めると，それは Boltzmann 式からの分布

(Navier−Stokes式を与える）と定性的ばかりでなく定量的にもかなり類似な表示であることが判つた。一応　B−G−K式が Boltzmann 式の近似として使えるであろうということが判つたが，近似の定量的度合いは現在のところ明らかでない。ここで引用する〔2〕の主なる目的の一つはB−G−K式を簡単な衝撃波の問題に応用してその厳密解を求め，その結果を検討することにあつた。

(1) 式の積分は $v_x>0$ に対して $f=f_+$ ，$v_x<0$ に対して $f=f_-$ とすると

$$f_\pm(v_x\gtrless 0,\ v_y,\ v_z,\ x)=\int_{\mp\infty}^{x}\frac{An}{v_x}F\exp\left\{-\int_{x'}^{x}\frac{An}{v_x}dx''\right\}dx' \tag{2}$$

最低次の３モ

$$n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\vec{v},x)\,d\vec{v} \tag{3}$$

$$u(x)\,n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}v_x f(\vec{v},x)\,d\vec{v} \tag{4}$$

$$3Rn(x)\,T(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[\vec{v}-u(x)]^2 f(\vec{v},x)\,d\vec{v} \tag{5}$$

ここで R は気体常数である。

(3)−(5) 式中 f は (2) によつて与えられるから未知量は n，u，T で，この場合 (4) で与えられる $u(x)\,n(x)$ は一定で $u(x)\,n(x)=u(\infty)\,n(\infty)$ であるから結局 (3)，(5) 式を連立して $n(x)$，$T(x)$ を求めることに帰着する。何れにしても容易に判るように (3) と (5)式は x に関する連立の積分方程式で解析は容易でない。この点が前にふれたB−G−K式の"形式上"の簡単さということになり，事実分布 f，n，u，T などを求めることは Boltzmann式におけると同様難しい。

マツハ数が１に近いとき，N−S式による解析は充分信頼できることが理論的にも実験的にも確められている。なお形式的には任意のマツハ数に対してN−S式を解くことは容易であるから，〔2〕ではN−S式より得られる n_{NS}，u_{NS}，T_{NS} から Maxwellian F_{NS} をつくり，(2) 式から f_{NS} を求め (3)，(5) 式にそれぞれ代入して新らたな n^1，u^1，T^1 を得るという操作を繰り返すことにより n，u，T を最終的に決める方法を提案した。各繰り返し段階が相当な計算量を要することは推察されるが，実際の計算はＩＢＭ７０９４を用いて行われた。x とし

て $-\infty<x<\infty$ の60点がえらばれ，繰り返しは最高26回まで行われた。この方法の最大の弱点は繰り返しの収れんについてで，それについての理論的根拠がないことであろう。したがつて〔2〕で最も努力がはらわれた点は収れんを注意深く検討することであつた。事実もしも収れんが保証されるならば得られた解はB－G－K式の厳密解を与えることになり，その結果を実験事実と比較するとき，衝突模型に関する先験的な仮定の成否が調べられる。収れんの目安として(4)式で与えられる $u(x)\,n(x)$ が取り上げられている。すなわち $u(x)\,n(x)=n(\infty)\,u(\infty)$ ＝一定であるから，各繰り返しの段階で $|u(x)\,n(x)-u(\infty)\,n(\infty)|=\triangle$ が収れんの目度を与える。M＝10 の場合（計算はすべて argon について，$\mu\propto T^{0.817}$，$P_r=1$とした）$x=\pm0.75$ の位置での △ のふるまいは

繰り返し数	1	5	10	16
$x=0.75$	△＝0.0401	0.0072	0.0005	0.0001
$x=-0.75$	△＝0.0540	0.0088	0.0009	0.0001

表 1

この場合数値計算の上からは繰り返しが16回程度で充分収れんしたと見なされる。n，u，T についても同様な性質が見出されている。B－G－K模型に基づく解析の結果で最も特徴的なことはマツハ数が高くなるにしたがつて，衝撃波前方でN－S式からのずれが大きくなるのに後方ではN－S式のものとあまり変りがない点であろう。N－S式の解，Mott-Smith による解では衝撃波前後の対称性がよいのに比較して，大きなマツハ数での影響が前方にのびるB－G－K式の結果は実験的検証をまつべき一つの問題点であろう。流体力学的現象の気体論からの解析の非常に多くのものがB－G－K模型を先験的に受け入れて行われている現状では，その妥当性こそ稀薄気体力学における重要な課題の一つであると強調されてよいと思われる。

