数理解析研究所講究録
第8巻 1966年 1-23

差分微分方程式であらわされる系の最適問題

早稲田大学
理工学部 示 村 悦二郎

1. はしがき

入力の変化に対して出力の変化が追従しないいわゆる遅れの現象は，制御系の動特性のもつとも基本的な性格であるが，この遅れという現象も，これを詳細に調べると，ふたつの本質的に異なるものがある。ひとつは，出力の変化が入力の変化にそのまま追従しないことは勿論であるが入力の変化と同時に，出力にもなんらかの形で変化を生じるもので，集中定数系の〃慣性〃による遅れは，その代表的な現象である。これに対して，いまひとつの遅れは，入力に変化を生じてから，ある時間，出力側に全く変化を生じないもので，前者の遅れとは全く異つたメカニズムによつて生じるものである。このように，入力に変化を生じてから，出力にそれに対する応答があらわれるまでの時間を〃むだ時間〃と呼ぶ。入出力間にむだ時間を生じる系の例として，流体管路マテリアル　ハンドリング　システム，非常に長い通信路など，情報の伝達が，物質あるいは場の移動に関連するものをあげることができる。

むだ時間は，制御理論においては，非常に古くから登場している。それは，ひとつには上に上げたようなむだ時間を呈する系を制御する必要があつたことは勿論であるが，いまひとつには，きわめて複雑な系の動特性を数式化するのに（理論的解析が不可能なので），純粋のむだ時間要素と，単純な慣性遅れの結合と仮定して，それらの定数を実験的に決定するという方法がとられてきたことによる。後者の，動特性の近似的表現法は，複雑な動特性を，むだ時間，時定数およびゲインという，わずかなパラメータでとらえようという，きわめて工学的センス豊かな方法であるが，こうして数式化されたモデルから出発して解析をすすめるには，常にその出発点に対する反省を忘れてはならない。

いずれの場合にも，系にむだ時間が含まれると，系の方程式は時間領域では差分微分方程式となり，その取扱いには多くの困難を伴う。制御理論のふたつの大きな面である安定問題と最適問題において，むだ時間の存在は絶えず悩みの種であつた。例えば，安定問題においては，定常な線形系の特性方程式が超越方程式になつてしまうため，安定判別に多くの手数がかかる。まして非線形系，あるいは非定常な系の安定判別は非常に困難である。最適問題においても事情は同様で，従来の方法による，いわゆる最適調整問題においても，解析解がえられないという困難があつた。

評価基準を与えて，最適な制御を実現するという，せまい意味における最適問題は，変分問題として定式化しうる。差分微分方程式であらわされる系に対する変分問題は，古典変分法[1]および最大原理[2]によつて一応の解決が与えられている。しかし，これらを適用して問題を解くには，解析上多くの困難が伴うばかりでなく，これらの方法は，工学的見地からは，甚だ片手落ちの理論のように思われる。それは，差分微分方程式であらわされる系の"状態"は，無限次元であるにも拘らず，有限次元空間で議論している為であつて，工学的には，本来最適"整定"問題として扱うべきものを，有限個の状態のみを制御する最適"到達"問題しか扱われていないということである。

最適問題を変分計算で解こうとすると，一般に二点境界値問題になり，相当の困難が伴うが，差分微分方程式であらわされる系の場合には，さらに，補助変数系に，時間進みを含むという問題を生じ，実際計算をさらに難かしくする。そこで，変分計算によらないで，関数空間における最多傾斜法によつて最適解を求めようとする方法も研究されている。[3]

以下では，差分微分方程式であらわされる系の最適問題に関して，まず工学的見地からの問題点を整理し，次に，可制御性および最短時間問題に関して，従来おこなわれてきた研究とその問題点をのべる。最後に，整定問題の一近似解法に触れる。

2. 系の方程式

まず，"むだ時間要素"を次のように定義する。すなわち，入力を$u(t)$，出力を$x(t)$とすると，その間に

$$x(t) = u(t-\theta)$$

の関係がある要素を，むだ時間要素といい，θをむだ時間という。むだ時間θは，普通定数として扱われることが多いが，詳細に考えれば，時間的に変動する場合，系の他の変動の関数になる場合などの例をあげることができる。しかし，いずれにしても，因果律から$\theta<0$となることはない。

入出力間にむだ時間を呈する系で，これを上に定義した，純粋のむだ時間要素とみなせる場合はむしろ少く，実際には，もつと複雑なダイナミックスをもつているのであるが，これを，純粋のむだ時間要素と，集中定数系（あるいは分布定数系）とが結合されたものとして解析を進める。（Fig.2-1）。このようなモデル化は，その系が本来むだ時間を生じるメカニズムをもつている場合には，かなり現実的で，実在系とよく対応がつくが，分布定数系を応

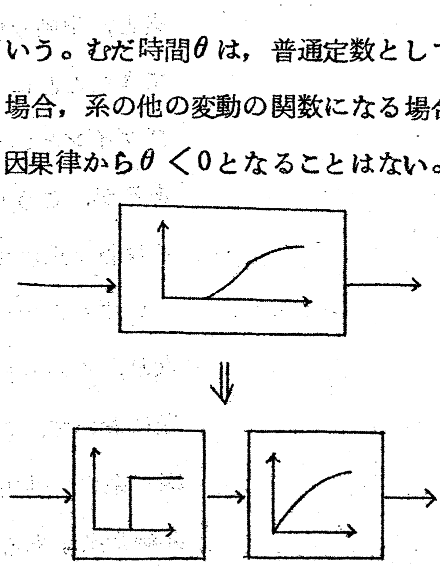
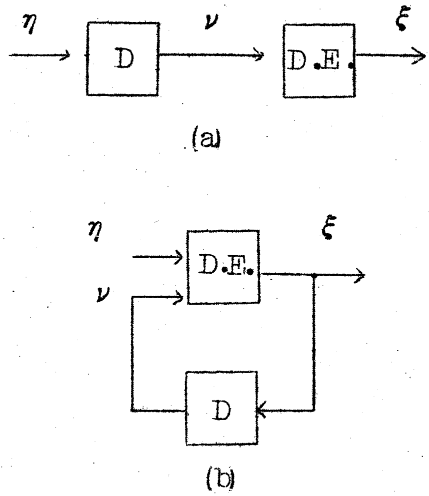


