数理解析研究所講究録
第 14 巻 1966 年 1-21

REGGE と BARUCCHI の Landau 曲線の研究について

京大・物理　瀬藤憲昭

紹介する論文は

T. REGGE and G. BARUCCHI, On the Properties of Landau Curves, Nuovo Cimento **34** (1964), 106 である。

この論文では，広い範囲の Feynman グラフの Landau 曲線について，主にその代数幾何学的性質が調べられている。

§1. 序　説

一つの Feynman グラフの過程に対する確率振巾の特異点（極とか分枝点とか）を見い出す一般論は，N. NAKANISHI[1] と L. D. LANDAU[2] によつて独立に行なわれた。NAKANISHI と LANDAU は共に Feynman パラメーターを用いたが，前者は内部四元運動量について積分を行ない，特異点の位置を外部四元運動量と Feynman パラメーターとを含む連立方程式の解として与えたが，後者は積分を行なわず特異点の位置を内部，外部四元運動量と Feynman パラメーターとを含む連立方程式の解として与えた。それは

$$\sum_{\text{vertex}} p_i = 0 \quad , \tag{1.1}$$

$$\sum_{\text{loop}} \alpha_i p_i = 0 \ , \qquad (1.2)$$

$$\alpha_i (p_i^2 - m_i^2) = 0 \qquad (1.3)$$

である。これをLandau方程式と呼ぶことにする。(1.1)は各頂点(vertex)における四元運動量の保存を表わし,(1.2)はNAKANISHIの方法では内部四元運動量について積分を行なつた効果を示し,LANDAUの方法では被積分関数が内部四次運動量について極値をとることを示している。また(1.3)はFeynman パラメーターα_iについて極値をとることを示している。

こゝで扱うのは外部四元運動量が四個の場合に限る。この時確率振巾の独立変数は二個(∵ 4×4−10(非斉次Lorentz 群のパラメーターの数)−4(外部粒子は自由粒子)=2)である。従つてLandau方程式を解いて二個の独立変数で表わせばそれがLandau曲線になつている。

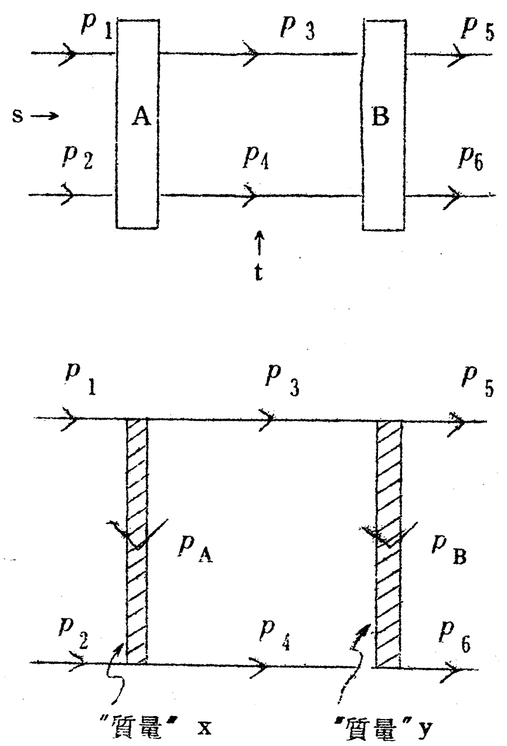
以下で用いる技術で重要なものは,BJORKEN[3)] その他の人達が指適しているLandau方程式と電気回路についてのKirchov の法則との類似性を利用して,二つのFeynman グラフA,BのLandau曲線がわかつている時それらのグラフの"積"ABのLandau曲線を求めるということである。つまり第1図上の独立変数として

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = (p_5 + p_6)^2 \ ,$$

$$t = (p_1 - p_5)^2 = (p_2 - p_6)^2$$

をとり,箱Aを"電流" $p_A = p_1 - p_3$,箱Bを"電流" $p_B = p_3 - p_5$が流れていると見なすと(第1図下),このグラフに対するLandau方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_A p_A + \alpha_B p_B + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = 0 \ , \\ &p_A^2 = x \ , \\ &p_B^2 = y \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$



第 1 図

となる。四元ベクトル p_A , p_B , p_3 , p_4 は一次独立ではないからそのGram 行列式は零である。これより

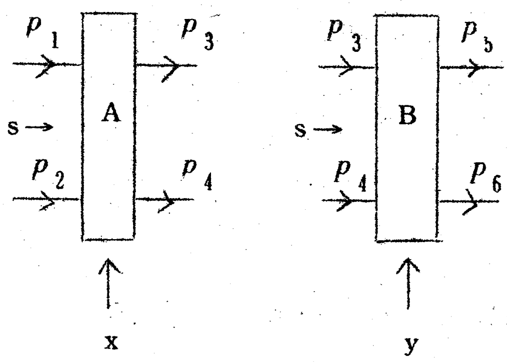
$$f_0(s,t,x,y)=0 \quad (1.5)$$

を得る。一方A，B自身もグラフであるから，そのLandau 曲線を

$$\left.\begin{aligned} f_A(s,x)=0, \\ f_B(s,y)=0 \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

