数理解析研究所講究録
第8巻 1966年 39-70

State-, System-Identificationについて

電気試験所 深 尾 毅

1. 序 言

近年，多くの最適制御の問題が活潑に議論され，多くの成果があがつていることは周知の通りである。しかしながら，これらの成果を実際に応用しようとすると，種々の制約があつてsmooth に行かない。これは1つには実際的な問題をかなり抽象化したモデルで考察しているからであろうが，その様な抽象化があつてはじめて理論は進むのだからやむを得ない。問題は従つて，実際にすぐ使えないから問題にしないというのではなくて，打樹てられた理論と実際面との交流をどの様にしてはかるかにある。理論は実際面から唯1つのformulation を行つて，その中で精密な議論をするのに満足していては，この様な交流ははかれないであろう。諸種のデーターから各様のformulation を試みるべきであろう。そこに新しい問題として，生のデーターからモデルをつくるformulation の方法に関する議論がおこる。それに関連する，しかしまだかなりレベルの低い議論がsystem characterization とかsystem identification である。modelの形式に関する問題，微分方程式であらわされるとか，有限集合のelement 間の関係であらわされるとか，そういつたmodel形式の選択に関する問題をsystem charactrization とよぶ。そういう形式が定つて，system の類別の議論が次に出てくる。それをsystem classificationとよぶ。そして，実際に観測されたinput, output にもとずいて，今問題にしているsystem が，どのclass に属しているのか，あるいは属しているのがもつともらしいかというのがsystem identification の問題である。それが快ればそのclass の代表model でsystem があらわされる。今問題にしているsystem が，それらの各classに属することが真であるという仮説を考えるなら，system identification は仮設検定の問題であると云つてもよい。

特に，system の形が，例えば実関数による変換で表現出来て，その中にふくまれるparameter が未知であるという具合にcharactrize される場合も多い。この場合には，仮説検定というよりは推定（estimation ）の問題と云つた方がよいであろう。

更に，system には"状態"（state）という量を導入した形でcharacterize されると都合がよいことが多い。ある時刻での"状態"とは，いわばそれ以前の過去のsystem の経暦が集約された量であつて，それを知れば，過去の膨大な断片際なinformation は捨

てても後で困らないといつたものである。ところで，その様な都合のよい"状態量"が直接には output として測れないかも知れない。従つて，"状態"が，現在，未来，過去においてどの様な値をとつているか，とりうるか，とつていたかを推定する問題がやはり重要である。これも system identification の中にふくめられるが，普通は区別して state-identification とよんでいる。

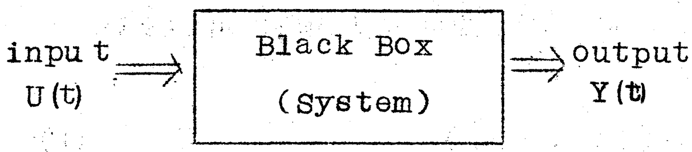
system identification などを伴う必要のある system control の問題は結局のところ，与えられる（場合によつては求めて得られる）データをどの様に確釈しようかということ，つまりモデル化，定式化というものを（部分的にでも）必要としている問題と云える。従来の経験から，大体のモデル，定式化はあるが，その"近傍"でそれを多少 modefy して実際のデータを説明しうる，あるいはしやすいものにしようということである。

従つて，system characterization や identification は，だんだん広げて行けば，生のデータからかなり高等な定式化を導ける様な process にもなり，理論と実際とのかけ橋として重要な意味をもつてくるであろうし，更に，程度の問題を別にすれば，人間の思考過程（thought process）といつたものにも関連するであろう。さて，生のデータが与えられ，それから推定したり，制御したりする場合，差当りうまいデータ処理の方法は確率論的あるいは統的な方法であろう。そういう意味で確率的あるいは統計的モデルをとりあげるのであつて，何もこれにこだわる必要はない。

尚，identification における重要な点の1つは，その逐次性，つまり，必要なデータを全部とりそろえてから一挙に identify するのではなく，データが逐次入つてくるに従つて段々と推定なり実験方法なりを新めて行くことである。これは大げさな云い方をすれば学習過程（learning process）の1つである。又，別の重要な点としては，実験選択の問題がある。システムへのインプット系列（原因）のえらび方はある程度任意であり，システムからのアウトプット（結果）のまとめ方にも任意性がある。インプット系列とアウトプットのまとめ方（あるいは観測の仕方）は1つの実験を構成する。従つて identification の問題には実験の選択がともなう。しかも a priori に"最良の"実験を選択するわけにいかないから，本質的に，我々のその時々の知識に応じて適当な意味での optimal な実験を選択しなければならない。

2. 有限オートマトンと制御系

第1図に示す様に，ある black box があつて，それの input U と output Y とが観測出来，black box の中味は直接見るわけにはいかないというモデルはよくあらわれる。



第 1 図

ここで状態（state）という量を導入する。（厳密には次にのべるオートマトンの定義の中に無定義元素としてふくまれる。）それは，各時刻で，システムがたどつて来た過去の経暦を完全に表現出来るものでありたい。従つてある時刻で，その様な状態を指定すれば，過去にどの様な input ， output の系列があつてシステムが現在に至つているかを一々記述する必要がなくなる。

又，ある時間間隔はなれた時刻毎に input が加わり，それに応じて output が出るものとする。つまり同期信号源があつて，それに依存して，一斉に現象が進行する様な discrete time system を考える。それを同期システムとよぶ。

さて，

有限インプット集合　　$U = \{ u_1, \cdots\cdots, u_p \}$

有限アウトプット集合　$Z = \{ \zeta_1, \cdots\cdots, \xi_q \}$

有限状態集合　　　　　$X = \{ \xi_1, \cdots\cdots, \xi_n \}$

と，次の1対の関数 f_X，f_Z をもつた同期システムを有限オートマトンとよぶ：

$$X(t+1) = f_X(X(t), U(t)) \tag{1}$$

$$Z(t) = f_Z(X(t), U(u)) \tag{2}$$

f_X，f_Z が確率的な関数である場合，確率的有限オートマンとよぶ。

例　　20円切符自動販売機

インプット集合　：｛10円玉を入れる。50円玉を入れる｝

アウトプット集合：｛何も出さない，切符を出す，30円のつり銭を出す，
40円のつり銭を出す｝

状　態　集　合　：｛貯えなし，10円貯え｝

前の(1)，(2)と等価ではあるが次の（1′），(2′) の形式を用いた方が便利な場合も多い。

$$X(t+1) = f_X(X(t), U(t)) \tag{1'}$$

$$Z(t) = f_Z(X(t)) \tag{2'}$$

これはたとえばoutput が観測量である場合，すなわち (2′) が観測装置で，観測したからと云つてsystem に擾乱はおきないという場合である。制御系の議論では，この様な場合が多いので以下では (1′)，(2′) の形式を採る。

有限オートマトンでのインプット，アウトプット，状態の集合には，普通位相は導入されていない。今，それらの有限性をはなれて，各集合にユークリッド距離による普通の実数位相を導入して，それらが連続濃度をもつとした時，(1′)，(2′) なる1対の実関数 f_X，f_Z をもつた同期システムを連続オートマトンあるいは単に制御系と以下では呼ぶことにする。普通，制御理論で取扱われる対象は多くはこの様な連続オートマトンあるいは制御系である。(実際には勿論これのみではなく，離散時間システムの代りに連続時間システムをとる場合――この場合 (1′) は微分方程式であらわされることが多い――，インプット，アウトプット，状態の集合のうちのいくつかが離散あるいは有限濃度をもつ場合など。)