Fig. 2-1

答の面から，むだ時間要素を含む系で近似的に表現する場合などは，実在系との対応は必ずしもつかない。

さて，いずれにしても，むだ時間のモデルとして，むだ時間要素を考えると，次に問題になるのは，むだ時間要素と，他のダイナミツクエレメントとの結合である。Fig.2−2 に，ふたつの基本的な結合が示してある。ひとつは，情報の伝達径路に前向きにむだ時間要素が含まれているもの（Fig.2−2a）いまひとつは，むだ時間要素を経て，情報がフイードバツクされているものである（Fig.2−2b）。以下では，ダイナミツクエレメントは，集中定数系の場合のみを扱う。したがつて，その特性は，常微分方程式系であらわすことができる。



D.E.＝ Dynamic Element

D ＝ Dead Time Element

Fig. 2−2

Fig.2−2a の系では

$$\dot{\xi} = g(\xi, \nu; t), \quad \nu(t) = \eta(t-\theta)$$

であるから，全体として

$$\dot{\xi}(t) = g(\xi(t), \eta(t-\theta); t) \qquad (2-1)$$

となる。またFig.2−2b の系では

$$\dot{\xi} = g(\xi, \nu, \eta; t), \quad \nu(t) = \eta(t-\theta)$$

であるから，全体として

$$\dot{\xi}(t) = g(\xi(t), \xi(t-\theta), \eta(t); t) \qquad (2-2)$$

となる。系全体は，（2−1）あるいは，（2−2）であらわされるエレメントが多数結合して構成されているわけであるから，全体の特性は，

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\theta_1), x(t-\theta_2), \cdots, x(t-\theta_l),$$

$$u(t); u(t-\theta_1), u(t-\theta_2), \cdots, u(t-\theta_k); t) \qquad (2-3)$$

のように書かれることになる。ここで，むだ時間の種類を一種類に限定しても，本質的な議論には関係がないから，以下では，むだ時間は一種類に限定することにする。すなわち

$$\frac{dx(t)}{dx} = f(x(t), x(t-\theta), u(t), u(t-\theta); t) \qquad (2-4)$$

系（２－４）に関して，さらに，ふたつの場合が考えられる。すなわち

$$\frac{dx(t)}{dx} = f(x(t), u(t), u(t-\theta); t) \qquad (2-5)$$

$$\frac{dx(t)}{dx} = f(x(t), x(t-\theta), u(t); t) \qquad (2-6)$$

系（２－５）は，最適制御の立場からは，むだ時間の存在が，特に大きな問題にならない。それは，（２－５）で u に遅れを含まない系に対して最適問題を解き，その解を θ だけ時間的に進めて系に加えれば，（２－５）の最適解となるからである。したがつて，むだ時間を含む系の最適問題で，特に根本的に異つた議論をしなくてはならないのは，（２－６）の形の差分微分方程式であらわされる系である。以下では（２－６）であらわされる系を考え，この系を＂むだ時間を含む系）とよぶことにする。

（２－６）で，x は n －ベクトル（$x \in X$），u は r －ベクトル（$u \in U$）とする。ただし $r \leq n$ である。以下の取扱いの便のため，x，u をそれぞれ $n \times 1$，$r \times 1$ の行列であらわすことにする。系が線形であれば，（２－６）は

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)x(t-\theta) + C(t)\,u(t) \qquad (2-7)$$

と書かれる。A，B は，それぞれ $n \times n$，C は $n \times r$ の行列で，いずれも，t に関して連続であるとする。制御 $u(t)$，$t \geq t_0$ は，区分的に連続であるとする。むだ時間 θ は，先にのべたように，(i) $\theta = \mathrm{const}$，(ii) $\theta = \theta(t)$，(iii) $\theta = \theta(u)$，(iv) $\theta = \theta(x)$ の四通りの場合が考えられるが，以下では，特に断らないかぎり，$\theta = \mathrm{const}$．とする。

さらに以下では，系（2−6)に対する初期関数

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_0 - \theta \leq t \leq t_0 \\ x_0, & t = t_0 \end{cases} \tag{2-8}$$

と，関数fは，（2−6）の（2−8）に対する解の存在と一意性に必要な条件は満しているものとする。

3. 到達問題と整定問題

前節で明らかになつたように，むだ時間を含む系の特性は，差分微分方程式系（2−6）であらわされる。したがつて，この系の状態を規定するには，区間［$t-\theta$，t］におけるxの値をすべて知らなくてはならない。その意味で，この系の状態変数は$x(s)$，$t-\theta \leq s \leq t$であり，状態空間は，無限次元となる。さきにのべた初期関数（2−8）は，この観点からは，初期状態を指定していることになる。一方，n次元ベクトル$x(t)$は，無限次元状態変数$x(s)$，$t-\theta \leq s \leq t$の成分の一部分で，実際の系では，むだ時間要素以外のダイナミツクエレメントの状態に対応している。そこで，このベクトルxをかりに，準状態変数とよび，そのつくる空間Xを準状態空間とよぶことにする。無限次元状態空間の中で系の運動を調べるのは，いろいろの困難を伴うので，n次元空間Xの中で考えることが多いが，Xの中の運動は，いわば，状態空間内の運動のXへの射影と考えられよう。

