数理解析研究所講究録
第9巻 1966年 1-7

最近の Edward G. Effros の仕事について

東北大学 竹 崎 正 道

最近，講演者宛に E. G. Effros より送られて来た論文の pre-print の中で，従来の作用素環論には見られなかつた斬新な idea が提示されており，我々としてもその研究は十分注目する必要があると思われるので，ここで紹介することにする。論文は次の三つであるが，何れも 10月末現在未発表である。

Ⅰ. "Convergence of Closed Subset in a Topological Space."

Ⅱ. "The Borel Space of von Neumann Algebras on a Separable Hilbert Space."

Ⅲ. "Global Structure in von Neumann Algebras."

註. Ⅰは Proc. Amer. Math. Soc., 16-5 (1965), 929～931 に発表された。

Ⅰ. Ⅱ. Ⅲ は何れも一つの基本線の上に乗つた研究である。

即ち，大ざつぱに言えば，可附番無限次元 Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の von Neumann algebras 全体の集合を $\mathfrak{A}$ とし，そこに適当な仕方で Borel structure を導入する。この Borel structure は Borel space (X, Γ) 上の von Neumann algebras の Borel field $\{\mathfrak{A}(x)\}$ という従来の概念が実は X 上の $\mathfrak{A}$-valued function として Borel function であるということと同値になる様な Borel structure になるのである。その点で，従来の Borel sections の族により定義されていた von Neumann algebras の Borel field の概念が透明になる様に思われる。その Borel structure を $\mathfrak{A}$に導入するための準備として，一般の separable complete metric space (= polonais space) X の nonempty closed subsets の全体 $C_0(X)$ が standard Borel space になることをⅠで証明する。Ⅱで $\mathfrak{A}$ が standard Borel space になる事を示し，更に $\mathfrak{A}$ の中で特に factors の全体 $\mathfrak{F}$ が standard Borel space であることを証明する。そこで J. von Neumann 以来の大問題「代数的に同型でない separable な factors はどれだ

け存在するか」に次の形で，挑戦する。即ち，$\mathfrak{F}$ から同型関係“ $\cong$ ”で商空間 $\mathfrak{F}/“\cong” = \widetilde{\mathfrak{F}}$ を作つたら Borel space として $\widetilde{\mathfrak{F}}$ は如何なるものであろうか。若し，$\widetilde{\mathfrak{F}}$ が not standard Borel space になるならば，$\mathcal{H}$ 上の factors の代数型は連続濃度だけ存在する事になり，I 型の部分は可附番だから，II 型，III 型の部分が連続濃度で存在することになるという形で，問題は解決するのである。III はこの問題への接近を企つたもので，そのために $\mathfrak{F}$ の構造を更に詳しく調べている。

§ 1. Convergence of Closed Subsets in a Topological Space.

位相空間 X の閉集合の全体を C (X)，空でないもの全体を C_0 (X) とおく。今 C (X) に於て

$$\underline{\lim}\, F_\alpha = \{ x \in X ;\ \forall \text{ nbd. } V(x) \text{ of } x,\ \exists\, \alpha_0 : V(x) \cap F_\alpha \neq \phi \quad \text{for } \forall\, \alpha \geqq \alpha_0 \}$$

$$\overline{\lim}\, F_\alpha = \{ x \in X ;\ \forall \text{ nbd. } V(x) \text{ of } x,\ \forall\, \alpha,\ \exists\, \alpha_0 \geqq \alpha\ V(x) \cap F_{\alpha_0} \neq \phi \}$$

と direct sequence $\{F_\alpha\}$ の $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ を定義し，$\overline{\lim}\, F_\alpha = \underline{\lim}\, F_\alpha$ のときこれを $\lim F_\alpha$ と記す。$\Sigma \subset C(X)$ に対し，$\overline{\Sigma}$ を Σ の凡ての limit の全体とし $\overline{\Sigma} = \Sigma$ のとき Σ を convergence closed という。