いずれにせよ，ここで強調したいことは，有限オートマトンも，制御理論の対象になる制御系も，実は広い意味では同一範疇に属するシステムであり，従つて共通した問題点，考え方がありうることそしてこれら"両極端"の中間に，位相の導入の仕方によつて各様の"オートマトンあるいは制御系"があり，それらを総括するところに広い意味での制御理論の新しい領域があるということである。因に，有限オートマトンはいわばデイジタル計算機の抽象化であり，連続オートマトンはアナログ計算機の抽象化である。

3. 最適制御問題

3－1． Markov 的多段決定過程

(A) 連続的オートマトンあるいは制御系：

$$X(t+1) = f_X(X(t), U(t), r(t)) \tag{1}$$

$$Y(t) = f_Y(X(t), U(t), W(t)) \tag{2}$$

を考える。ここで，$r(t)$，$W(t)$はwhite noise であるとする。f_X，f_Y は決定論的関数で system の random behavior は $r(t)$，$W(t)$に起因するものと考える。

output $Y(t)$は2つの部分にわかれ，

$$Y'(t) = f'_Y(X(t), W(t)) \tag{3}$$

$$Y''(t) = f''_Y(X(t), U(t)) \tag{4}$$

$Y'(t)$は"観測量"，$Y''(t)$はsystem の"生産性"あるいは"経済性"を示す量（cost）であるとする。

(B)　system の状態が(1)に従って次々と遷移し，その都間発生するoutput $Y''(1)$，$Y''(2)$，……，$Y''(N)$ の関数 $F\{Y''(1), Y''(2), \cdots\cdots, Y''(N)\}$ が次の形をとる場合，それを一応，シーケンシャル型の関数ということにする：

$$F\{Y''(1), Y''(2), \cdots\cdots, Y''(N)\}$$

$$= F_1[Y''(1), F_2[Y''(2), F_3[Y''(3), \cdots\cdots, F_N[Y(N)]\cdots\cdots]]] \tag{5}$$

ここで　$F_i(A, B)$，$i=1, \cdots, N-1$，　$F_N(A)$はA，BあるいはAの任意の実関数。たとえば$F_i(A, B) = A+B$，$F_i(A, B) = A \cdot B$，$F_i(A, B) = \max(A, B)$ など。特別な場合（例えば $F_i(A, B) = A+B$あるいは$A \cdot B$）に

$$F_1[Y''(1), F_2[Y''(2), \cdots\cdots, F_N[Y''(N)]\cdots]]$$

$$= F^*_N[Y''(N), F^*_{N-1}[Y''(N-1), \cdots\cdots, F^*_1[Y(1)]\cdots]] \tag{6}$$

(C)　system の可能なすべての状態に対して，夫々ただ一つの制御Uを対応させた関数 $U = g(X)$ を決定関数あるいは制御関数という。これは制御の，状態Xに対するルールを示すものであり，戦略（strategy）という言い方もする。

(D)　連続オートマトン又は制御系に対し，そのoutput系列のシーケンシャル型の関数の，適当な意味での平均値を最小又は最大ならしめる制御関数

$$U_{op} = \mathcal{g}_{op}\{\hat{X}(k)\ ;k\},\quad k=1,2,\cdots,N \tag{7}$$

を求める問題をMarkov 的多段決定過程という。$\hat{X}(k)$は$X(k)$の推定値である。

3−2．確率的最適制御過程

連続オートマトンあるいは制御系の基本式並びに $r(t)$，$W(t)$の確率的性質が完全に既知なる時のMarkov 的多段決定過程を確率的最適制御過程という。

特別な場合としてBayes 最適制御，minimax 最適制御もこの中にふくまれる。

Bayes 最適制御[4)]

State-estimation を行つてから，それにもとづいて，optimal control を決める代りに，過去の観測データ及び制御にもとずくstate の conditional distribution による平均値をoptimal にする制御を採用する。すなわち，時刻tではtより最終時刻に至る評価関数を $F_t(X(t))$ とすると，

$$\int E[F_t(X(t))]\,p(X(t)\mid Y(1),\cdots,Y(t);U(1),\cdots,U(t-1))\,dX(t)$$

をoptimal にするUを採用する。

但し，Eは$r(t)$，$r(t+1)$，…，$r(N)$ によるexpectation を示す。

この問題は一見(7)の範疇に属していない様に見えるが，次の如く解釈すれば，その特別な場合であることがわかる。すなわち，逐次推定のprocess は，若し適当に"知識の状態"を示す状態を定義すれば，state fransition equation であらわされるsystem となる。従つて，逐次推定を伴う制御系を全体として又制御系になる様にするには，"物理的"状態と，上述の"知識の"状態とを成分としてもつ"状態"が必要である。そして，その遷移特性は物理系のそれと同時に知識系のそれ，すなわち逐次推定あるいはidentification process とから成る様に考える。今の，Bayes最適制御では $p(X(t)\mid Y(1),\cdots)$ が，t時刻における知識の状態である。（そしてそのestimateでもある。）

しかし，多くの場合，最適制御を決定するのに，物理的状態については，あらゆる可能な状態

を考慮するのに，知識の状態あるいは知識系は一定の決つた形で取り入れられているにすぎない。物理系と知識系の併立したsystemの完全な記述はBellmanによつて行われた。[8),9)]

さて，Bayes最適制御はかなり一般的であるが，しかしt時刻における制御関数が

$$U_{op} = g(Y'(1), \cdots, Y'(t), U(1), \cdots, U(t-1))$$

というきわめて次元の高い多変数関数になり，しかもtの進行と共に次元がふえていくから計算上大きな困難がありうる。

Minimax最適制御

今，最適化とは評価関数の最小化を意味するものとしよう。$X(t)$がわからないので最悪の事態を考えて，$E[f_t(X(t))]$を最大（最小問題にとつて最悪）にする$X^*(t)$が実現したとして，その時の$E[f_t(X^*(t))]$を最小にする制御$U(t)$を採用する：

$$\min_{U(t)} \cdot \max_{X(t)} \{ E[f_t(X(t))] \}$$

あるいは，いくつかの実験$e_1, \cdots, e_k$が平行に行われて，それらから$X(t)$の推定値$\hat{X}^{(1)}, \cdots \hat{X}^{(k)}$が得られているとし

$$\min_{U(t)} \cdot \max_{\hat{X} \in \{\hat{X}(i)\}} \{ E[f_t(\hat{X}(t))] \}$$

と云つたmodelも考えられる。

この2つの例は両極端である。

3−3. 適応最適制御過程

連続オートマトンあるいは制御系の基本式並びに$r(t)$，$W(t)$の確立的性質が不完全にしか知られていない時のMarkov的多段決定過程を適応制御過程という。制御系の基本式及び$r(t)$，$W(t)$のパラメーターが未知であるという形で議論する場合，パラメーター適応制御過程ということもある。主として議論されているのはこの範疇に属するものである。

適応制御過程では従つて，未知パラメーターの推定，あるいはsystem identifica−

tion と，これに前と同じく stateの推定，あるいは state-identification とを行う必要がある。

ここでも各種の方式が考えられるが，確率的最適制御のところでのべた様な議論が成立つ。

たとえばBayes最適制御で云えば

$$\int E[\,Ft(X(t))\,]\,p(X(t),\ \alpha\,|\,Y'(1),\cdots,Y'(t)\ ;U(1),\cdots,U(t-1)\,dx(t)$$

を optimal にする Uを採用する。ここでαはシステムの未知パラメーターである。

4. Wiener-Kalman Filter

システムへの外部環境，すなわち random input がどの様になつているかが未知である場合が多い。それを推定する問題，signal estimation, signal identification の問題を考える。