最適問題は，与えられた初期状態から，ある最終状態へ，与えられた評価関数を最小(大)にするようにして移す制御を求めることであるが，むだ時間を含む系の場合には，最終状態の与え方によつて，根本的に異なるふたつの最適問題が考えられる。ひとつは

$$x(t_1) = x_1, \quad t_1 > t_0$$

の形で与えるもので，この種の問題を，"到達問題"とよぶ。いまひとつは，

$$x(t) = x_1, \quad t \geq t_1 > t_0$$

の形で与えるもので，この種の問題を，"整定問題"とよぶ。

このふたつの問題は，工学的には，全く異なる最適問題で，一般には，整定問題の方が，はるかに広い応用分野をもつている。この問題の差は，ある意味で，普通の微分方程式であらわされる系の最適問題における，自由端の問題に似ている。すなわち，本来，無限個の最終状態を与えるところを，そのうちのn個だけ指定し，他を自由にしているからである。

このように問題を整理してみると，現在までに，得られている変分法，最大原理などの手法はいずれも到達問題にのみ適用できるものであることが分る。

4. 線形系の可制御性[4)]

この節では，線形系

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-\theta) + C(t)\,u(t) \qquad (4-1)$$

の到達問題に関する可制御条件を調べる。いま，$\phi(t)$，$t_0-\theta \leq t < t_0$ を，区分的に連続で，$t \to t_0-0$ に対して極限をもつ関数とする。系（4.1）に対して初期状態

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t) , & t_0-\theta \leq t < t_0 \\ x_0 , & t = t_0 \end{cases} \qquad (4-2)$$

と，区分的に連続な制御 $u(t)$，$t \geq t_0$ が与えられれば，（4.1）の解 $x(t)$，$t \geq t_0$ は次のように書かれる。

$$x(t) = x^0(t) + \int_{t_0}^{t} K(s,t)\,C(s)\,u(s)\,ds \qquad (4-3)$$

ただし，核 $K(s,t)$，$t_0 \leq s \leq t$ は

$$\frac{\partial}{\partial s}K(s,t) + K(s,t)\,A(s) + K(s+\theta,t)\,B(s+\theta) = 0 ,$$

$$t_0 \leq s < t-\theta$$

$$(4-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}K(s,t) + K(s,t)\,A(s) = 0 , \qquad t-\theta \leq s \leq t$$

の$K(t,t)=I$に対する解である。また，$x^0(t)$は，初期状態にのみ関係する項で，

$$x^0(t)=\begin{cases} K(t_0,t)\,x_0+\int_{t_0}^{t}K(s,t)\,B(s)\,\phi(s-\theta)\,ds\;, & t_0\leq t<t_0+\theta \qquad (4-5a)\\ K(t_0,t)\,x_0+\int_{t_0}^{t_0+\theta}K(s,t)\,B(s)\,\phi(s-\theta)\,ds\;, & t_0+\theta\leq t \qquad (4-5b)\end{cases}$$

となる。以下では表現を簡単にするために，$t_0\leq t<t_0+0$ に対しても，(4−5b)を用い，この区間では，右辺第2項の積分の上限をtでおきかえるものとする。また，この時系（4−1）は制御$u(t)$；$t\geq t_0$ によつて，点$x(t)$に到達したという。次に，むだ時間を含む系について可制御性の概念を定義する。これらの定義は，E. Kreindler. P.E. Sarachik の定義の自然な拡張である。[5)]

定義1（可制御，complete controllability）

すべての t_0 に対して，任意の初期状態から系（4−1）をある時刻 $t_1>t_0$で，任意の点$x\in X$に到達させる制御$u(t)$，$t_0\leq t\leq t_1$ が存在するとき，系（4−1）は，到達問題に関して可制御（以下，単に可制御）であるという。

定義2（完全可制御，total controllability）

すべてのt_0に対して，任意の初期状態から系（4−1）を任意の時刻 $t_1>t_0$ で任意の点$x\in X$に到達させる制御$u(t)$，$t_0\leq t\leq t_1$ が存在するとき，系（4−1）は，到達問題に関して完全可制御（以下，単に完全可制御）であるという。

定義3（強(弱)可制御，strong (weak) controllability）

系（4−1）が，制御uの任意のひとつの成分のみによつて（残りの成分はゼロとして）可制御（完全可制御）ならば，系（4−1）は強可制御（強完全可制御）であるといい，そうでないとき，弱可制御（弱完全可制御）であるといい。

(1) 制御に拘束のない場合の可制御条件

まず，制御が任意の値をとりうる場合，すなわち許される制御の集合が，すべての区分的に連続な関数の集合である場合の可制御条件をしらべる。いま，新らしい変数 $x^d(t)=x(t)-x^0(t)$を導入すれば，（4−3）は次のように書き直される。

$$x^d(t)=\int_{t_0}^{t}K(s,t)\,C(s)\,u(s)\,ds \qquad (4-6)$$

(4−6) に対して，Kreindler-Sarachik の条件[5)]を適用すれば，系（4−1）の完

全可制御のための必要十分条件として，任意のゼロでないベクトル$\eta \in X$に対して，$t_0 \leq s \leq t$で

$$V(s,t) = \eta \cdot K(s,t)\,C(s) \not\equiv 0 \tag{4-7}$$

をうる。ただしベクトルηは，$1\times\eta$の行列であらわす。ここで関数$H(s,t)$を

$$H(s,t) = K(s,t)\,C(s) \tag{4.8}$$

と定義し，$n\times r$行列$H(s,t)$の列を$h^j(s,t)$，$j=1,2,\cdots,r$，さらにその要素を$h_i^j(s,t)$，$i=1,2,\cdots,n$とおけば，（4－7）から次の結論が得られる。

補題　1

すべてのt_0に対して，関数$h_i^j(s,t)$，$t_0\leq s\leq t$，$i=1,2,\cdots,n$が，少くともひとつのj（$j=1,2,\cdots,r$）の値に対して一次独立である時に限り，系（4－1）は完全可制御である。

補題　2

すべてのt_0に対して，関数$h_i^j(s,t)$，$t_0\leq s\leq t$，$i=1,2,\cdots,n$が，すべてのj（$j=1,2,\cdots,r$）の値に対して一次独立であるときに限り，系（4－1）は強完全可制御である。

