

形式的言語に関する一つの構造方程式の 解の表現定理について

九州大学 藤野 精一
理 学 部

1°. V を任意の空でない有限集合 (これをアルファベットという), $\theta(V)$ を V の上のすべての語 (V の要素を有限個ならべてできるもの) の集合とする。とくに空語を λ と記すことにする。 $\theta(V)$ の部分集合間の演算として $+$, \cdot , $*$ を次のように定義する; ($R_1, R_2 \subset \theta(V)$ として)

$$R_1 + R_2 = \{w; w \in R_1 \text{ または } w \in R_2\},$$

$$R_1 \cdot R_2 = \{w_1 w_2; w_1 \in R_1 \text{ かつ } w_2 \in R_2\},$$

$$R_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} R_1^n,$$

すなわち, $+$ を \cup の, $\sum_{n=0}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=0}^{\infty}$ のかわりに使用する。ここに, $R_1^0 = \{\lambda\}$, $R_1^n = R_1^{n-1} \cdot R_1$ ($n=1, 2, \dots$) である。

いま, $\delta(\theta(V))$ を, $\theta(V)$ のすべての部分集合の全体とし, $\delta(\theta(V))$ から $\delta(\theta(V))$ への写像を考える。写像 $f: \delta(\theta(V)) \rightarrow \delta(\theta(V))$ が次の (i), (ii), (iii) の条件を満足するとき, これを加法的正規縮小写像という:

(i) (加 法 性)

$$f(\phi) = \phi \text{ かつ任意の } R \in \delta(\theta(V)) \text{ にたいして}$$

$$f(R) = \sum_{w \in R} f(w).$$

(ϕ は空集合を示す)

(ii) (正 規 性)

$f(\lambda) = \phi$ かつ任意の $w \in \theta(V)$ にたいし $f(w)$ は 1 個の要素からなる集合か, または空集合である。

(iii) (縮 小 性)

$$f(w) \neq \phi \text{ となる任意の } w \in \theta(V) \text{ にたいし}$$

$$\|f(w)\|_V < l_V(w)$$

である。ここに $l_V(w)$ は語 w の長さ (w の中にでてくる V の元をすべてかぞえたときの個数) ,

$$\|f(w)\|_V = \max_{w \in f(w)} l(w) \text{ である。}$$

また, 任意の $f: \delta(\theta(V)) \rightarrow \delta(\theta(V))$ にたいして次の集合

$$K_{\text{er}}(f) \equiv \{ w ; w \in \theta(V) \text{ かつ } f(w) = \phi \}$$

を f の核という。 R を $\theta(V)$ の部分集合とすると, $K_{\text{er}}(f) \cap R$ を, f に関する R の基底とよび $B(f; R)$ と記すことにする。

2°. f が加法的正規縮小写像であるとき, $K_{\text{er}}(f)$ の中の部分集合 R_0 を与えて, 次の方程式の解をもとめることを考えよう:

$$(II) \begin{cases} f(R) = R, \\ B(f; R) = R_0, \end{cases}$$

すなわち, f の不動点で, f に関する基底が R_0 であるような集合をもとめる問題を考えることにする。このような集合が f の特殊な場合には形式的言語のあるものと一致する場合があるので, これを一般に構造方程式とよぶことにする。

次の補題は f のもつ性質から, あきらかである。

補題 1 f が加法的正規縮小写像であるとき, 各 $w \in \theta(V)$ にたいして $f^k(w) \neq \phi$ かつ

$f^{k+1}(w) = \phi$ となる非負整数 k が存在する。とくに, $w \in [\theta(V) - K_{\text{er}}(f)]$ にとるとき k は正整数である。

この補題から次の結果が得られる:

補題 2 f を加法的正規縮小写像, R を f の不動点とする。このとき, $R = \phi$ なるとき, そのときにかぎり, $B(f; R) = \phi$ である。

補題 3 f を加法的正規縮小写像, R を $R = f(R)$ を満足する空でない集合とするとき, 各 $w \in R - B(f; R)$ にたいし

$$f^k(w) = w_0 \text{ かつ } f^p(w) \in R (p = 0, 1, 2, \dots, k)$$

なる正整数 k および $w_0 \in B(f; R)$ が存在する。

3°. いま次の集合を定義しよう：

$$K_0[x] = x \quad (x \in B(f; R)),$$

$$K_p[x] = \{w; w \in R \text{ かつ } f^p(w) = x\}$$

$$(p = 1, 2, \dots)$$

すぐにわかることは

$$(K_p[x]) \supseteq (K_{p-1}[x]) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

である。したがって各 $K_p[x]$ は、空集合ではないこの $K_p[x]$ に関して次の結果が得られる：

補題 4 f を加法的正規縮小写像， R を $f(R) = R$ なる空でない集合とするとき，上に定義される

$K_p[x]$ はいずれも空でなく，

$$f(K_p[x]) = K_{p-1}[x] \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (A)$$

を満足する

$$K_p[x] \subset R \text{ より } \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x] \subset R \quad (x \in B(f; R))$$

$$\text{したがって } \sum_{x \in B(f; R)} \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x] \subset R$$

となる。

補題 3 を適用して

$$R \subset \sum_{x \in B(f; R)} \sum_{p=0}^{\infty} K_p[x]$$

なることも証明される。

これをまとめて

定理 1 f を加法的正規縮小写像， R_0 を $\text{Ker}(f)$ 内の空でない部分集合とする。このとき方

程式(I)の空でない解は存在して、

$$R = \sum_{x \in R_0} \sum_{p=0}^{\infty} K_p(x)$$

と表現される。ここに $K_p(x)$ ($p=0, 1, 2, \dots$) は上に定義された集合である。

4° 上にあげた表現定理の結果は解を実際に作るのに有効である。いま、

$$H(x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(x) \quad (x \in B(f; R))$$

としたとき、 $K_p(x)$ のもつ性質より

$$f(H(x)) = H(x)$$

となり、 $H(x)$ も f の不動点の1つとなる。また、このとき、

$$B(f; H(x)) = x$$

である。したがって

$$\begin{cases} f(H) = H, \\ B(f; H) = x \quad (x \in R_0) \end{cases}$$

なる方程式の解 $H(x)$ をもとめて $\sum_{x \in R_0} H(x)$ を作れば、これがもとの(I)の解になっている。

5° 上のことを利用して f が

$$f \equiv \sum_{i=1}^m \partial_{u_i}$$

なる特別の場合に、

$$\square \begin{cases} \sum_{i=1}^m \partial_{u_i} R = R, \\ B(\sum_{i=1}^m \partial_{u_i}; R) = R_0 \end{cases}$$

の解をもとめることができる。ここに $\partial_u: \delta(\theta(V)) \rightarrow \delta(\theta(V)) (u \in \theta(V))$ は

$$\partial_u R = \{w; uw \in R\} \quad (R \subset \theta(V))$$

で定義される写像で、各 $u_i (i=1, 2, \dots, m)$ はいずれも λ ではなく、各 $\langle i, j \rangle$ ($i \neq j$) にたいして u_i と u_j とは、この2つの語を左から一字ごとに比較するとき、どこかで少なくとも1個所はたがいにことなっているようなものとする。 R_0 は $\text{Ker}(\sum_{i=1}^m \partial_{u_i})$ の中の集合とする。

この条件のもとに、 $\sum_{i=1}^m \partial_{u_i}$ は加法的正規縮小写像となる。

この解の詳細および定理の証明は下にあげる文献を参照されたい。

文 献

- S. Huzino: On some properties of derivative-mapping, structural diagrams and structural equations.
(今年度印刷予定)