今，確率的性質のわかつている random process X(t)，$-\infty < t < \infty$と，それと確率的に従増関係にあるもう1つの random process Y(t) とがある。（たとえばX(t)がsignalでY(t)はsignal plus noise.）これに対するlinear filtering problem とは，Y(t)の $(-\infty, T)$ にわたる観測値 $Y(\tau)$，$-\infty < \tau < T$が与えられたとき，

(1) $Y(\tau)$，$-\infty < \tau \leq T$，の線型汎関数で，

(2) 二乗平均誤差 $E\{\,|X(t_1)-\hat{X}(t_1)|^2\}$ を最小にする如き，

$X(t_1)$ の estimate $\hat{X}(t_1)$ を見出す問題である。他し

$$t_1 = T$$

若し $t_1 > T$ なら predicfion problem，$t_1 < T$ なら smoothing problem とよばれる。

この問題をWienerは，random process の stationality の条件のもとで，有名なWiener-Hopf の積分方程式を解く問題に reduce し，それを解いて上述の解としての線型回路，linear filter (Wiener filter) の設計法を示した。

これに対し，近年，Kalman は，[1]

(1) random process X(t)が，white noise を input とする，有限次元の

linear dynamic system の output である（第2図参照）：

$$X(t+1) = \Phi(t+1,t)\,x(t) + \Gamma(t+1,t)\,\gamma(t) \tag{1}$$

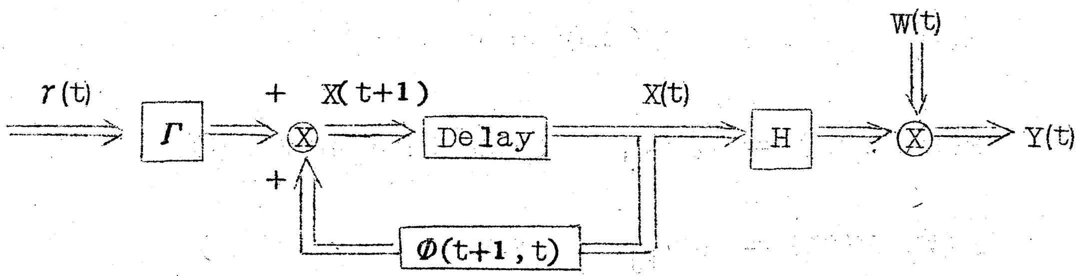
ここで $\Phi(t+1,t)$ は $X(t)$ から $X(t+1)$ への遷移行列。

(2) 観測される random process $Y(t)$ は $X(t)$ と線型に関係する：

$$Y(t) = H(t)\,X(t) + W(t) \tag{2}$$

但し，$W(t)$ は white noise，

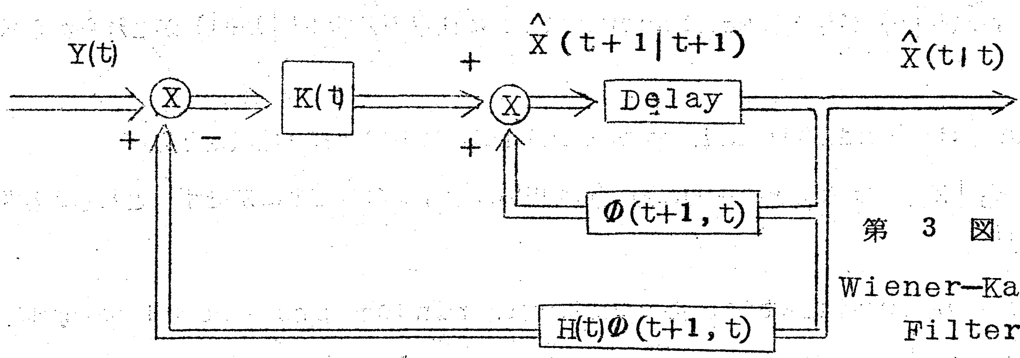
という条件のもとで，random process が non-stationary である場合をふくめて，smoothing, filtering, prodiction の解を完全に与え，それらの収束性についても議論した。



第 2 図

(1)の仮定は，random process が Markov process であるということであり，(2)の仮定でYの次元がXの次元より小さいとすること（すなわちHは singular）によつて，多重Markov 性を確保出来る。実際，応用上出てくる random process はほとんどこの範疇に属する。

彼の結果は，例えば stationary case の filtering problem の解は[2]（第3図参照）



第 3 図
Wiener–Kalman Filter

$$K(t) = \tilde{P}(t+1\mid t)\,H(t)\,\left(H(t)\,\tilde{P}(t+1\mid t)\,H(t)^{t} + R(t)\right)^{-1}$$

$$\hat{X}(k+1|k+1) = \Phi\hat{X}(k|k) + \tilde{P}(k+1|K)H^t(H\tilde{P}(k+1|k)H^t + R)^{-1}\cdot$$

$$\cdot(Y(k+1) - H\Phi\hat{X}(k|k)) \quad (3)$$

$$\tilde{P}(k+1|k+1) = \tilde{P}(k+1|k) - \tilde{P}(k+1|k)\,H^t(H\tilde{P}(k+1|k)H^t + R)^{-1}\cdot$$

$$\cdot H\tilde{P}(k+1|k) \quad (4)$$

$$\tilde{P}(k+1|k) = \Phi\tilde{P}(k|k)\Phi^t + \Gamma Q \Gamma^t \quad (5)$$

但し,

$E(r(k)) = 0$, $E(W(k)) = 0$,

$E(r(k)\,r(j)^t) = Q\,\delta_{kj}$ （r の white noise 性）

$E(W(k)\,W(j)^t) = R\,\delta_{kj}$ （Wの 〃 ）

$E(r(k)\,W(j)^t) = 0$

$\tilde{P}$はerrov $X-\hat{X}$のcovariance matrix。 $A(k+1|k+1)$ とあるのはk+1 時刻迄の観測量が得られた時のk+1時刻のAの意味。

(3)はoptimal estimation (filter) equation，(4)はcovariance equation ともよばれる。(5)はextrapolated covariance $\tilde{P}(k+1|k)$ を与える式である。これらはWiener-Hopt の方程式に対応するもので，a priori な情報 $\hat{X}(0|0)$, $\tilde{P}(0|0)$ が与えられればrecursive に任意の$\hat{X}(k+1|k+1)$ がこれらから求められる。

Kalman は Conditional expectation に関する直交性（たとえば $X_1 - E(X_1|X_2)$ は X_2 と確率的に独立）を用い，r , Wの分布型に関せず，これらの結果を求めた。[1]

Kalman の formulation の大きな特徴は，random processを1つの制御系（連続オートマトン）としてとらえ，従つて，process の"内部構造"をはつきり指定した点