ここで，行列$A(t)$，$B(t)$および$C(t)$が，すべてのtに関して解析的であれば，線形差分微分方程式（4－4）の解として定義される核$K(s,t)$，$t_0\leq s\leq t$は，有限個の点$S=t-\theta$，$t-2\theta,\cdots,t-k\theta\geq t_0$を除いて，すべての$t_0\leq s\leq t$に対して$s$に関する解析関数になる。したがつて，このときには，条件（4－7）が全区間$t_0\leq s\leq t$で成立することと，部分区間$t-\theta\leq s\leq t$で成立することとは同値になる。一方，この部分区間では，$K(s,t)$は（4－4）から，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial s}K(s,t) + K(s,t)\,A(s) = 0$$

の解であることが分る。ところが，この方程式はまた

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + C(t)\,u(t) \tag{4-9}$$

に対応する随伴系でもあり，したがつて関数 $H(s, t)$ は，この部分区間では，系 (4−9) に対する関数 $H(s, t)$ と等しい。以上のことから，次の結論をうる。

定理 1

行列 $A(t)$，$B(t)$ および $C(t)$ が解析的であれば，系（4−1）と系（4−9）は可制御性に関して同等である。

この結果は，上述の条件のもとでは，系（4−1）の右辺に，むだ時間の項 $B(t)x(t-\theta)$ があつてもなくても，系（4−1）の可制御性には全く影響がないという興味ある事実を示している。特に，定常な系，すなわち行列 A，B および C が定数の場合は，その可制御条件は，上の結果から

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Cu(t)$$

の可制御条件に一致するから，次の結果をうる。

系

(1) 定常な系（4−1）は，$\mathrm{rank}[C \ AC \ A^2C \cdots\cdots A^{n-1}C] = n$ のときに限り完全可制御である。

(2) 定常な系（4−1）は，すべての j（$j=1, 2, \cdots, r$）の値に対して，$\mathrm{rank}[c^j \ Ac^j \ A^2c^j \cdots\cdots A^{n-1}c^j] = n$ のときに限り強完全可制御である。ただし c^j，$j=1, 2, \cdots, r$ は行列 C の列である。

(2) 制御に拘束のある場合の可制御条件

ここでは，系（4−1）において制御 u が，空間 U 内のある与えられた集合 Ω 内の点のみをその値としてとりうる場合の可制御条件をしらべる。すなわち，

$$u \in \Omega . \qquad (4-10)$$

したがつて，この場合には，許される制御の集合 F は，（4−10）の関係を満足するすべての区分的に連続な関数の集合である。ここで集合 Ω は，r 次元の有界な閉凸体で，U の原点を含むと仮定する。はじめに，以下の議論で必要となる補題を証明なしに示す。

補題 3 (J.P. LaSalle[6])

A を X 内の凸集合とし，X の原点を含むとする。任意の数 M と，任意のゼロでないベクトル $\eta \in X$ に対して，$\eta \cdot y > M$ となるベクトル $y \in A$ が存在するならば A=X である。逆に任意の

$y \in A$に対して$\eta \cdot y < +\infty$となるベクトル$\eta \in X$が存在するならば$A \fallingdotseq X$である。

制御に拘束のある場合の可制御条件は，次のようにまとめられる。

定理 2

すべての t_0 と，任意のゼロでないベクトル$\eta \in X$に対して，次の条件が成立する時に限り系(4−1)は拘束（4 − 10）のもとで可制御である。

(i) $\eta \cdot K(s, t)\, C(s) \lneqq 0 \quad , \quad t_0 \leq s \leq t$

(ii) $$\frac{m \max_{s \in E} \| K(s, t) \|}{\frac{1}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s, t)\, C(s) \|\, ds} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty$$

(iii) $$\int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s, t)\, C(s) \|\, ds \longrightarrow \infty, \quad t \to \infty$$

ただし $E = [t_0, t_0 + \theta]$, $|\eta| = (\eta \cdot \eta)^{\frac{1}{2}}$ である。

証 明

まず，集合$R(t_0, t)$, $S(t_0, t)$ を次のように定義する。

$$R(t_0, t) = \left\{ x : x(t) = \int_{t_0}^{t} K(s, t)\, C(s)\, u(s)\, ds \;;\; u(t) \in F \right\} \tag{4-11}$$

$$S(t_0, t) = \left\{ x : x(t) = x^0(t) + \int_{t_0}^{t} K(s, t)\, C(s)\, u(s)\, ds \;;\; u(t) \in F \right\} \tag{4-12}$$

結局，拘束（4 − 10）をうける系（4 − 1）の可制御性は，すべての t_0 と任意の初期状態に対して，集合$S(t_0, t)$ が任意に大きなtの値に対して，全空間Xと一致することと同値である。容易に分るように集合$R(t_0, t)$ と $S(t_0, t)$ は凸である。

十分：

(a) まず，すべての $t_0 < T_1 \leq t$ に対して，$S(t_0, t)$ がXの原点を含むようになる時刻T_1 が存在することを示す。すなわち，すべての $t_0 < T_1 \leq t$ に対して

$$-x^0(t) = \int_{t_0}^{t} K(s, t)\, C(s)\, u(s)\, ds$$

となる $u(t) \in F$, $t \geq t_0$ が存在する。事実，まず斉次解$x^0(t)$ は次のように評価される。

$$\|x^0(t)\| \leq \|K(t_0, t)\| \cdot \|x_0\| + \int_{t_0}^{t_0+\theta} \|K(s, t)\| \cdot \|B(s)\phi(s-\theta)\| ds$$

$$\leq \max_{s\in E} \|K(s,t)\| \{ \|x_0\| + \theta \cdot \sup_{s\in E} \|B(s)\phi(s-\theta)\| \}$$

$$= \mu . \max_{S\in E} \|K(s, t)\| \tag{4-13}$$

ただし

$$\mu = \|x_0\| + \theta \cdot \sup_{S\in E} \|B(s)\phi(s-\theta)\| \quad .$$

一方，ベクトル$x\in R(t_0, t)$の任意のベクトルηの方向の大きさは

$$\frac{\eta \cdot x}{|\eta|} = \frac{1}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \eta \cdot K(s, t)\ C(s)\, u(s)\, ds \tag{4-14}$$