とすると，″積″AB（第1図上）のLandau曲線は，（1.5）と（1.6）とより x と y を消去して

$$f_{AB}(s,t)=0$$



第 2 図

となる。つまりAとBのLandau曲線及び箱型グラフ（第1図下）のLandau 曲線（1.5）がわかつている時，″積″AB のLandau 曲線が求まつたわけである。

§2. Cayley行列式[4)]

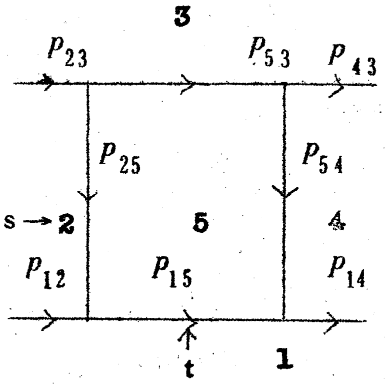
以下の議論でもう一つ重要なのは，Gram行列式をCayley 行列式に変形することである。つまり：

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & (p_1p_2) & \cdots\cdots & (p_1p_N) \\ (p_2p_1) & p_2^2 & \cdots\cdots & (p_2p_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (p_Np_1) & (p_Np_2) & \cdots\cdots & p_N^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-2)^N} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (p_1-p_2)^2 & \cdots\cdots & (p_1-p_N)^2 & p_1^2 \\ 1 & (p_2-p_1)^2 & 0 & \cdots\cdots & (p_2-p_N)^2 & p_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & (p_N-p_1)^2 & (p_N-p_2)^2 & \cdots\cdots & 0 & p_N^2 \\ 1 & p_1^2 & p_2^2 & \cdots\cdots & p_N^2 & 0 \end{vmatrix}$$

（2.1）[4)]

こゝでN＝4の場合を第3図の箱型グラフのLandau曲線と関連づけて少し調べてみる。第3図で四元運動量の名付け方は明らかであろう。そして，$p_{ij}\equiv -p_{ji}$ と約束する。その時（1.1）は例えば（235）頂点に対して

$$p_{23}=p_{25}+p_{53}$$



第 3 図

となる。つまり二つの運動量の名前の足が内側で揃つていれば（上の右辺で5という数字），それらを加えると揃つていた足がなくなつて外側の足が生き残るというわけである。これは三つ以上の運動量についても拡張できる。そしてこれが矛盾なく行なわれる保証が（1.1）なのである。逆に

$$p_{12}+p_{23}\equiv p_{13}=p_{14}+p_{43}$$

$$p_{23}-p_{43}=p_{23}+p_{34}\equiv p_{24}=p_{14}-p_{12}=p_{21}+p_{14}$$

でp_{13}やp_{24}を定義して

$$s=p_{13}^{\ 2}\quad ,\ t=p_{24}^{\ 2} \tag{2.2}$$

とおくことができる。（1.3）は

$$\alpha_1(p_{15}^{\ 2}-m_{15}^{\ 2})=0\ ,\cdots\cdots,\quad \alpha_4(p_{45}^{\ 2}-m_{45}^{\ 2})=0$$

であるが今α_i（$i=1$，……，4）がすべて零でない場合を考えると（他の場合のLandau 曲線はこの場合のLandau曲線より求めることができる。例えばこのLandau 曲線の接線とか漸近線とか………）

$$p_{i5}^{\ 2}=m_{i5}^{\ 2}\quad ,\quad i=1\ ,\cdots\cdots,4 \tag{2.3}$$

となる。そして外部四元運動量は自由粒子が持つているものであるから

$$p_{12}^{\ 2}=M_{12}^{\ 2}\quad ,\quad p_{23}^{\ 2}=M_{23}^{\ 2}\quad ,\quad p_{34}^{\ 2}=M_{34}^{\ 2}\quad ,\quad p_{41}^{\ 2}=M_{41}^{\ 2}\ , \tag{2.4}$$