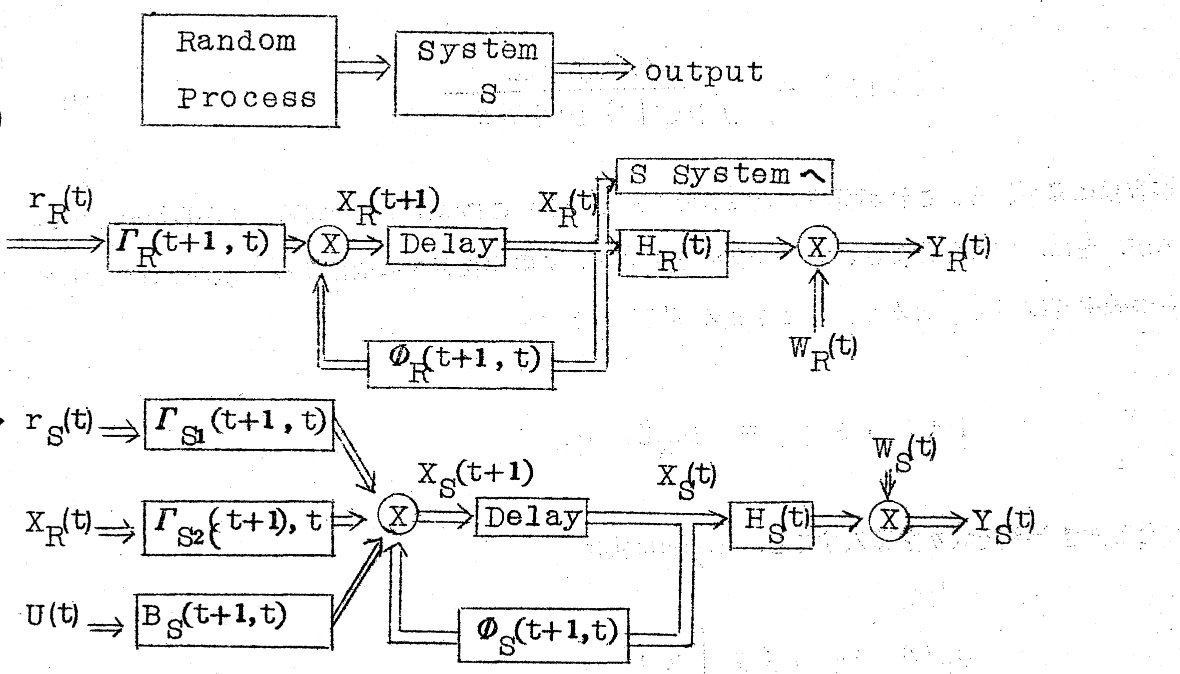
であろう。従つて，filtering 等の問題は，state−estimation あるいは state−identification の問題に reduce する。

従来の理論，たとえが Wiener の理論を実際に用いるには，生のデータ Y から，stationary な covariance function あるいは power−spectral density を先づ求める必要があるが，Kalman の場合には，それは生の output data Y から内部構造を estimate する問題，つまり system identification の問題になる。

この様に，random process を適当な system (制御系) の output とみなす場合は，我々技術者にとつては非常透明かつ扱いやすく，更に，この process が input される system (制御系) と全く同一形式であるので一貫して扱えることになる。例えば第4図の様に，random process $X_R(t)$ が linear system S に additive に加わる時は全系は，

$$\begin{pmatrix} X_S(t+1) \\ X_R(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_S(t+1,t) & \Gamma_{S2}(t+1,t) \\ 0 & \Phi_R(t+1,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_S(t) \\ X_R(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} B_S(t+1,t) \\ 0 \end{pmatrix} U_S(t) + \begin{pmatrix} \Gamma_{S1}(t+1,t) & 0 \\ 0 & \Gamma_R(t+1,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_S(t) \\ r_R(t) \end{pmatrix}$$



(a) (b)

第 4 図

この様に，一般にはsystem Sへのsignal とかnoise とかも又1つのsystemと見なせるので，それらを混然一体としたtotal system の，state-identification あるいはsystem identificationによつて，本来我々が関心をもつているsystem Sの内外における諸種の推定時間を綜合的に扱えることになる。従つて以下ではsystem S内のparameterの推定も，S外のparameter の推定も区別せず 議論する。先に，rかWをwhite noiseとしてsystemを考えたのは，この様な綜合的なsystemを考えてのことであつた。

5. Bayesian Approach (Learning)

例えば，2確率変数ξ，ηに対してconditional probability は

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

と定義され，従つて

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{P(y|x)\,P(x)}{\sum_x P(y|x)\,P(x)}$$

となる。density function の定義される場合は，これから

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)\,p(x)}{\int p(y|x)\,p(x)\,dx} \tag{1}$$

が容易に導かれる。これが所謂Bayesの定理である。これはξ，ηの同時分布から出発しているが，逆に，p(x)を分布としてもつ確率 変換ξと，ξの実現値xに依存する$p_x(y)$を分布としてもつ確率変数群η_xとから，ξとηとの同時分布が

$$p(x,y) = p_x(y)\,p(x)$$

となる如き確率変数ηを導入すると，$p_x(y)$は実は

$$p_x(y) = p(y|x)$$

になることが示される。従つて，ξのa priori 分布 $p_0(x)$ から出発して，形式的に $p_x(y) = p(y|x)$ 等としてBayesの定理をくり返して用いて，次々と新たな確率変数を導入し，形式的に用いたBayesの定理が正しい意味をもつ同時分布に従つてその各種条件付分布に到達しうる。

従つて一般に，ξのa priori 分布を $p_0(x)$とすると観測値の組 $(y(1), y(2), \cdots\cdots, y(k)) \triangleq \mathcal{Y}(k)$を得てその后のxの条件付き分布 $p(x|\mathcal{Y}(k))$ と，更にもう1つ観測値がふえた組 $(y(1), y(2), \cdots, y(k), y(k+1)) \triangleq \mathcal{Y}(k+1) = (\mathcal{Y}(k), y(k+1))$ を得て后のxの条件付き分布 $p(x|\mathcal{Y}(k), y(k+1))$ との間には

$$p(x|\mathcal{Y}(k), y(k+1)) = \frac{p(y(k+1)|x)p(x|\mathcal{Y}(k))}{\int p(y(k+1)|x)\, p(x|\mathcal{Y}(k))\, dx} \tag{2}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k+1} p(y(i)|x)\; p_0(x)}{\int\cdots\int \prod_{i=1}^{k+1} (y(i)|x)\; p_0(x)\, dx} \tag{3}$$

以上のprocessは，観測データが得られて后の，xのa posteriori 分布を決定するだけで，一義的な推定値を決めるには，この他に適当な評価を導入して"best"なものをえらぶ様にする必要がある。*) その様な評価基準としてよく用られるものは

1. most probable estimate $\hat{x}_1$

   (分布のpeak を与えるxの値)

2. Conditional mean $\hat{x}_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| x - \hat{x}_2 \|^2 p(x|\mathcal{Y}(N))\, dx$$

3. minimax estimate $\hat{x}_3$

$$\min_{\hat{x}_3} \cdot \max_{x} |x - \hat{x}_3|$$

これら $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ は分布 $p(x|\mathcal{Y}(N))$ が Gaussianである場合には同じ値になることが知られている。

---

*) (尤も，Bayes最適制御では一義的な推定値を決める必要もなく，a posteriori 分布を求めさえすればよい。)

さて，上述の(1)，(2)は常に一定のηの条件付き分布を求めるという，static な場合であるが，

$$X(t+1) = f_X(X(t),\ U(t)) \tag{4}$$

$$Y(t) = f_Y(X(t)) \tag{5}$$

なる制御系のstate $X(t_1)$ を推定する所謂state—identification の問題 では $X(t)$がdynamicに次々と変つて行くために $p(X(k)\,|\,\mathcal{Y}(k))$ から $p(X(k+1)\,|\,\mathcal{Y}(k+1))$ を求める必要がある。

そこで $X(k)$から $X(k+1)$ へのtransitionの関係(4)を用いて

$$p(X(k+1)|\mathcal{Y}(k+1)) = \frac{\int p(Y(k+1)\,|\,X(k+1))\,p(X(k+1)\,|\,X(k))\,p(X(k)|\mathcal{Y}(k))\,dx(k)}{\iint \qquad \text{〃} \qquad dx(k)\,dx(k+1)} \tag{6}$$

ここで，$\mathcal{Y}(k) \triangleq (Y(1),\ \cdots\cdots,\ Y(k))$.