である。ここで制御を

$$u(s) = a \cdot \mathrm{sgn} [\eta \cdot K(s, t)\ C(s)] \tag{4-15}$$

とえらべば，(4 − 15) は，あるゼロでない数aに対して，許される制御になる（以下では$a > 0$と仮定する)。(4−15)を(4−14) に代入すると，

$$\frac{\eta \cdot x}{|\eta|} = \frac{a}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \eta \cdot K(s,t)\ C(s) \cdot \mathrm{sgn} [\eta \cdot K(s,t)\ C(s)]' ds$$

$$= \frac{a}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \|\eta \cdot K(s, t)\ C(s)\| ds$$

となる。一方 (4 − 13) に定理の条件を適用すれば $T_1(\frac{a}{\mu}) \leq t$ に対して

$$\|x^0(t)\| < \frac{a}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \|\eta K(s,t)\ C(s)\| ds$$

をうる。したがつて，連続曲線$-x^0(t)$は，すべての$t_0 < T_1(\frac{a}{\mu}) \leq t$で集合$R(t_0, t)$に含まれる。

(b) 次に任意の数Mに対して，時刻T(M)が存在し，すべての$T(M) \leq t$と任意のゼロでない$\eta \in X$に対して，$\eta \cdot x > M$となるベクトルxが$S(t_0, t)$に存在することを示そう。事実，積

η ・ xは次のように書ける。

$$\eta \cdot x = \eta \cdot x^0(t) + \int_{t_0}^{t} \eta \cdot K(s, t)\ C(s)\, u(s)\, ds$$

この式の右辺第一項は次のように評価される。

$$|\eta \cdot x^0(t)| \leq |\eta|\ \| x^0(t) \| \leq |\eta| \cdot \mu \cdot \max_{s \in E} \| K(s, t) \|$$

また，右辺第二項は，u(s)を (4−15) のようにえらべば

$$\int_{t_0}^{t} \eta \cdot K(s, t)\ C(s)\, u(s)\, ds = a \int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot k(s, t)\ C(s) \|\, ds$$

となる。一方，定理の条件から，任意のMに対して，$T_2(M)$ が存在して，すべての $T_2(M) \leq t$ に対して

$$\int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s, t)\ C(s) \|\, ds > M$$

となる。結局

$$\eta \cdot x \geq -|\eta| \cdot \eta \max_{S \in E} \| K(s, t) \| + a \int_{t_0}^{t} \| \eta\, K(s, t)\ C(s) \|\, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s, t)\ C(s) \|\, ds \left\{ a - \frac{\mu \cdot \max_{S \in F} \| K(s, t) \|}{\frac{1}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s, t)\ C(s) \|\, ds} \right\}$$

となるから，任意の $\varepsilon < \frac{a}{\mu}$ とMに対して

$$T = \max \left\{ T_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right),\ T_2\left(\frac{M}{a - \varepsilon}\right) \right\}$$

とおけば，すべてのT≦Tに対して，$\eta \cdot x > M$となる。

したがつて補題3から，すべての t_0 と，任意の初期状態に対して，T≦tで，$S(t_0, t) = X$ が示された。

必要：

(a) 条件(i)は，制御に拘束がない場合にも，系（4－1）が可制御であるために必要である。

(b) 条件(ii)が成立しなかつたとしよう。すなわち，ある数$C>0$と，あるゼロでないベクトル$\eta\in X$に対して，$t_0<T(c)\leq t$で，$K(s,t)$の少なくともひとつの要素$k_i^j(s,t)$に対して

$$\frac{|k_i^j(t_0,t)|}{\frac{1}{|\eta|}\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds}\geq C$$

となる。このとき，$R(t_0,t)$，$T\leq t$ の任意のベクトルxのηの方向の大きさは　$m=\max_{u\in\Omega}\|u\|$ とすると，次のように評価される。

$$\frac{1}{|\eta|}\int_{t_0}^{t}\eta\cdot K(s,t)C(s)u(s)\,ds\leq\frac{m}{|\eta|}\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds\leq\frac{m}{C}|k_i^j(t_0,t)|$$

一方，初期状態を特に，$\varphi(t)=0$，$t_0-\theta\leq t<t_0$，$x_0=\alpha\eta'$，$\alpha>0$ とすると，これに対応する斉次解について次の関係が得られる。

$$\|x^0(t)\|=\alpha\|K(t_0,t)\eta'\|\geq\alpha|k_i(t_0,t)\eta'|\geq\alpha|\eta^j|\cdot|k_i^j(t_0,t)|$$

したがつて系（4－1）は，$\alpha>\frac{m}{c|\eta^j|}$ なる初期点からは，原点に達することができない。

(c) 条件(iii)が成立しなかつたとしよう。すなわち，ある数$C'>0$と，あるゼロでないベクトル$\eta\in X$に対して，$t\geq t_0$ で

$$\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds\leq C'$$

であるとする。このとき，このようなベクトルηに対して

$$\begin{aligned}\eta\cdot x&\leq|\eta|\cdot\|x^0(t)\|+m\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds\\&\leq|\eta|\cdot\mu\cdot\max_{s\in E}\|K(s,t)\|+m\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds\\&=\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds\left\{m+\frac{\mu\cdot\max_{s\in E}\|K(s,t)\|}{\frac{1}{|\eta|}\int_{t_0}^{t}\|\eta\cdot K(s,t)\,C(s)\|\,ds}\right\}\end{aligned}$$

となり，すべての $t \geq t_0$ に対して $\eta \cdot x < +\infty$ となる。したがつて，集合 $S(t_0, t)$ は，いかなる $t \geq t_0$ に対しても全空間 X と一致することはない。 （証明終）