C (X) に conv. closed sets の族より生成される位相を定義し，その relative topology として C_0 (X) を位相空間にし，これを convergence topology という。更に，この位相から生成される Borel structure を C_0(X) に考えて convergence Borel structure と呼ぶと

定 理　X が polonais space ならば，C_0(X) の convergence Borel structure は standard である。そして，この Borel structure は C_0(X) 上の functions

$$F \in C_0(X) \rightarrow d(x, F) = \inf \{ d(x, y) : y \in F \}$$

の族が凡て Borel function になる様な最も弱い Borel structure である。

§ 2. The Borel Space of von Neumann Algebras on a Separable Hilbert Space.

1°) Separable Banach Spaces.

前節の結果により，X を separable Banach space とすれば $C_0(X)$ は standard Borel space になる。X の closed subspaces 全体を $\mathfrak{M}(X)$ とおくと $\mathfrak{M}(X)$ は $C_0(X)$ で conv. closed になる。従つて $\mathfrak{M}(X)$ は standard Borel space である。今 X の dual X^* の w^*-closed subspaces 全体を $\mathfrak{W}(X^*)$ とおくと対応

$$Y \in \mathfrak{M}(X) \rightarrow Y^1 = \{ f \in X^* \ ; \ f(x) = 0 \quad x \in Y \} \in \mathfrak{W}(X^*)$$

により $\mathfrak{M}(X)$ と $\mathfrak{W}(X^*)$ とは1対1に対応する。それで，この対応により $\mathfrak{M}(X)$ の standard Borel structure を $\mathfrak{W}(X^*)$ に変換して，$\mathfrak{W}(X^*)$ を standard Borel space にする。

定 理1. $\mathfrak{W}(X^*)$ の Borel structure は次の function

$$Y \in \mathfrak{W}(X^*) \quad \rightarrow \quad \| x \mid Y \| \qquad x \in X$$

が Borel function になるような最弱 Borel structure である。

定 理2. $\mathfrak{W}(X^*)$ には次の様な countable Borel choice functions $f_n \ ; \mathfrak{W}(X^*) \rightarrow X^*$ が存在する。即ち，$\{ f_n(Y) : n = 1, 2, .. \}$ は Y の closed unit ball Y_1 で w^*-dence である。

系. $(S, \mathfrak{m})$ が Borel space ならば，S 上の $\mathfrak{W}(X^*)$-valued function $s \in S \rightarrow Y(s) \in \mathfrak{W}(X^*)$ が Borel function であるための必要十分条件は，S 上の X^*-valued Borel functions $f_n(s)$ $n = 1, 2, ..$ が存在して $\{ f_n(s) : n = 1, 2, ... \}$ が $Y(s)_1$ で w^*-dence になることである。

この結果により通常の $(S, \mathfrak{m})$ 上の Borel field という概念との関係がついて，両者が一致することが分る。

2°) Von Neumann Algebras.

separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の bounded operator 全体の

algebra を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, von Neumann algebras 全体を $\mathcal{A}$, factors 全体を $\mathcal{F}$ とおく。$\mathbb{B}$ 上の σ-weakly continuous linear functionals 全体の作る Banach space を $\mathbb{B}_*$ とすると $\mathbb{B}_*$ は separable Banach space で $\mathbb{B}=(\mathbb{B}_*)^*$ となることは良く知られている。そこで，$\mathcal{W}(\mathbb{B})$ を $\mathbb{B}$ の σ-weakly closed subspaces の全体の作る Borel space とすると，前節の議論からこれは standard Borel space である。今 $\mathcal{W}(\mathbb{B})$ に次の operations を考える；

$$Y \in \mathcal{W}(\mathbb{B}) \to Y^* = \{A^*;\ A \in Y\} \in \mathcal{W}(\mathbb{B})$$
$$Y \in \mathcal{W}(\mathbb{B}) \to Y' = \{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H});\ AB = BA \text{ for } \forall B \in Y\}$$