あるいはstate transition関係には(4)に見る如くinputが関係しているので，もう少し詳しく書けば，$\mathcal{U}(k) \triangleq (U(1),\cdots,U(k))$ として

$$p(X(k+1)\,|\mathcal{Y}(k+1);\mathcal{U}(k))$$

$$= \frac{\int p(Y(k+1)|\,X(k+1))\,p(X(k+1)|\,X(k);U(k))\,p(X(k)\,|\mathcal{Y}(k);\mathcal{U}(k-1))\,dx(k)}{\iint \qquad \text{〃} \qquad dx(k)\,dx(k+1)} \tag{6'}$$

従つて，Bayesian approach によるstate—estimation あるいはidentification は次の4段階より構成される：

(1) $p(Y(k+1)\,|\,X(k+1))$ を(5)式より求める。

(2) $p(X(k+1)\,|\,x(k)\ ;\ U(k))$ を(4)式より求める。

(3) $p(X(k+1)\,|\,\mathcal{Y}(k+1)\ ;\ \mathcal{U}(k))$ を(6)あるいは(6′)式より求める。

(4) $p(X(k+1)\,|\,\mathcal{Y}(k+1))$ なる今布から，評価1あるいは2あるいは3を用いて 'best' estimate $\hat{X}$ を求める。

5－A.　Linear Gaussian System の場合

第4節でのべた linear system で，stationary な場合を考えよう：

$$X(t+1) = \Phi X(t) + \Gamma r(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = H X(t) + W(t) \tag{2}$$

r(t),W(t)は夫々 white Gaussian noise である。Gaussianであるから，評価1，2，3いずれも同じ推定値を与え，linearであるため極めて容易に計算出来，その結果は全く Wiener−Kalman filterのそれに一致する。Wiener−Kalman filter の場合，r(t)，W(t)はWhite だが必ずしもGaussianとは云わなかつた。しかし，実は linear filtering problem の解と，r(t)，W(t)をGauss 分布をもつ確率変数とした時のfiltering problem の解とは一致をすること，及びmean 及びcovari−anceからは一義的にGauss分布が決ること，そしてmean 及び covariance についてのみ議論をしていることから，Gauss性を前提にした議論であると云つてよい。従つて，li−near systemに関してはKalmanの方法もBayesian approachも等価であると云える。Bayesian approachはしかし次に示す様にnon−linear systemの場合にも（"optimal"とは限らないにせよ）適用出来るし，discrete hypothesesの問題にも勿論用いられるので，有力な統一的な方法であると考えられる。

5－B.　Non−linear Gaussian Systemの例[3]

$$X(k+1) = f(X(k), k) + \Gamma(k)\, r(k)$$

$$Y(k) = h(X(k), k) + W(k)$$

r，wは平均値0，Gauss分布をもつ。更に

$$E[r(j)\, r(k)^t] = Q(k)\, \delta_{jk} \qquad \text{(whiteness)}$$

$$E[W(j)\, W(R)^t] = R(Q)\, \delta_{jk} \qquad (\quad〃\quad)$$

$$E[r(j)\,W(k)^t] = 0$$

この様なsystemにおいて，次の様なfiltering problemを考える：

「$Y(0),\cdots,Y(n)$なる観測結果が与えられて，$\{X(0),\cdots,X(n)\}$のestimate $\{\hat{X}(0),\cdots,\hat{X}(n)\}$を求めること。」

$$p(X(0),\cdots,X(n)\mid Y(0),\cdots,Y(n))$$

$$=\frac{p(Y(0),\cdots,Y(n)\mid X(0),\cdots,X(n))\;p(X(0),\cdots,X(n))}{p(Y(0),\cdots,Y(n))}$$

$$=\frac{\prod_{k=0}^{n}p_W(Y(k)-h(X(k),k))\;p_0(X(0))\prod_{k=1}^{n}p(X(k)\mid X(k-1))}{p(Y(0),\cdots,Y(n))}$$

$p_0(X(0))$は$X(0)$に対するa priori distributionでmean vector m，covariance matrix $P(0)$をもつGauss分布に従うものとする。$p(X(k)\mid X(k-1))$は$r(k-1)$のGauss性からmean vector $f(X(k-1),k-1)$，covariance matrix $\Gamma(k-1)\,Q(k-1)\,\Gamma(k-1)^t$をもつGauss分布である。従つて

$$p(X(0),\cdots,X(n)\mid Y(0),\cdots Y(n))$$

$$=C(Y(0),\cdots,Y(n))$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\|Y(k)-h(X(k),k)\|^2_{R^{-1}(k)}-\frac{1}{2}\|X(0)-m\|^2_{P^{-1}(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\|X(k-1)-f(X(k),k)\|^2_{[\Gamma Q\Gamma^t]^{-1}}\Big\}$$

但し $\|V\|^2_A \triangleq V^tAV$ (2次形式)

そこで先にのべたBayesian approachにおける，unique estimateを定めるための評価法の"1：most probable estimate"を採用すれば

$$J_n=\frac{1}{2}\|X(0)-m\|^2_{P^{-1}(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\| Y(k)-h(X(k),k)\|^2_{R^{-1}(k)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\| X(k-1)-f(X(k),k)\|^2_{[GQG^t]^{-1}}$$

を最小にする $\{X(0),\cdots,X(n)\}$ が most probable estimate である。

prediction problem ;

「$Y(0),\cdots,Y(n)$ なる観測結果が与えられて，$\{X(0),\cdots,X(n),\cdots,X(n+m)\}$ の estimate $\{\hat{X}(0),\cdots\cdots,\hat{X}(n+m)\}$ を求めること。」

$$p(X(0),\cdots,X(n+m)\mid Y(0),\cdots Y(n))$$

$$=C'(Y(0),\cdots,Y(n))$$

$$\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\| Y(k)-h(X(k),k)\|^2_{R^{-1}(k)}-\frac{1}{2}\| X(0)-m\|^2_{P^{-1}(0)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+m-1}\| X(k+1)-f(X(k),k)\|^2_{[GQG^t]^{-1}}\Big\}$$

従つて，most probable estimate は

$$J_{n,m}=\frac{1}{2}\| X(0)-m\|^2_{P^{-1}(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\| Y(k)-h(X(k),k)\|^2_{R^{-1}(k)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+m-1}\| X(k+1)-f(X(k),k)\|^2_{[GQG^t]^{-1}}$$

を最小にする $\{X(0),\cdots,X(n+m)\}$ である。

ところで

$$J_{n,m}=J_n+\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{n+m-1}\| X(k+1)-f(X(k),k)\|^2_{[GQG^t]^{-1}}$$

であるから，$J_{n,m}$ をminimizeすることは明かに J_n を先づminimizeし，しかる后第2項を0にすることに他ならない。即ち

$$X(k+1) = f(X(k),\ k) \qquad k = n,\ n+1,\ \cdots,\ n+m-1$$

いいかえれば，filtering problemを解き，后はそれよりのnoiseを取去つた単なるextrapolation に他ならない。

Min.$\{J_n\}$ の Dynamic Programming による解

$[GQG^t]^{-1}$ が存在するものとする。便宜上，1 step先迄のprediction problem ;

$$\mathrm{Min}\{2J_{n,1}\}$$

を考える。その様にしても先にのべた様に，filtering problem の解には影響はない。

$$F_0(X(0)) \triangleq \|X(0)-m\|^2_{P^{-1}(0)}$$

$$F_{k+1}(X(k+1)) \triangleq \underset{X(0),\cdots,X(k)}{\mathrm{Min}}\{2J_{k,1}\}, \quad k=0,1,\cdots,n$$