系

(1) すべての t_0 と，任意のゼロでないベクトル $\eta \in X$ に対して，次の条件が成立するときに限り，系（4－1）は拘束（4－10）のもとで，原点へ可制御である。

(i) $\eta \cdot K(s, t)\, C(s) \not\equiv 0\ , \quad t_0 \leq s \leq t$

(ii) $$\frac{\max_{s \in E} \| K(s,t) \|}{\frac{1}{|\eta|} \int_{t_0}^{t} \| \eta \cdot K(s,t)\, C(s) \| \, ds} \to 0\ , \ t \to \infty$$

この条件に対するひとつの十分条件は

$$\max_{s \in E} \| K(s,t) \| \to 0\ , \quad t \to \infty$$

である。

(2) 定常な系（4－1）は，次の条件が成立するとき，拘束（4－10）のもとで，原点へ可制御である。

(i) $\mathrm{rank}[\, C \ AC \ A^2C \ \cdots\cdots \ A^{n-1}C \,] = n$.

(ii) $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq \delta < 0$; $i = 1, 2, \cdots\cdots$, ただし，λ_i は特性方程式 $\det(A + Be^{-\lambda\theta} - \lambda I) = 0$ の根である。

以上に，むだ時間を含む線形系の到達問題に関する可制御条件を考察した。可制御性の概念は単に最適制御の存在条件という，いわば実用的な目的のためばかりでなく，これに双対な概念である可観測性と共に，線形系の本質的構造を解明する重要な思想である。[7] むだ問間を含む系の場合には，この双対の組として考える可制御性と可観測性の概念は，上に考えた準状態空間におけるものではなく，無限次元の状態空間における（整定問題に関する）ものであつて，現在のところ残念ながら，これについて触れることができない。

5. 線形系の最短時間問題[8)]

この節では，定数係数の線形差分微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\theta) + Cu(t) \tag{5-1}$$

であらわされる系の最短時間問題に関して，最適制御の形，その存在と一意性のための条件，および実際に最適制御を決定する方法について考察する。(5−1)で，x，uはそれぞれ，n次元およびr次元ベクトル（$r \leq n$）とし，これらを列ベクトルであらわす。また，uは拘束$u \in \Omega$をうけ，Ωを有界な閉凸多面体とする。さらにu(t)は，区分的に連続な関数とする。すなわち，この節で考える，許される制御の集合$\mathscr{T}$は，$u \in \Omega$をみたすすべての区分的に連続な関数の集合である。

最短時間問題は，次のように定式化される。系（5−1）に対して，初期状態

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_0 - \theta \leq t < t_0 \\ x_0, & t = t_0 \end{cases} \tag{5-2}$$

と，目標終点

$$x(t_1) = x_1 \tag{5-3}$$

が与えられている。系（5−1）を，初期状態（5−2）から，目標終点（5−3）に到達させる制御$u(t) \in \mathscr{T}$，$t_0 \leq t$ が少くともひとつ存在するとき，それらのうちから，最小の到達時間 $t_1 - t_0$ を与えるもの，すなわち

$$J = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt$$

を最小にするものを求めよ。

この問題に最大原理を適用する。まずH関数，および補助変数系は，それぞれ次のようになる。

$$H = -1 + pAx(t) + pBx(t-\theta) + pCu(t) \tag{5-4}$$

$$\frac{d\,p(t)}{d\,t} + p(t)\,A + p(t+\theta)\,B = 0\,, \qquad t_0 \leq t < t_1 - \theta$$

$$\frac{d\,p(t)}{d\,t} + p(t)\,A = 0\,, \qquad t_1 - \theta \leq t \leq t_1 \tag{5-5}$$

最短時間問題では，(5−4) から分るように，H関数をそのまま用いるよりも，次式で定義される関数H^*を用いる方が便利である。

$$H^* = p\,A\,x(t) + p\,B\,x(t-\theta) + p\,C\,u(t)$$

また，関数H^*と，第3項$p\,C\,u$とは，uに関して同時に最大になるから，H^*の最大を考えるかわりに，$p\,C\,u$の最大を考えればよい，そこで

$$P(p(t)\,) = \max_{u \in \Omega} p(t)\;C\,u(t) \tag{5-6}$$

とおこう。このとき，系 (5−1) の最短時間問題に対する最大原理は次のようにあらわされる。

制御$u(t) \in \mathscr{F}$，$t_0 \leq t \leq t_1$が，系 (5−1) の最短時間制御であるためには，次の条件を満足する (5−5) のゼロでない解$p(t)$が存在することが必要である。

(i) すべての $t_0 \leq t \leq t_1$ に対して最大条件

$$P(\,p(t) = p(t)\;C\,u(t)$$

が成立する。

(ii) $t = t_1$ において

$$p(t_1)\,A\,x(t_1) + p(t_1)\;B\,x(t_1-\theta) + p(t_1)\;C\,u(t_1) > 0$$

以下の議論を通じて，次の仮定をおこなう。すなわち

"多面体Ωの稜のひとつに平行な任意のベクトルをwとするとき，任意のゼロでないベクトルp_1に対して，積$p_1\,K(s,t)\,C\,w$は，区間$t_0 \leq s \leq t_1$で，恒等的にゼロになることはない"。

すなわち $t_0 \leq s \leq t_1$ に，いかなる有限な長さの区間をとつても，次の関係が成立する。

$$p_1 \cdot K(s, t_1)\, Cw \lneqq 0 \quad . \quad t_0 \leq s \leq t_1 \tag{5-7}$$

また，いま考えている系では，行列A，B，Cが定数であるから，前節でのべたのと同じ理由で(5−6)は次の命題と同値である。

"ベクトル Cw，ACw，A^2Cw，…，$A^{n-1}Cw$ は一次独立である。" また，特に，Ωが平行多面体の場合は，$w = (0, 0, \cdots, 0, w_j, 0, \cdots, 0)$，$w_j \neq 0$ の形をしているから

$$p_1 K(s, t_1)\, Cw = p_1 K(s, t_1)\, c^j w_j \lneqq 0 \tag{5-8}$$

あるいは

$$p_1 K(s, t_1)\, c^j \lneqq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, r$$