定 理 3. $Y \in \mathcal{W}(\mathbb{B}) \to Y^* \in \mathcal{W}(\mathbb{B})$, $Y \in \mathcal{W}(\mathbb{B}) \to Y' \in \mathcal{W}(\mathbb{B})$ は共に $\mathcal{W}(\mathbb{B})$ の Borel transformations である。

従つて，

系 1. $\mathcal{A}$ は $\mathcal{W}(\mathbb{B})$ の Borel subset である。即ち，$\mathcal{A}$ は standard Borel space になる。

系 2. 次の写像は共に Borel である。

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \in \mathcal{A}$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \in \mathcal{A}$$

但し，$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ により生成される von Neumann algebra とする。

系 3. $\mathcal{F}$ は $\mathcal{A}$ の Borel subset で relative Borel structure に関して standard である。

§ 3. Global Structure in von Neumann Algebras.

記号を次の様に約束する。

$\mathcal{H}_n$; fixed n-dimensional Hilbert space $1 \leqq n \leqq \aleph_0$

$\mathcal{A}_n$; Borel space of all von Neumann algebras on $\mathcal{H}_n$.

$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$; disjoint union

$\mathcal{F} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{A} ;\ \text{factor}\}$

$\hat{\mathfrak{F}}$; space of all spatial isomorphic classes in $\mathfrak{F}$.

$\tilde{\mathfrak{F}}$: space of all algebraic isomorphic classes in $\mathfrak{F}$.

$[\mathfrak{A}]$; spatial isomorphic class of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$,

$[[\mathfrak{A}]]$; algebraic isomorphic class of $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{a}_\alpha = \{ \mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$; of type $\alpha \}$.

$\alpha = \mathrm{I}$, II , III , finite, infinite.

$\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha \cap \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{a}_n \cap \mathfrak{F}$.

G_n ; group of all unitary operators on $\mathcal{H}_n$.

我々が今日最も関心のある問題 「separable Hilbert space 上に代数型の異なる factors はどれだけ存在するか」 の reduction をここで進める訳である。

定 理1. φ_n : $G_n \times \mathfrak{a}_n \ni (V, \mathfrak{A}) \to U\mathfrak{A}U^{-1} \in \mathfrak{a}_n$ は Borel map である。

定 理2. 各 $\mathfrak{A} \in \mathfrak{a}$ に対し $[\mathfrak{A}]$ 及び $[[\mathfrak{A}]]$ は共に $\mathfrak{a}$ の Borel set である。

系1. $\hat{\mathfrak{a}}$,及び $\tilde{\mathfrak{a}}$ の各点は Borel set である。

系2. $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}$ は Borel set である。

定 理3. $\mathfrak{F}_{fin.}$ は $\mathfrak{F}$ の Borel set である。

定 理4. $\hat{\mathfrak{F}}$ が countably separated であることと $\tilde{\mathfrak{F}}$ がそうであることとは同値である。

従つて $\tilde{\mathfrak{F}}$ が not countably separated なことを示すためには $\hat{\mathfrak{F}}$ についてそれを証明すればよいわけである。ところで問題の本質的な部分は $\mathfrak{F}_\infty$ にあるわけだから，結局，standard Borel space $\mathfrak{F}_\infty$ 上の polonais transformation group G_∞ の作用の下でその orbit space $\hat{\mathfrak{F}}$ が本質的部分になる訳である。即ち，$\mathfrak{F}_\infty / G_\infty$ を調べることが今後の課題である!

