数理解析研究所講究録
第12巻 1966年 15-19

『Laxの差分法による非線型双曲型方程式の数値計算』

名古屋大学　保　原　　充

非粘性の一次元非定常流の問題は，双曲型偏微分方程式を解く事に帰着するが，初期条件，境界条件の与え方によっては，考えている場の中にShock wave 又はContact surface の様な不連続面が生じ，しばしば取扱い方が問題になる。差分法を用いて問題を解く事は，計算の網目の大きさに応じた見掛け上の拡散項をもった式を積分する事と同等になり，従って不連続面は現れずに，それに相当した小さい巾の領域で各量が有限乍ら高い変化率を示して拡散項が強くきき，その他の領域ではこの項が小さくて無視出来る程度となる。この函数滑化の性質は，電子計算機で計算するのに都合がよいが，初期及び境界条件を含めた一般的な解の安定性を論ずるのは難しく，個々に結果を検討する事が多い。ここでは Laxの初期の差分法[1] を取り上げて見る。先づ基本方程式をLax の Conservation law の形 $\left(\frac{\partial U_i(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x}=0\right)$ に書き換えて，之を次の差分に置換える。

$$\frac{U_i(t+\Delta t,x)-\frac{1}{2}\{U_i(t,x+\Delta x)+U_i(t,x-\Delta x)\}}{\Delta t}$$

$$+\frac{F_i(t,x+\Delta x)-F_i(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}=0, \tag{1}$$

F_i は U_i，x，t の函数とする。(1)によって時刻 t での各 x 点における $U_i(t,x)$ を知れば，$U_i(t+\Delta t,x)$ を求める事が出来る。(1)をTaylor 展開すれば判る様に（下式），

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial F_i}{\partial x}+\underline{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}-\underline{\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$$

$$+O(\Delta t^2,\Delta x^2)=0, \tag{2}$$

差分式は高次の微小量を省略して考えれば下線を討いた拡散項をもった式を解く事と同等になり，之等がShock 近傍で強くきいて滑らかな解をもたらす。しかし一方では又解に誤差をもたらす。$x-t$ 面での網目の大きさ Δx，Δt は解の安定条件を満足する様に選ばねばならないが，実際に

計算する時には更に境界条件について考慮する必要があり，具体的な問題を指定して議論する方がよい。

$x=0$ に壁がある断面積一定の半無限長管に圧力 p_1，密度 $\rho_1=1$ のガスを満し，このガスの左端に $+x$ の方向に $p_m=\sin^2 t$ なる変動圧力を加える（例えばMagnetic pressure）問題を考える。初期の $p_1>p_m$ なる間は，ガスは静止状態を保ち，$p_1<p_m$ になると押されて右方に運動を始め，$x=0$ にあったガスの左端末（Contact surface）は壁から離れ又運動ガスの領域にはShock が形成されるであろう。即ち，領域 $x\geqq 0$，$t\geqq 0$ 内には二つの不連続面があると予想されるが，Richtmyer[2]も指摘する如く，領域内にContact surface があるとEuler 座標系（t，x）を用いた時は計算の精度が著しく落ちる可能性がある。この様な問題で Lagrange座標系（t，ξ）

$$t=t \quad , \quad d\xi=\rho(dx-v\,dt) \tag{3}$$

（ρは密度，vは速度）を用いると，Contact surfaceは常に左端のガス粒子に附随した座標 $\xi=0$ で指定され，従って（t，ξ）面ではContact surface が消去される。又運動中の各粒子の経路が判るのみならず，質量保存の関係が自動的に正確に満足されている利点がある。依って以下ではLagrange 系を用いて調べる。基礎式をLagrange 表示してconservation law の形にすると下の如くになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{\partial v}{\partial \xi}=0 \quad , \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial \xi}=0 \quad , \tag{5}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial pv}{\partial \xi}=0 \quad , \quad E\equiv\frac{p}{(\gamma-1)\rho}+\frac{1}{2}v^2 \quad , \tag{6}$$

（pは圧力，γは比熱の比）。(4)(5)(6) 及び(3)を積分すると p，ρ，v，xをt，ξの函数として求める事が出来るが，初期条件は $t=0$ で $p=p_1$，$\rho=1$，$v=0$。境界条件は $\xi=0$ で $p_{\xi=0}=\sin^2 t$ となる。密度 ρ と速度 v の境界条件は explicit には指定されないので，(5)，(6)について (1)を変形した差分式から

$$v(t+\Delta t,0)=v(t,0)-\frac{\Delta t}{\Delta\xi}\{p(t,\Delta\xi)-p(t,0)\} \quad , \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho(t+\Delta t,0)} = \frac{1}{\rho(t,0)} + \frac{\Delta t}{\Delta\xi}\{v(t,\Delta\xi) - v(t,0)\}, \quad (8)$$

