

円柱を過ぎる粘性流の数値解

鉄道技研 川 口 光 年

円柱を過ぎる粘性流体の研究は、粘性流の一つの代表的な場合として進められて来た。しかし粘性流体の基礎方程式が非線型の偏微分方程式であることがわざわいして、現在までの所満足すべき解析解は得られていない。もっとも非常に小さなレイノルズ数 R の場合にはオセーソンの近似が、よい近似を与え、大きなレイノルズ数の場合には境界層近似を使えば取り扱えるが、中間のレイノルズ数領域 ($10 < R < \text{数千}$) には適当な近似もみあたらない。この領域はカルマン渦列の発生が起る領域 ($R \sim 40$) を含み、理論的にも非常に興味が深い。この領域を研究するには現在の所数値的に解を求める以外にはない。

Thom (1933) の有名な数値解以来、川口 (1953)、Apelt (1961) の定常解の研究、Payne (1958)、Hirota & Miyakoda (1965) の非定常流の計算が、現在までの主な数値解であるが、各研究は散発的なもので系統的には行われなかった。ここに報告するのは Kawaguti & Jain が行った非定常流の計算と Takami が NYU で行っている定常流の計算の中間報告である。

A) 非定常流 (Kawaguti & Jain)

独立変数 (r, θ) を $\xi = \ln r$ によって (ξ, θ) に変換し、 $\Psi = r \sin \theta + \psi$ によって一様流をひきさると無次元化した方程式は

$$\begin{cases} -e^{2\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(\xi, \theta)} + e^{\xi} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cos \theta \right\} + \frac{2}{R} \Delta \zeta = 0, \\ \zeta = -e^{-2\xi} \Delta \psi \end{cases} \quad (1)$$

となり、満足すべき境界条件は

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad \Psi = \zeta = 0 \\ t \geq 0 & \quad \begin{cases} \psi \rightarrow 0 & r \rightarrow \infty \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\sin \theta & \text{at } \xi = 0 \ (r=1) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

である。

実際に数値計算を行う際には、無限遠の条件を十分大きな半径 ($r=111.3$) の円周の所で満足させた。また方程式(1)を差分化する際、空間的差分には中心差分、時間的差分には前部差分をとった。領域を $\Delta\xi = \Delta\theta = \pi/30$ で分割したので網目点は約1400である。

実際の手順は次の通りである：

- (i) $t=0$ において円柱表面上の ψ を除いて、すべての ψ, ζ を0とする。
- (ii) (1) の第2式を差分化したものを使って、 ψ の値を修正する。この際 over-relaxation をやった。
- (iii) 表面の ζ を修正する
- (iv) $t = \Delta t$ に進む
- (v) (1) の第1式を差分化したものによって、各点の ζ の値を求める。

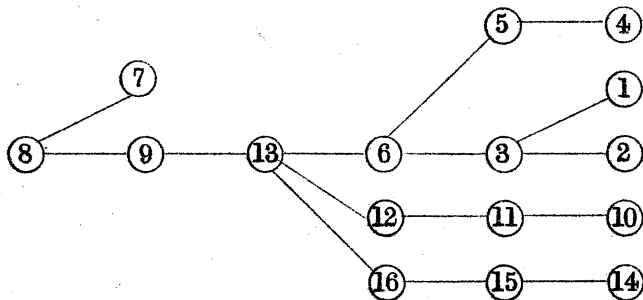
以下同様な過程をくり返り。

時間のステップ Δt については、熱伝導型の時の条件を考慮に入れて、 $R \geq 30$ では0.04、 $R=10, 20$ では0.02をとった。 $R=1$ の場合は、0.002でも収束せず、 $\Delta t = 0.001$ で収束する結果が得られた。

実際に計算したのは、 $R=10, 20$ ($t_f = 12$)、 $R=30$ ($t_f = 16$)、 $R=40, 50$ ($t_f = 24$)、 $R=60$ ($t_f = 12$)、 $R=100$ ($t_f = 24$)、ここに t_f は計算を終了した時間である。結果を定常流の数値計算が存在する場合 ($R=10, 20, 40$) と比較して、また時間と共に変化する様子からして、 $R=10 \sim 50$ の結果は定常流と考えるとよいことがわかる。 $R=60, 100$ の場合の計算は定常流とは考えられないが、抵抗に関しては外挿することにより、定常流の値として、かなり信用しうる値が得られた。

B) 定常流 (Takami)

使用した独立変数 (ξ, θ)、方程式はA)と同じである。もちろん $\partial\zeta/\partial t = 0$ 。
 $\Delta\xi = \Delta\theta = \pi/40$ 。無限遠に対応する十分大きな半径の円周の上での境界条件としては、今井教授の Oseen 近似による漸近解 (第二近似) を使った。主な結果を第一表に示す。実際の計算は⑧の場合を計算し、次々に得られた結果を初期値として次の順序で行われた。