（小文字mは内部質量，大文字Mは外部質量）最後に（1.2）は

$$\alpha_1 p_{15}+\alpha_2 p_{25}+\alpha_3 p_{35}+\alpha_4 p_{45}=0$$

であり，これはp_{i5}（$i=1$，……，4）のGram行列式が零であることと同値である。（勿論特異点は，physical sheet の上にあるもののみを捜しているわけではない。）そこで（2.1）（2.2）（2.3）（2.4）を考慮すると，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & (p_{15}-p_{25})^2 & (p_{15}-p_{35})^2 & (p_{15}-p_{45})^2 & p_{15}^{\ 2} \\ & & 0 & (p_{25}-p_{35})^2 & (p_{25}-p_{45})^2 & p_{25}^{\ 2} \\ & & & 0 & (p_{35}-p_{45})^2 & p_{35}^{\ 2} \\ & \text{対\quad 称} & & & 0 & p_{45}^{\ 2} \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}=$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & p_{12}^{2} & p_{13}^{2} & p_{14}^{2} & p_{15}^{2} \\
 & & 0 & p_{23}^{2} & p_{24}^{2} & p_{25}^{2} \\
 & & 0 & 0 & p_{34}^{2} & p_{35}^{2} \\
 & \text{対} & \text{称} & & 0 & p_{45}^{2} \\
 & & & & & 0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & M_{12}^{2} & s & M_{41}^{2} & m_{15}^{2} \\
1 & M_{12}^{2} & 0 & M_{23}^{2} & t & m_{25}^{2} \\
1 & s & M_{23}^{2} & 0 & M_{34}^{2} & m_{35}^{2} \\
1 & M_{41}^{2} & t & M_{34}^{2} & 0 & m_{45}^{2} \\
1 & m_{15}^{2} & m_{25}^{2} & m_{35}^{2} & m_{45}^{2} & 0
\end{vmatrix}
=0
\tag{2.5}
$$

これが第３図に対する（ 1.1 ）～（ 1.3 ）を解いて二つの独立変数 s ，t であらわしたもの，つまり第３図のLandau曲線である。もとのGram行列式よりも２行２列増えているが，形はたいへん美しい。

一般の場合に戻つて（ 2.1 ）の右辺（より前の因子を除いたもの）を

$$
\det|(s_{\alpha\beta})| \equiv \left(\quad \right) \tag{2.6}
$$

とおく。$(s_{\alpha\beta})$ は対称行列であり $s_{0\alpha}=1-\delta_{\alpha 0}=s_{\alpha 0}$， 他の $s_{\alpha\beta}=s_{\beta\alpha}=p_{\alpha\beta}{}^{2}$ ． $\left(\quad \right)$ から α_1 行，……，α_n 行，β_1 列， ……，β_n を消した"余因子"(algebraic minor)を

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n \\ \beta_1 \cdots\cdots \beta_n \end{pmatrix}
$$

と書くことにする。これは α' s ，β' s に関してそれぞれ反対称，上と下との総入れ替えに対して対称である。また次の等式が成り立つ。[4]

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma \\ \beta\,\delta \end{pmatrix}\left(\quad \right) . \tag{L.1}
$$

$$
\begin{pmatrix} \alpha\,\gamma \\ \beta\,\delta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ \delta\,\gamma \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha\,\delta \\ \gamma\,\beta \end{pmatrix}=0 . \tag{L.2}
$$

$$
\sum_{\beta=1}^{N+1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\delta_{0\alpha}\left(\quad \right). \tag{L.3}
$$

$$
\det_{\alpha,\beta}\left|\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right|=\left(\quad \right)^{N+1}. \tag{L.4}
$$

$$
\left(\quad \right) \text{は } s_{\alpha\beta} \text{ の二次式}. \tag{L.5}
$$

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$は$s_{\alpha\beta}$の一次式． (L.6)

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\\ \alpha\ \beta\end{pmatrix}$は$s_{\alpha\beta}$に依らない。 (L.7)

$$\partial\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}\Big/\partial s_{\alpha\beta}=2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad \partial^2\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}\Big/\partial s_{\alpha\beta}=-2\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix},\quad \partial\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\Big/\partial s_{\gamma\delta}=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha & \delta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}. \qquad (L.8)$$

$s_{\alpha\beta}$と$s_{\alpha\gamma}$についての$\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$の全次数は2． (L.9)

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \gamma & \eta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta\\ \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \eta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma\\ \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \delta & \beta\end{pmatrix}. \qquad (L.10)$$

尚このうち（L.1），（L.2），（L.4），（L.10）任意の行列式に対して成り立つ。

§3 箱型グラフのLandau曲線

箱型グラフのLandau曲線，つまり（2.5）については，既にたくさんの文献があるが[5),6)]こゝでは§2で導入した記号を用いて簡単にふり返つてみる。議論を一般的にするため（2.6）の$\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}\equiv f(s,t)=0$の曲線を考え，時々N＝4，つまり（2.5）（これを$f_2(s,t)=0$と書く）の場合に戻る。但しいずれの場合にも$s\equiv s_{13}\equiv p_{13}{}^2$，$t\equiv s_{24}\equiv p_{24}{}^2$を変数，他は定数とみなす。

$f(s,t)$はs，tそれぞれについて二次式でありしかも全次数は4，つまり最高巾は

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\ 1\,2\,3\,4\end{pmatrix}s^2t^2+\cdots\cdots \qquad (3.1)$$