に依って与える。右辺は時刻tでの量がすべて求められているから判った量である。安定条件は，境界のある場合はやっかいであるが，先づCourant-Friedrichs-Lewy の条件[2]

$$\frac{\Delta t}{\Delta\xi}\rho\sqrt{\gamma\, p/\rho} \leq 1 \quad , \quad (9)$$

が満たされるように $\Delta t/\Delta\xi$ を選定する事とする。之は数学的には $\Delta t/\Delta\xi$ が，到る所特性曲線の傾斜を越えない様にする事と同じである。実際に(9)の Check をすべての網目点で行って

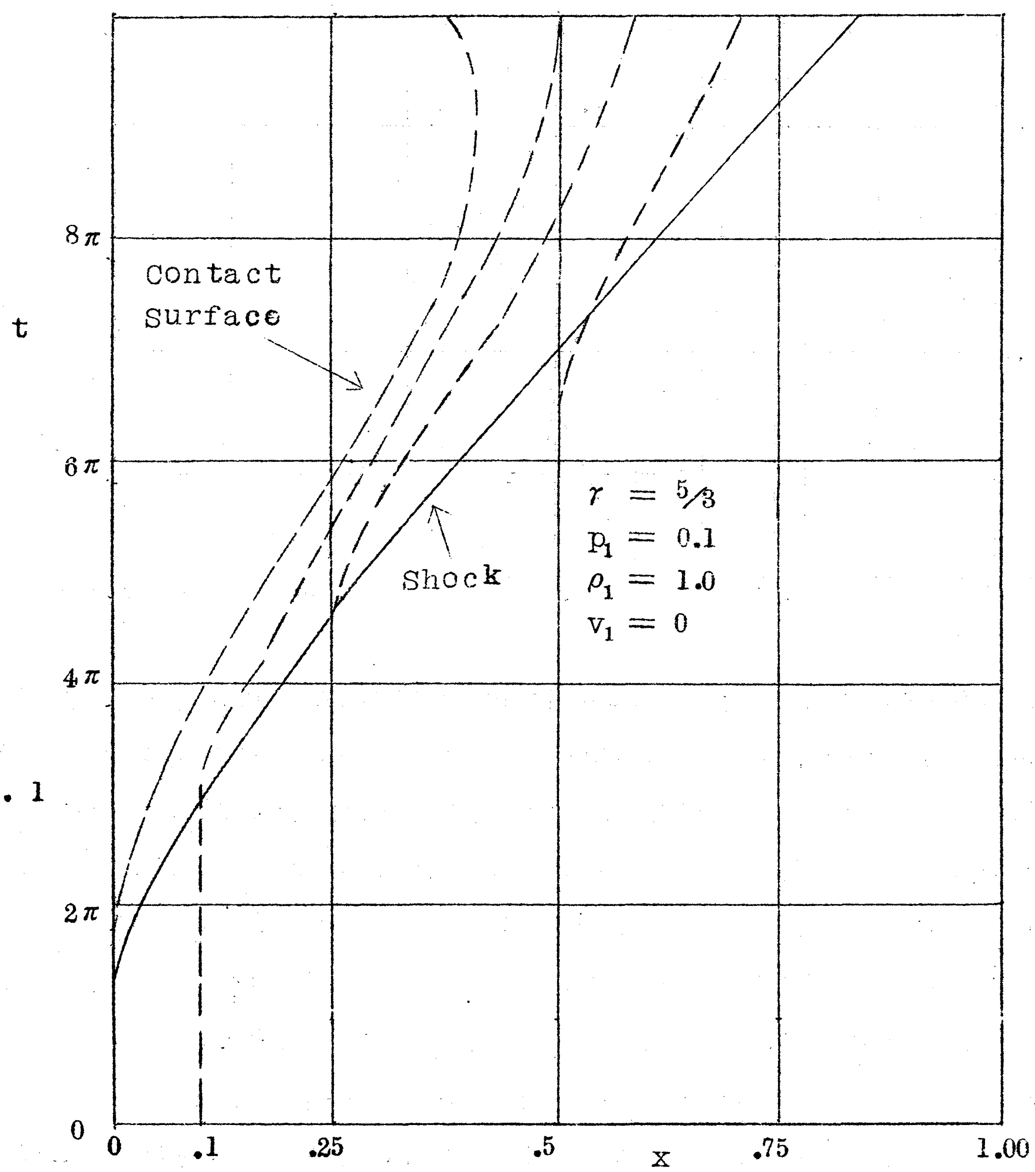

Fig. 1

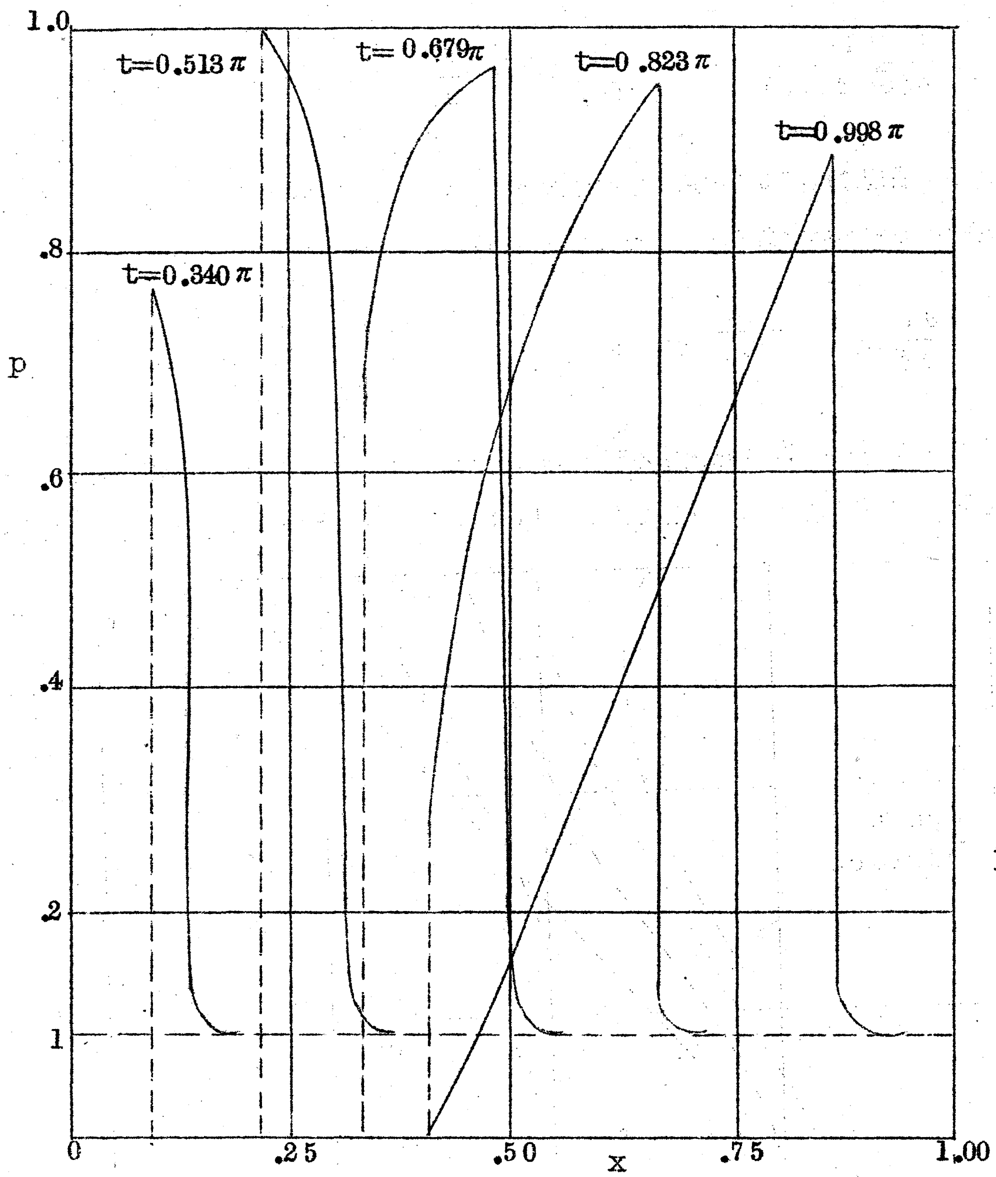

Fig.2

網目の寸法を変えるのは，計算プログラムを組む上で大変面倒になるので，次の簡略化を行った。幸い(9)にはvが含まれず，又時刻tの小さい所では圧力pの境界に於ける変化が0から連続的に増す為，Shock も弱い事を利用して，少くも$\xi=0$に沿ってはガスは等エントロピー変化をすると考える。この時密度 ρ_m は $\rho_m/\rho_1=(p_m/p_1)^{\frac{1}{\gamma}}$ から求められ，従って$\xi=0$での(9)のCheckは前以って行う事が出来る。そして$\xi\neq0$の所でも$\xi=0$での条件 (11) が大略満足されるものと仮定する。先づΔtを，p_m の変化率が充分小さくなる様に決めて，次に(9)を満す様に各時刻での$\Delta\xi$を選定し，之を以って時刻tでのmesh巾とする。以上の法でプログラムを組み電子計算機で$t=0\sim\pi$の範囲に積分した結果の一部を第1，2図に示す。第1図は$x-t$面での各粒子の運動軌跡とShockを示し，第2図 は 若干の時刻に於ける圧力分布を示

す。Shock は小さな巾の間で圧力が強い乍ら連続的な変化をする領域として判定出来る事が判る。

以上，計算の途上，安定性と誤差の判定に対する疑問は残すが一応 reasonable な答が得られたのでここに御報告する。

尚，本研究は，Cornell 大学Sears 教授の指差に依ってなされたものであることを附記し，感謝の意を表する次第である。

(1) Lax, P.D.: Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, Commu. Pure and Appl. Math., vol.7 • 159-193 (1954).

(2) Richtmyer, R.D.: Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, Inc., N.Y., (1964).