次に，与えられた von Neumann algebra の central decomposition を通じて，上の問題に接近するルートを検討して見る。

$\mathfrak{A}$ を separable Hilbert space 上の von Neumann algebra とすれば， standard measure space $(Z, \mathfrak{M}, \mu)$ とその上の $\mathfrak{F}$ - valued Borel function $\mathfrak{F}(\zeta)$ により

$$\mathfrak{A} \cong \int_Z^{\oplus} \mathcal{F}(\zeta) \quad d\mu \quad (\zeta)$$

と分解する。 今

$$\text{map.} \quad \zeta \in Z \rightarrow \mathcal{F}(\zeta) \in \mathcal{F} \longrightarrow [\mathcal{F}(\zeta)] \in \hat{\mathcal{F}}$$

により $\hat{\mathcal{F}}$ 上に induce される measure が countably separated のとき $\mathfrak{A}$ は centrally smooth であるという。従つて，centrally smooth でない von Neumann algebra の存在を示しても問題は解ける。

centrally smooth な von Neumann algebra の分解については更に詳しい分解が得られて，

定 理5. centrally smooth von Neumann algebra を $\mathfrak{A}$ とすると，$\hat{\mathcal{F}}$ の Borel set W とその上の $\mathcal{F}$ －valued Borel function $\mathcal{B}(\xi)$ と，W 上の standard Borel measure ν_m 及び abelian von Neumann algebra $\mathcal{P}_m$ が $\pi_1^{0}\mathcal{B}(\xi) = \xi \quad \xi \in W$ となるように存在し，

$$\mathfrak{A} \cong \sum_{m=0}^{\infty} \int^{\oplus} \mathcal{B}(\xi) \; d\nu_m(\xi) \otimes \mathcal{P}_m$$

となる。ここで $\nu_m \ (m \geqq 1)$ は disjoint で $\mathcal{P}_m$ は m 次元 abelian von Neumann algebra で $\mathcal{P}_0 = L^{\infty}(0, 1)$ である。但し π_1 は $\mathcal{F} \ni \mathfrak{A} \rightarrow [\mathfrak{A}] \in \hat{\mathcal{F}}$ の map を意味する。

今，$\mathfrak{A}$ の center を $\mathfrak{Z}$，その projection 全体を $\mathfrak{Z}_p$ とする。E，F $\in \mathfrak{Z}_p$ に対し E $\cong$ F を $\mathfrak{A}$E と $\mathfrak{A}$F が spatial isomorphic なることにより定義して E，F は spatially equivalent であるという。このとき $(\mathfrak{Z}_p, \cong)$ は dimension lattice になる。

E，F $\in \mathfrak{Z}_p$ が $0 \neq E_1 \leqq E$，$0 \neq F_1 \leqq F$，$E_1 \cong F_1$ となる。projections E_1，$F_1 \in \mathfrak{Z}_p$ を有しないとき，globally disjoint という。E と 1－E が globally disjoint のとき E は globally central であるといい，その全体を $\mathfrak{Z}_p^G$ と記す。これ等の記号の下で次の様な定義をする。

$$\mathfrak{A} : \text{global factor} \rightleftarrows \mathfrak{Z}_p^G = \{0, 1\} \quad ,$$

$$\mathfrak{A}: \text{globally multiplicity free} \rightleftharpoons \mathfrak{Z}_p^G = \mathfrak{Z}_p.$$

$E \in \mathfrak{Z}$ に対し

$$G(E) = \inf\{F \in \mathfrak{Z}_P^G : F \geqq E\}$$

とおく。

$$\mathfrak{A}: \text{global type I} \rightleftharpoons \exists E \in \mathfrak{Z}_p ; G(E) = I.$$

$$\text{且} \quad \mathfrak{A}_E : \text{globally multiplicity free.}$$

$$\mathfrak{A}: \text{globally finite} \rightleftharpoons E \cong I \Rightarrow E = I.$$

以下，自然に globally semi-finite, global type II, global type III を定義する。

そして，centrally smooth global factor $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{P}_m$（$\mathfrak{F}$ は factor）の形をしており，$m \geqq 1$ ならば $\mathfrak{A}$ は global type I，$m = 0$ なら $\mathfrak{A}$ は global type III である。従つて，global type II の global factor は central smooth にはならない。即ち，この様な algebra の存在を示せば我々の問題は解決する／