となり，系(5−1)が，強完全可制御であることが分る。逆に，系(5−1)が 強完全可制御ならば，任意の $p_1 \neq 0$ に対して(5−7)が成立し，これから $w = (0, 0, \cdots, 0, w_j, 0, \cdots, 0)$，$w_j \neq 0$ に対して，$p_1 K(s, t)\, Cw \lneqq 0$ となる。結局Ωが平行多面体の場合は条件(5−6)は，次の命題と同値である。"系(5−1)は強完全可制御である。"

(1) 最適制御の形

$p(t)$を(5−5)の任意のゼロでない解とし，この$p(t)$に対して(5−6)を満足する制御$u(t)$，$t_0 \leq t \leq t_1$ を，補助変数$p(t)$に対応するextremal controlとよぶ。最適制御も，勿論extremal controlのひとつである。(5−6)のpCuは，uに関して線形であるから，多面体Ωの頂点で最大値をとるか，ある境界面上いたるところで最大値をとるかのいずれかである。いま，ある時刻tで，$p(t)Cu(t)$が，ある境界面Γ上のいたるところで最大になつたとすると，Γをかこむ稜のひとつに平行な任意のベクトルnに対して

$$p(t)\, Cw = 0 \tag{5-9}$$

となる。一方，(4−4)と(5−5)を比較すれば，任意のベクトルp_1に対して，

$$p_1 \cdot K(t, t_1) = p(t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$p(t_1) = p_1$$

の関係があることが分る。したがつて (5-8) は $p(t_1) = p_1$ として，次のように書き直される。

$$p_1 K(t, t_1) C w = 0$$

ところが，この関係は，(5-6) により，有限個の t の値に対してのみ成立する。したがつて次の結論をうる。

定理 1

補助変数系 (5-5) の任意の解 $p(t)$ に対して，extremal control はただひとつ存在し，多面体 Ω の頂点を順次その値としてとる区分的に一定な関数になる。

系

系 (5-1) で，$|u^j| \leq 1$，$j = 1, 2, \cdots, r$ の場合は extremal control は $u^j(t) = \mathrm{sgn}\, p(t) c^j$，$j = 1, 2, \cdots, r$ となる。

上の議論から分るように，系 (5-1) の最短時間問題の議論は，微分方程式系であらわされる線形系の最短時間問題に関して，ポントリヤーギンらによつて研究された方法[9]と，ほとんど並行しておこなわれるので，以下では，主として，結論のみを示す。

(2) 最適制御の存在

定理 2

初期状態 (5-2) から，目標終点 x_1 へ系を到達させる制御が少くともひとつ存在するならば系を同じ初期状態から点 x_1 へ到達させる最適制御が存在する。

定理2 の条件は，系 (5-1) が拘束 $u \in \Omega$ のもとで可制御であれば，明らかにみたされる。また逆に，任意の初期状態から，任意の点へ到達させる最適制御が存在すれば，系は拘束 $u \in \Omega$ のもとで可制御であるから，次の結論が得られる。

定理 3

任意の初期状態から，任意の点へ到達させる最適制御が存在するための必要十分条件は，系が拘束 $u \in \Omega$ のもとで可制御であることである。

また，この結論と，前節の定理 2 の系(2) とから，次の系が得られる。

系

多面体 Ω が空間 U の原点を含み，系 (5-1) の特性方程式 $\det(A + Be^{-\lambda\theta} - \lambda I) = 0$

の根の実数部がすべてある負の数より小さければ，任意の初期状態から，系を空間Xの原点へ到達させる最適制御が存在する。

(3) 最適制御の一意性

定理 4

系 (5−1) を初期状態 (5−2) から，目標終点 x_1 へ到達させる最適制御が存在すれば，ただひとつに限る。

この結論は，extremal control の一意性の状件 (5−6) を用いて証明される。逆に最適制御がただひとつ存在するならば (5−6) が成立する。すなわち，(5−6) は，最適制御が一意的であるための必要十分条件である。また，特にΩが平行多面体であれば，最適制御が一意的であるための必要十分条件は，系が強完全可制御であることである。

(4) 最短時間問題の解法

最短時間制御を実際に決定するには，補助変数系 (5−5) の境界値 $p(t_1) = p_1$ を求めなくてはならない。この問題は，微分方程式であらわされる線形系の場合にも，同じく生じる困難で，いろいろな解法が示されている。むだ時間を含む系では，それ以外に，微分方程式であらわされる系にはみられない困難がある。それは，補助変数系 (5−5) が，時間進みを含むことで，そのため一般にこれを t の増加する方向に解くことができない。さいわい，最短時間問題では，補助変数系が p だけに関して完結した形になつているので，この系に対して逆時間系を定義して解を求めることができる。[10] このように，逆時間系を導入して解ける問題は，最短時間問題の他，次のような評価関数をもつ最適問題がある。

(i) $J = \frac{1}{2} x'(t_1) G x(t_1)$, $G > 0$

(ii) $J = \int_{t_0}^{t_1} (u^2(t) + w)\, dt$, $w > 0$

(iii) $J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\, dt + \frac{1}{2} x'(t_1) G x(t_1)$, $G > 0$

(iv) $J = \int_{t_0}^{t_1} \{ |u(t)| + w \} dt$, $w > 0$

(v) $J = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)|\, dt + \frac{1}{2} x'(t_1) G x(t_1)$, $G > 0$

一方，以上のような方法では解けない例として

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x'(t)\ G(t)\ dt$$

をあげることができる。この問題の補助変数系は

$$\frac{d\,p(t)}{d\,t} + p(t)\,A + p(t+\theta)\,B = x'(t)\,G \ , \quad t_0 \leq t < t_1 - \theta$$

$$\frac{d\,p(t)}{d\,t} + p(t)\,A = x'(t)\,G \ , \quad t_1 - \theta \leq t \leq t_1$$