第 1 表

番計 号算	Re	h	r _B	格子点 の数	r _C	α	β	itera- tionの 数(10 ²)	C _D	C _D ^(∞)
①	2	$\frac{\pi}{40}$	198	1595	300	10	0.4	12	6.574	6.6438
②			31.7	1841			0.32~0.35.	9	6.618	
③			59.4	2169			0.15~0.17	26	6.637	
④	4	$\frac{\pi}{40}$	198	1595	300	10	0.32	5	4.434	4.4282
⑤			31.7	1841			0.2 ~0.27	9	4.439	
⑥			59.4	2169			0.04~0.13	28	4.437	
⑦	10	$\frac{\pi}{20}$	198	396	1.87	0.5	0.12	3	2.784	2.7215
⑧			31.7	437		0.5	0.1 ~0.12	—	2.777	
⑨			59.4	725		0.2	0.01~0.015	34	2.746	
⑩		$\frac{\pi}{40}$	12.3	1349	1.87	1.0	0.3	4	2.789	2.7377
⑪			16.9	1513		1.0	0.2	5	2.779	
⑫			23.1	1677		1.0	0.2	9	2.771	
⑬			59.4	2169		0.5~1.0	0.03~0.06	24	2.754	
⑭	15	$\frac{\pi}{40}$	16.9	1513	300	10	0.2	7	2.298	2.2535
⑮			23.1	1677			0.1 ~0.13	11	2.286	
⑯			59.4	2169			0.03~0.035	37	2.266	

h : mesh size $\Delta\xi = \Delta\theta = h$

r_B : 外の境界 (ここで漸近解を使う)

r_C : 抵抗を計算した円周の半径

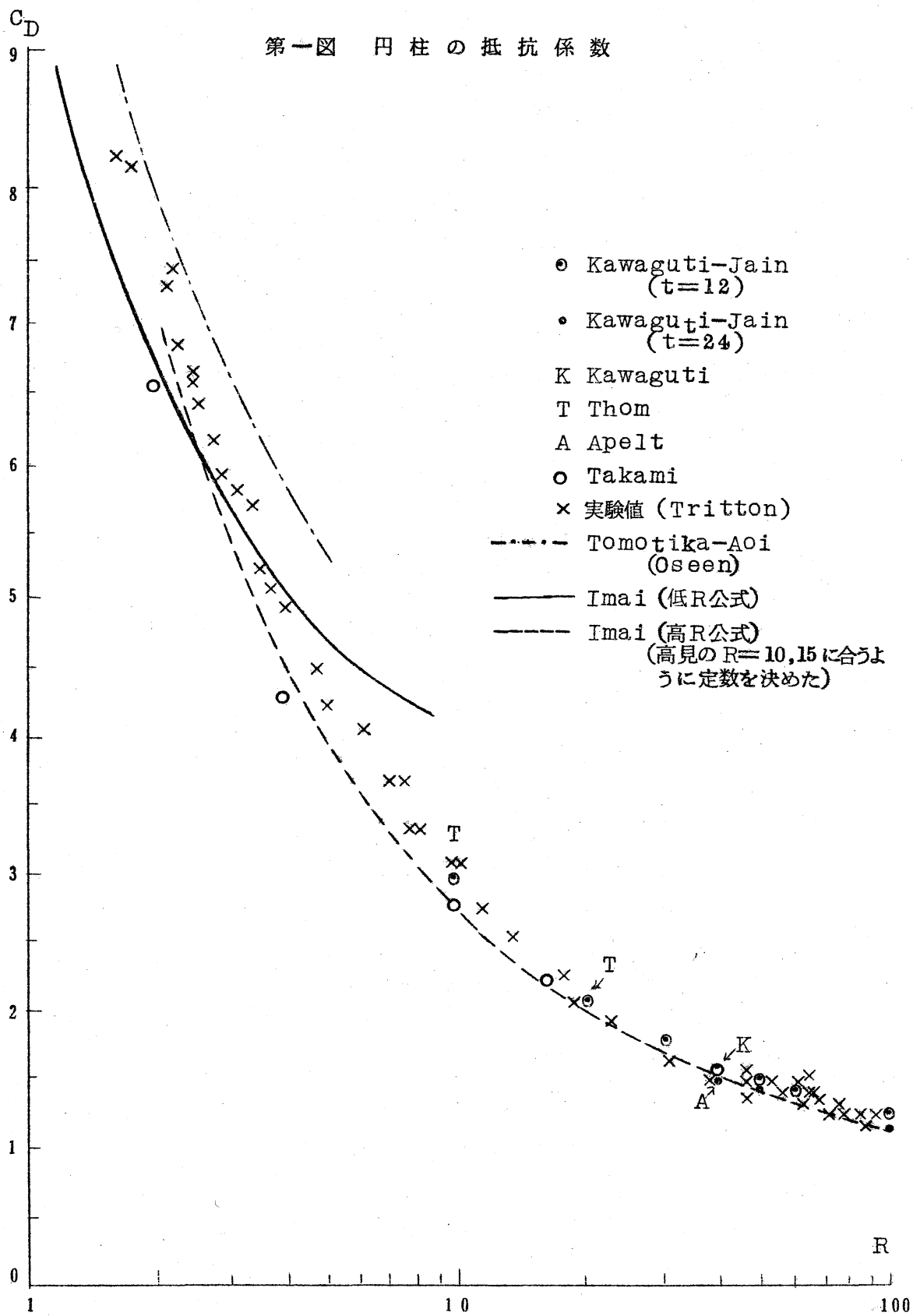
α : (1)の第二式に対する under-relaxation 係数

β : (1)の第一式に対する under-relaxation 係数

C_D^(∞) : r_B を変えた3つの計算値から r_B → ∞ の時の C_D の外挿値

以上二つの計算から得られた。抵抗係数，後流の渦の長さをRの関数として，第一図，第二図に示す。

第一図 円柱の抵抗係数



第二図 後流の渦の長さ