〔2〕で提案されたB－G－K式に対する繰り返しによる解析は衝撃波のような簡単な問題に対してもかなりの手数を要する。したがつてこのような方法を単により複雑な問題に応用することは，現在の計算機の能力をもつてしても容易なことではない。このことは Mott-Smith の方法にも云えることで，一般にさらに複雑な問題を解析しようとするとき問題の性質に応じた一層の近似が必要となろう。この場合そのような近似の妥当性は〔2〕で得られたような"厳密解"との比較から判断されよう。例えば筆者[3] はB－G－K衝突模型から出発して高マツハ数における衝撃波の構造をより簡単な近似を用いて取り扱うことを試みた。(1)式の両辺に $(v_x/An)\,\partial/\partial x$ を演算すると

$$\frac{v_x}{An}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v_x}{An}\frac{\partial}{\partial x}f=f-\left[F-\frac{v_x}{An}\frac{\partial}{\partial x}F\right]$$

を得る。ここで〔 〕の項は Chapman–Enskog流の展開の第一近似に相当しN－S式を与える分布であるから，それを f_{NS} とおくと

$$\frac{v_x}{An}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v_x}{An}\frac{\partial}{\partial x}f=f-f_{NS} \tag{6}$$

となる。この式は分布 f と分布 f_{NS} との差を与えている。衝撃波後方では密度 n が増し平均速度$\overline{v_x}$ が減るから左辺の項は小さいから，〔2〕の結果が示すように分布 f は分布 f_{NS} に近いものであることが容易に見られる。一方衝撃波前方では高マッハ数の仮定から $u\simeq\overline{v_x}$ である（この仮定のため Molecular Beam Approximation と呼んだ）。そこでは $\overline{v_x}/An$ （$\approx u/An$ ）は後方での値に比較して充分大きい。したがつて〔2〕に示されたように分布 f は分布 f_{NS} とは異つてくる。以上の考察から（6）式の代りに

$$\frac{u}{An}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{An}\frac{\partial}{\partial x}f=f-f_{NS} \tag{7}$$

が用いられた。

例えば m（粒子質量）に関するモーメントをとると密度に関して

$$\frac{u}{An}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{An}\frac{\partial}{\partial x}\rho=\rho-\rho_{NS}$$

を得る。同様にさらに高次のモーメントをとると u，T に関する微分方程式がそれぞれ得られる。ここで ρ_{NS} はN－S式の解から知られるものであるから問題は結局微分方程式を解くことに帰着された。先に見たようにB－G－K式をそのまま取り扱うと積分方程式を処理しなければならないのに比較して実際上の計算にはかなりな簡単化を与えたことになる。数値計算の結果は ρ，u，Tに関して〔2〕の結果とかなりよい一致を得た。このような簡単化されたものに対しても連立常微分方程式に関する2点境界値問題であるから電子計算機の力に頼らなくてはならない。前述のものとは対照的に，モンテ・カルロ法によつて電子計算機の能力を充分に駆使して衝撃波の構造を明らかにする試みが最近MITのグループ[4] によつて着々成果をあげつつあることを最後に付記して結びとしたい。

文　　　献

1. Bhatnager, P. L., Gross, E. P., and Krook, M. (1954). Phys. Rev. 94, 511.
2. Liepmann, H. W., Narasimha, R., and Chahine, M. T. (1962). Phys. Fluids 5, 1313.
   (また参照　Chahine, M. T., and Narasimha, R. (1965). In "Rarefied Gas Dynamics" (de Leeuw ed.), Academic Press, New York.
3. Oguchi, H. (1965). In "Rarefied Gas Dynamics" (de Leeuw ed.), Academic Press, New York.
4. Haviland, J. K. (1963). In "Rarefied Gas Dynamics" (Laurmann ed.), Academic Press, New York.