となり，時間進みと時間遅れを同時に含む連立方程式として扱わなくてはならず，上のようにして解くことができない。

6．整定問題の近似解法

むだ時間を含む系の状態変数は，先にのべたように，$x(s)$，$t-\theta \leq s \leq t$ で，無限次元となり，取扱いが困難になる。そこで，実際計算のためには，これを，有限次元のベクトルで近似的に表現したい。そのために，例えば区間 $t-\theta \leq s \leq t$ を長さ θ/k の小区間に分割し，各分割点における $x(s)$ の値をそれぞれ新らしい変数と考え，この組で $x(s)$ をおきかえてみる。すなわち $x(t) = x$ ，$x(t-\theta) = x_{(1)}$ ，$x(t-\theta+\delta) = x_{(2)}$ ，…… ，$x(t-\delta) = x_{(k)}$ とおき，ベクトル $\underline{x} = (x, x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(k)})$ を考える。ただし $\delta = \theta/k$ である。また，新らしい変数間には，δ に関する1次の式

$$x_{(j)} = \frac{x_{(j+1)} - x_{(j)}}{\delta}$$

を考える。このような有限次元のベクトルが $k \to \infty$ で，連続関数 $x(s)$，$t-\theta \leq s \leq t$ に近ずくことは明らかである。この考えを今少しはっきりさせるために，次のような1変数の系を考えよう。

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,x(t-\theta) + c\,u(t) \qquad (6-1)$$

$\delta = \theta/k$ として，新らしい座標を，$x(t-\theta) = x^1$ ，$x(t-\theta+\delta) = x^2$ ，…，$x(t-\theta) = x^k$ とおくと，これらの変数の間には δ の一次までとつて，次の関係がある。

ただし $w = 1/\delta$ である。

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= -\omega x^1 + \omega x^2 \\
\dot{x}^2 &= -\omega x^2 + \omega x^3 \\
&\ \vdots \\
\dot{x}^k &= -\omega x^k + \omega x
\end{aligned}
\qquad (6-2)
$$

結局 (6−1) と (6−2) をまとめて

$$\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + Gu(t)$$

の形になる。ここで行列，F，Gは，それぞれ次のようになる。

$$
F = \underbrace{\begin{pmatrix}
a & b & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -\omega & \omega & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & -\omega & \omega & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega & \omega \\
\omega & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\omega
\end{pmatrix}}_{(k+1)\times(k+1)}, \quad
G = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(k+1)\times 1}
$$

このように有限次元化することによつて，普通の方法で最適解を計算する可能性が生じて来る。また，先にのべた到達問題と，整定問題との差異はここで一層明らかになる。すなわち，到達問題は，x軸と x_1 で直交するk次元の超平面 $x = x_1$ を目標とする制御問題である。一般にxがn次元ベクトルの場合に，この考え方を適用すれば，n(k+1) 次元の問題として，近似解を求めることになる。

この考え方を，$x(t-\theta)$ の近似とみると，他にも，いろいろな近似が考えられる。例えばこれをx(t)のまわりでTaylor 展開することも可能であり，また，特にアナログ計算機による機械計算などの場合には，Padé の近似が多く用いられる。近似の精度の点では，例えばPadé の近似と比較すると，同じ精度を実現するのに，積分器が2倍余計に必要になるなど，

必ずしも有利ではない。この方法の特徴のひとつは，初期状態を計算にいれるのに便利であるという点であろう。従来おこなわれている近似計算法は，いずれも，初期関数との対応がつきにくいがこの方法によれば，新らしく導入した変数の初期値が，初期関数と直接対応している。

7. むすび

以上に，差分微分方程式であらわされる系の最適問題に関して，これまでに主として著者らによって考えられてきた問題をのべた。差分微分方程式であらわされる線形系の最短時間問題は，M.N. Oǧuztöreli が J.P. La Salle の方法[6] を拡張し，4でのべたのと類似の結果をえている。[11] これまでに扱つて来た最適問題は，いずれもむだ時間 θ が定数のものであつた。θ が時間の関数の場合に対する変分法が〔1〕に示されているが，実際問題は，まだ解かれていない。さらに θ がxあるいはuの関数になる場合にはどう考えたらよいのか，手がかりもつかめないのが現状である。そして最終的には，整定問題を解決することが，大きな課題である。

文　　献

1) El'sgol'c,L.E.: Qualitative Methods in Mathematical Analysis, p.215 ff., AMS, 1964.

2) Pontryagin,L.S. et al: The Mathematical Theory of Optimal Processes, p.213 ff., John Wiley, 1962.

3) 辻　三郎：一般化したプロセスの最適制御，電気試験所研究報告，No.655，1964.

4) 示村悦二郎：むだ時間を含む線形系の可制御性について。計測自動制御学会論文．Vol.1，No.4，1965.

5) Kreindler, E. and P.E. Sarachik: On the Concept of Controllability and Observability of Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-9, p.129/136, 1964.

6) LaSalle, J.P. : The Time-optimal Control Problem, Contrib. Nonlinear Oscillations, Vol.5, p.1/24, 1960.

7) Kalman, R.E.: Mathematical Description of Linear Dyna-

mic Systems, J.SIAM Control Ser.A, Vol.1 , No.2, p.152/193, 1963.

8) 示村悦二郎 他： むだ時間を含む線形系の最適制御（最短時間問題）計測と制御, Vol.3 ,No.6 , p.415/420, 1964.

9) Pontryagin, L.S. et al: itid. p.115 ff.

10) 示村悦二郎，小松雄一郎： むだ時間を含む線形系における最短時間問題の解法, 計測自動制御学会論文集, Vol.1 , No.3 , p.213/220. 1965.

11) Oğuztöreli, M.N.: A Time Optimal Control Problems for Systems Described by Differential Difference Equations, J.SIAM Control Ser.A, Vol.1, No.3 , p.290/310, 1963.