を定義すると，

$$F_{k+1}(X(k+1)) = \underset{X(k)}{\mathrm{Min}}\Big\{F_k(X_k) + \|X(k+1)-f(X(k),k)\|^2_{[GQG^t]^{-1}} + \|Y(k)-h(X(k),k)\|^2_{R^{-1}(k)}\Big\}$$

$$(k=0,1,\cdots,n)$$

なるrecurrence equationが成立つ。k=0からはじめて順次，most probable estimate $\hat{X}(k)$をこれから求めることが出来る。但し，$X(n+1)$ のestimateは $F_{n+1}(X(n+1))$ を minimize する $X(n+1)$，$X(n)$のestimate (我々の求めるfiltering problemの解) は$F_n(X(n)) + \|Y(n)-h(X(n),n)\|^2_{R^{-1}(n)}$をminimizeする $X(n)$である。

Dynamic programming による解は，最新の $F_n(X(n))$ さえ保存しておけば，更に step が進行する時には $F_n(X(n))$ から考慮すればよく，それ以前の $X(k)$ は考える必要がないという利点をもつている。（$F_n(X(n))$ が"状態"の役目をする！）

6. System Identification

System identification として，ここでは system の未知パラメーターの推定問題を考える。その parameter が時間的に変化しない場合（time invariant）と，変化する場合（time variant）とがあるが，前者の方が当然推定が容易であると同時に，しばしばより本質的である。というのは，system のより本質的な性質は，時間にかかわりなく成立つといつた形であらわれる筈で，法則自身に時間がふくまれていても，それにふくまれている parameter は time invariant な形をとるであろうから。そういうより長期間にわたつて成立つであろう様な本質的な性質の identification はむしろ学習（learning）という名に値するものであろうが，一方，もつと身近かな各種自動制御系では time variant な parameter の推定がしばしば問題になる。すなわち，system の一部の parameter が運転に際して予め設計の段階では予測のつかない具合いに，そして時間と共に変動する場合は実際問題に多い。そういう場合には state identification と同じく，"完全には" identify 出来ず，興味ある問題を生ずるが，ここではこれらにはふれず，time invariant な parameter のみを対象にする。

7. Bayesian System Identification[5),6),7)]

7－1. Linear Convertible System

$$X(t+1) = \Phi X(t) + BU(t) + r(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = \Psi X(t) + W(t) \tag{2}$$

$r(t)$，$W(t)$ は white Gaussian 分布をもつとする。Ψ^{-1} が存在する system は convertible であるという。今，Φ と，r の平均値 $\bar{r}$ とが未知であるとする。

(1)，(2)から

$$Y'(t+1) = \Phi X(t) + BU(t) + r'(t) \tag{3}$$

を得る。但し,

$$Y'(t+1) \triangleq \Psi^{-1} Y(t+1)$$

$$r'(t) \triangleq r(t) + \Psi^{-1} W(t+1)$$

$Y'(t)$は(3)から, $\Phi X(t-1) + BU(t-1) + r'(t-1)$ によつてあらわされる母集団から発生したサンプルと考えられるが, その代りにそれが

$$\Phi X^{\ominus}(t-1) + BU(t-1) + r'(t-1)$$

によつてあらわされる母集団からのサンプルであると近似的に考える。すなわち, $p(Y'(t) \mid X(t-1))$ を $p(Y'(t) \mid X^{\ominus}(t-1))$ で近似する。ここで $X^{\ominus}(t-1)$ は $X(t-1)$ の estimate である。

$$\Phi^{*} = [\Phi_1, \bar{r}'_1 ; \Phi_2, \bar{r}'_2 ; \cdots ; \Phi_N, \bar{r}'_N]^t$$

の a priori distribution を Gaussian として, mean vector を $\bar{m}_{(0)}$, covariance matrix を $C(0)^{-1}$ とする。但し,

$$\Phi_i = [\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \cdots, \Phi_{iN}] \quad .$$

そうすると Bayesian learning (Bayes 定理の逐次使用) によつて次の recurrence relation をうる;

$$C(t) = C(t-1) + D(t-1) \tag{4}$$

$$\bar{m}(t) = C(t)^{-1} \{ C(t-1)\,\bar{m}(t-1) + \Delta^{\ominus}(t-1)\; H(t-1) \} \tag{5}$$

$$= C(t)^{-1} \{ C(t-1)\,\bar{m}(t-1) + \Delta^{\ominus}(t-1)\; T\Delta(t-1)^t\; Z(t-1) \}$$

$$\cdots\cdots \; (6)$$

superscript 't' は転置を示す。

$$\Delta^e(k) = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad N \quad} \\ \begin{bmatrix} \delta^e(k) & & \\ & \ddots & \\ & & \delta^e(k) \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \Delta(k) = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad N \quad} \\ \begin{bmatrix} \delta(k) & & \\ & \ddots & \\ & & \delta(k) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\delta^e(k) = [\, X_1^e(k), \cdots, X_N^e(k), 1 \,]^t$$

$$\delta(k) = [\, X_1(k), \cdots, X_N(k), 1 \,]^t$$

$$D(k) = \Delta^e(k) \cdot T \cdot \Delta^e(k)^t$$

T : r′ の covariance matrix の inverse.

$$H(k) = [\, H_1(k), \cdots\cdots, H_N(k) \,]^t$$

$$H_i(k) = \sum_{j=1}^{N} T_{ij} (y'_j(k+1) - \sum_p B_{jp} U_p(k))$$

$$Z(k) = [\, \Phi_1, r'_1(k) \,;\, \Phi_2, r'_2 \,; \cdots ;\, \Phi_N, r'_N(k) \,]^t$$

この identification process (4), (5), (6) には X(k) の estimate $X^e(k)$ がふくまれているので，実は system identification と同時に state-identification (filtering) を行わねばならない。しかし，system の parameter が完全にはわかつていないから，先にのべた state-identification そのものにはならない。この様な system についての不完全知識下での state-identification は，たとえば，

1. estimated system parameter ($\overline{m}(t)$) を用いて state-identification (Wiener-Kalman filter を用いて) を行う。

或いは

2. estimated state (既知 system parameter の条件下での) を，system parameter の a posteriori distribution で平均する。

によつて行う。

結局，我々の system identification process では state-identification が常に先行する。

この process は Φ^* の a priori distribution か, $r'(t)$ の distribution を Gaussian として導いたが，実はその様な制限なしに次の様な十分条件のもとで確率収束することが示される。[5),6)]

「 Φ_{ij}, $\overline{r'}$, a priori $C(0)$, $\overline{m}(0)$ は有界とする。

次の条件を満す無限時間系列，

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

を確率 1 でえらべるとする：

(A・1)　N＋1ケの1次独立な δ^e－vectors が t_{j-1} から $t_j - 1$ の区間にふくまれている。 (j＝0 , 1 ,…)

(A・2)　$t_j - t_{j-1}$ は有界である。

(A・3)

$$\lambda_{min}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{p=t_{j-1}}^{t_j-1} D(p)\Big)\Big] \geq M_1 \cdot n^q$$

である様な $M_1 > 0$, $q > 1$ が存在する。

但し，$\lambda_{min}[A]$ は positive definite matrix A の最小固有値。

(A・4)　$E(\| \delta^e(k) \|^2)$ が任意の k に対し有界,

(A・5)　$E(R(k)^2)$ が任意の k に対し有界,

但し,

$$R(k)^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big\{(r'_i(k) - \overline{r'_i}) + \sum_{j=1}^{N}\Phi_{ij}(X_j(k) - X_j^e(k))\Big\}^2 .$$

しからば

$$Pr.\Big\{\lim_{n\to\infty} \| C(n)^{-1} \| = 0\Big\} = 1 ,$$

$$Pr.\Big\{\lim_{n\to\infty} \| \overline{m}(n) - \Phi^* \| = 0\Big\} = 1 .」$$

(A・1) 乃至 (A・5) の条件は"制御可能な" system では，通常，きわめて自然に成立

つものである。

この証明にはstochastic approximationの考えが関連する。

7－2. Approximations

(I) (3)式は

$$y'_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} X_j(t) + B_i\ U(t) + r'_i(t) \qquad i=1,\cdots,N$$

であるが，これからは $[\Phi_{i1}, \Phi_{i2}\cdots, \Phi_{iN}, \overline{r'_i}]$ のみをidentifyするという具合いに，各行毎に別々に分割してidentificationを行うことにすれば，7－1にくらべて計算量ははるかにへらせる。

$[\Phi_{i1}, \cdots, \Phi_{iN}, \overline{r'_i}]^t$ の a priori distribution を Gaussianとして，そのmean vector, covariance matrix を夫々 $\overline{m}_i(0)$, $C_i(0)^{-1}$ とすれば

$$C_i(t) = C_i(t-1) - D_i(t-1)$$

$$\overline{m}_i(t) = C_i(t)^{-1}\left\{C_i(t-1)\overline{m}_i(t-1) + \frac{1}{\sigma'^2_i}(y'_i(t) - \Sigma B_{ij} U_j(t-1))\,\delta^e(t-1)\right\}$$

$$= C_i(t)^{-1}\left\{C_i(t-1)\overline{m}_i(t-1) + \frac{1}{\sigma'^2_i}\delta^e(t-1)\delta(t-1)^t Z_i(t-1)\right\}$$

$$(i=1,\cdots,N)$$

但し，$\delta(k) = [X_1(k), \cdots, X_N(k), 1]^t$

$$\delta^e(k) = [X^e_1(k), \cdots, X^e_N(k), 1]^t$$

$$D_i(k) = \frac{1}{\sigma'^2_i}\delta^e(k)\,\delta^e(k)^t$$

$\sigma'^2_i = r'_i$ の variance

この方式の収束性も，7－1に全くanalogousで，ただ（A・5）が形式上

（A・5′）　E(Ri(k)^2) が任意のkに対し有界，

但し，

$$R_i(k) = |(r_i'(k) - \overline{r}_i') + \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij}(X_j(k) - X_j^{\ominus}(k))|$$

$$(i = 1, \cdots, N)$$

となるだけである。

(II)　(I)は横わりのdecompositionであるが，たてわりのdecompositionを行つても同様に収束することが見られる。これによつて計算がより簡素化する。このことはsystemの規模が大きくなると特に重要になる。

この様な最も細いdecomposition迄行く途中に，もつと大まかな多くのdecompositionの形式が可能である。そして，適当なdecompositionを状況に応じadaptiveに選択する方式などが大規模system の identification では重要となろう。

7－3.　Non-linear System

7．1でのべたregression form の identificationは，勿論，non-linear systemにも適用可能である。ここでは観測機構（XとYとの関係）もnon-linearである場合を考える。

$$X(t+1) = \Phi X(t) + F(X(t)) + BU(t) + r(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = \Psi X(t) + G(X(t)) + W(t) \tag{2}$$

ここで

$$F(X(t)) = A \cdot V(t)$$

$$G(X(t)) = S \cdot V(t)$$

$A = [a_{ij}]$, $S = [s_{ij}]$ はN×M－matrix で

$$V = [\varphi_1(X(t)), \varphi_2(X(t)), \cdots\cdots, \varphi_M(X(t))]^t$$

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_M$ は $X = [X_1, \cdots, X_N]^t$ の既知関数で，

$$1, X_1, X_2, \cdots, X_N, \varphi_1(X), \varphi_2(X), \cdots, \varphi_M(X)$$

は 1次独立であるとする。

$$Y'(t+1) \triangleq \Psi^{-1} Y(t+1)$$

$$r'(t) \triangleq r(t) + \Psi^{-1} W(t+1)$$

とおいて，(1)，(2)より

$$Y'(t+1) = \Phi X(t) + A \cdot V(t) + (B U(t) + \Psi^{-1} S V(t+1)) + r'(t) \qquad (3)$$

$Y'(t+1)$ が

$$\Phi X^{e}(t) + A \cdot V^{e}(t) + (B U(t) + \Psi^{-1} S V^{e}(t+1)) + r'(t)$$

で特徴づけられる母集団から発生するものと近似的に考えて，7－1あるいはその近似の7－2と形式上全く同様なidentification process が得られる。但し，

$$\delta^{e}(k) = [X_1^{e}(k), \cdots, X_N^{e}(k), \varphi_1^{e}(X(k)), \cdots, \varphi_M^{e}(X(k)), 1]^t$$

等のちがいがある。

収束のための十分条件も単なる7－1の拡張によつて得られる。

7－4. Non-convertible System

これは観測機構（XとYとの関係）が一般に

$$Y(t) = g(X(t)) + W(t)$$

とあらわせるが，g^{-1} が存在しない場合である。non-linear の観測機構といつても7－3で記した形，

$$Y(t) = \Psi X(t) + S \cdot V(t) + W(t)$$

の様にlinear term $\Psi X(t)$をもつ場合に限れば，各$X_i(t)$（$i=1,\cdots,N$）が観測量$y_j(t)$，（$j=1,\cdots,K$）といずれかと相関がありさえすれば，我々のsystem identificationは可能である。

簡単のためlinearの観測機構：

$$Y(t) = \Psi X(t) + W(t)$$

で考えよう。たとえば$y_j(t)$と$X_i(t)$とが相関がある場合，すなわちΨの（j,i）要素ψ_{ji}がnon-zeroである場合，

$$\frac{1}{\psi_{ji}} y_j(t) = x_i(t) + \sum_{k\neq i} \frac{\psi_{jk}}{\psi_{ji}} X_k(t) + \frac{1}{\psi_{ji}} W_j(t)$$

従つて

$$\frac{1}{\psi_{ji}} y_j(t) \triangleq y'_i(t)$$

と定義すれば

$$y'_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} X_j(t) + \sum B_{ij} U_j(t) + \sum_{k\neq i} \frac{\psi_{jk}}{\psi_{ji}} X_k(t) + r'(t)$$

をうる。但し

$$r'_i(t) \triangleq \frac{1}{\psi_{ji}} W_j(t+1) + r_i(t)$$

従つて，例の如く$y'_i(t+1)$が

$$\sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij} X^e_j(t) + \sum B_{ij} U_j(t) + \sum_{k\neq i} \frac{\psi_{jk}}{\psi_{ji}} X^e_k(t) + r'_i(t)$$

から発生するものと近似的に考えて，先の議論とanalogousに話は進む。

さて，再びlinear invertible systemにもどろう。この場合には，実は，今迄の様なstate-identificationとは独立にsystem identificationが行える：

$$X(t+1) = \Phi X(t) + BU(t) + \Gamma r(t) \tag{1}$$

$$Y(t) = \Psi X(t) + W(t) \tag{2}$$

(2)から

$$X(t+1) = \Psi^{-1} Y(t+1) - \Psi^{-1} W(t+1)$$

$$X(t) = \Psi^{-1} Y(t) - \Psi^{-1} W(t)$$

を(1)に入れ，

$$\left.\begin{aligned} \Psi^{-1} Y(t) &\triangleq Y'(t) \\ \Psi^{-1} Y(t+1) &\triangleq Y'(t+1) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

と定義すれば，Xのtransition equation (1)の代りにY′のtransition equation をうる：

$$Y'(t+1) = \Phi Y'(t) + BU(t) + r'(t) \tag{4}$$

但し

$$r'(t) = \Gamma r(t) + \Psi^{-1} W(t+1) - \Psi^{-1} W(t) \tag{5}$$

r′ にはunknown Φをふくんでいるが，これをそのestimate Φ^{e}（たとえばΦのa posteriori 分布の平均値）で近似すれば，今迄の議論と全く同様に正しい収束をするidentification process をうる。更に，実は$\Phi\Psi^{-1}$ が有界でありさえすれば正しい収束が確保される。(stochastic approximation) ただ，今迄のと概念上異る点は，(4)という(1)と"等価な"モデルに話を切りかえた所である。その新しいモデルではstate は Y′(t)である。

一般にsystem identification の立場に2通りのものがある。その1つは，(1)，(2)というsystem の基本式が与えられた時（モデルが与えられた時），常にそのモデルに固執して，それにふくまれるparameter を推定する立場である。

もう一つは，我々は system の input，output しか観測出来ず，従つて input，output の関係を正しく表現出来るモデルならどれをとつても差支えないという立場である。

第1の立場の方が第2のそれにくらべて融通性に欠ける様に見えるが，第2の立場の方が常にすぐれているとも云えない。第1の立場は，かなり system の物理的内容，意味がつかめている場合で，従つて"状態"は直接観測出来なくても物理的に十分意味のある量でなければならない。そしてそのようなモデル(1)は観測系(2)をあるクラスの中で変えても（実験方法を変えても）変らないようなものと考える。

これに対して第2の立場では，system の物理的内容，意味についての知識が低いかあるいは考えうる考えうる自由度が大きく，"状態"は形式的（あるいは数学的）な量と考える。この立場に関連して出てくる重要な概念は勿論，systemの等価性（equivalence）である。つまり，同じ input-outputの関係をもつsystemへの分類である。そしてそれから1つの equivalence class の中で最も"単純な" systemは何かという問題が重要になる。（有限オートマトンではそれを"minimal" automoterという。）

その様な議論が可能ではあるが，一方，第2の立場は特殊な観測系(2)に完全に依存するという狭さをもつている。観測系が変れば，等価systemのクラスわけは変つてしまう。そういう意味では，第2の立場は"単能的な"，一面的な identification にしかならないとも云えよう。

今迄はむしろ第1の立場での議論であつたが，今度議論しようというのは第2の立場からである。

さて，(2)におけるΨの inverse が存在しない場合，すなわち linear non-convartible system を考える。例えば極端に，Ψが1行N列のmatrixであるとしよう。即ち，systemはN次元だが，観測は1時には唯1つしか得られない場合である。この時，新しい"state" $Y'(t)$を導入して(4)に似た，(1)，(2)に等価なY' の transition equation をどの様にしてつくれるか。

1つの方法は，XがN次元でYが1次元だから，$X(t)$を$[Y(t), Y(t+1), \cdots, Y(t+N-1)]^t$でおきかえるようとすることであろう。

$$X(t+n) = \Phi^n X(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{n-k-1} [BU(t+k) + \Gamma r(t+k)]$$

が(1)より成立つから

$$Y(t) = \Psi X(t) + W(t)$$

$$Y(t+1) = \Psi\Phi X(t) + \Psi[BU(t) + \Gamma r(t)] + W(t+1)$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$Y(t+N-1) = \Psi\Phi^{N-1}X(t) + \Psi\sum_{k=0}^{N-2}\Phi^{N-k-2}[BU(t+k) + \Gamma r(t+k)] + W(t+N-1)$$

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ Y(t+1) \\ \vdots \\ Y(t+N-1) \end{bmatrix} \triangleq Y'(t), \quad \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi\Phi \\ \vdots \\ \Psi\Phi^{N-1} \end{bmatrix} \triangleq T,$$

$$\begin{bmatrix} W(t) \\ \Psi[BU(t) + \Gamma r(t)] + W(t+1) \\ \vdots \\ \Psi\sum_{k=0}^{N-2}\Phi^{N-k-2}[BU(t+k) + \Gamma r(t+k)] + W(t+N-1) \end{bmatrix} \triangleq A(t)$$

とおいて

$$Y'(t) = TX(t) + A(t)$$

若し，T^{-1} が存在すれば，$X(t)$は $[Y(t), \cdots, Y(t+N-1)]^t$ で等価的におきかえられる。このT^{-1} が存在することをsystemは可観測（observable）であるという云い方をする。（Kalman）　これは特別な場合で，一般にはK×Nmatrix Ψを観測機構がもつとき

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi\Phi \\ \vdots \\ \Psi\Phi^{m} \end{bmatrix}$$

のrankがNとなる様なmが存在する時，systemはobservableであるという。（つま

り，m時刻にわたるKmケの観測データが一般にN次元空間を張る時。)

さて，T^{-1} が存在すれば

$$X(t) = T^{-1} Y'(t) - T^{-1} A(t)$$

これを X−transition equation に入れれば Y'−transition equation をうる：

$$Y'(t+1) = \Phi^* Y'(t) + TBU(t) + T\Gamma r(t) + A(t+1) - \Phi^* A(t) .$$

$$\Phi^* = T \Phi T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & \mathrm{I} & \\ 0 & & \\ & & \\ \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \end{bmatrix} , \qquad \mathrm{I} \text{ は } (N-1) \text{ 次元単位matrix} .$$

特にzero input ($U=0$, $r=0$) の時には

$$Y(t+N) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i Y(t+i-1) + W(t+N) - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i W(t+i-1)$$

となつて，higher order の微分方程式で表わされる system と同様，unknown parameter は N^2 ケの代りにNケとなる。

7−5　諸問題点

ここでは内容は省略するがsystem identificationに関連して，研究されつつあるかあるいは将来の重要な課題などを思いつくままに列挙すれば次の様なものがある。

(1) Stochastic approximation の応用

(2) Identification の convergence "speed" を上げる様な control .

(3) Identification の convergence を早める様な観測系（実験）の逐次選択（逐次実験計画法）。

(4) Adaptive Identification (Ex. Adaptive Filter) .

(5) 多重Identification.

(6) Identification における decomposition の問題 。

(7) Identifiability の一般的な議論 。

(8) System への control の効果の identification.

(9) Non-stationary (time-variant) system の identification.

(10) Random parameter の identification.

文　　献

(1) R.E. Kalman: New Methods in Wiener Filtering Theory, Proceedings of the First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, pp.270—388, 1963, John Wiley.

(2) R.C.K. Lee: Optimal Estimation, Identification, and Control, 1964, M.I.T. Press.

(3) H. Cox: On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, pp.5-12 Jan. 1964.

(4) M. Aoki: Optimal Bayesian and Minimax Controls of a Class of Stochastic and Adaptive Dynamic Systems, Preprint of IFAC Tokyo Symposium, II-3, August, 1965.

(5) T. Fukao: System Identification by Bayesian Learning Process, Preprint of IFAC Tokyo Symposium, IV-1, August 1965.

(6) T. Fukao: System Identification by Bayesian Learning Process (1), 電気試験所彙報, vol.29, No.5, 1965年5月.

(7) T. Fukao: System Identification by Bayesion Learning Process (II), (III). 電気試験所彙報近刊.

(8) R. Bellman: Adaptive Control Process-A Guided Tour, Princeton U.P. 1961).

(9) 深尾: 適応制御過程の諸問題について(I) 電気試験所彙報, vol.26, No.1,

1964年1月.

(10) M. Aoki: Dynamic Programming Approach to a Final value Control System with a Random Variable Having Unknown Distribution Function, IRE Trans. Automatic Control, pp.270-282, 1960.

(11) Y.C. Ho, R.C.K. Lee; Identification of Linear Dynamic Systems, Information and Control, vol.8, No.1, February, 1965. pp.93-110.