なる形である。N＝4では

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\ 1\,2\,3\,4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1.$$

$f(s,t)$が（3.1）の形をしていることより，$f(s,t)=0$は二つの水平漸近線（t＝const.）と二つの垂直漸近線（s＝const.）を持つ。このことは，s，t平面を複素射影平面と見なすと，四次曲線$f=0$（n＝4）が無限遠直線上に二つの節点（node）を持つことを意味する（$\delta=2$，$\kappa=0$）。従つてPlücker公式（これについては後掲の中野茂先生の論文を見ら

れたい。）により $f=0$ はgenus 1，class 8 である。genusが1であるからこの曲線は楕円関数でパラメーター付けできる。水平漸近線は f を

$$f=A(t)s^2+B(t)s+C(t)$$

と書くと $A(t)=0$ の解である。ところが（L．8）により

$$A(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\quad\right)=-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

$N=4$ の場合には

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & t & m_{25}^2\\ 1 & t & 0 & m_{45}^2\\ 1 & m_{25}^2 & m_{45}^2 & 0\end{vmatrix}=\left[t-(m_{25}+m_{45})^2\right]\left[t-(m_{25}-m_{45})^2\right] \tag{3.3}$$

であるから

$$t=(m_{25}\pm m_{45})^2 \tag{3.4}$$

が水平漸近線の方程式である。これは通常のしきい値（normal threshold）で，第3図のLandau 方程式で $\alpha_1=\alpha_3=0$ の解である。同様にして垂直漸近線も求めることが出来，$N=4$ では $s=(m_{15}\pm m_{35})^2$ となり，これは $\alpha_2=\alpha_4=0$ の解となつている。

異常しきい値（anormalous threshoid）は $f=0$ の水平接線と垂直接線になつている。垂直接線は $f=0$ と $\partial f/\partial t=0$，つまり

$$\left(\quad\right)=0 , \quad \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=0 \tag{3.5}$$

を s について解けばよい。ところが（L．1）より

$$\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

で，この右辺は t を含んでいないから（3.6）を解いて直接 $s=s_i$（$i=1$，……，4）が得られこれが垂直接線の方程式である。同様にして $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=0$ と $\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=0$ の解 $t=t_i$（$i=1$，……，4）が水平接線である。尚，このことからも $f=0$ のclassが計算できる。つまり $t=\infty$ から，この曲線に引いた接線の数は垂直接線が四個と，垂直漸近線が二個，但し，後者の"接点"は今接

線を引いている点（ $t=\infty$ ）であるから二度数えて4＋2×2＝8。N＝4では，例えば

$$\binom{2}{2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s & M_{41}^2 & m_{15}^2 \\ 1 & s & 0 & M_{34}^2 & m_{35}^2 \\ 1 & M_{41}^2 & M_{34}^2 & 0 & m_{45}^2 \\ 1 & m_{15}^2 & m_{35}^2 & m_{45}^2 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.7)$$

より

$$s=\Big\{(M_{41}^2+m_{35}^2-M_{34}^2-m_{15}^2)^2-\lambda(m_{45}^2, M_{41}^2, m_{15}^2)-\lambda(m_{45}^2, M_{34}^2, m_{35}^2)$$
$$\pm 2\left[\lambda(m_{45}^2, M_{41}^2, m_{15}^2)\cdot\lambda(m_{45}^2, M_{34}^2, m_{35}^2)\right]^{1/2}\Big\}/4m_{45}^2,$$

但し $\lambda(a, b, c)=a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab$

となる。これは第3図のLandau方程式で $\alpha_2=0$ の解である。

$f=0$ はgenus 1であるからこの曲線上の唯一のAbel積分は

$$\int^s \frac{g(s, t)}{\partial f/\partial t}\,ds$$

の形をした楕円積分である。（後掲論文参照）$g=0$ は次数4－3＝1のnodeを通る共役曲線（adjoint curve）であり，今は無限遠線上にnodeがあるから g は定数（s と t とに依らない），従つて上の積分は

$$\int^s \frac{ds}{\partial f/\partial t} \qquad (3.8)$$

となる。$\partial f/\partial t$ は $f=0$ の上での値であるから（3.6）より

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\binom{2}{4}=\left[\binom{2}{2}\binom{4}{4}\right]^{1/2}.$$

$\binom{2}{2}$, $\binom{4}{4}$ は s の二次式故（3.8）は第一種楕円積分である。また同じ積分が（∵genus 1）

$$\int^t \frac{dt}{\sqrt{\binom{1}{1}\binom{3}{3}}} \qquad (3.9)$$

とも表わせる。これより s_i ($i=1$, …… , 4) のうち二つが一致すれば,
t_i ($i=1$,…… , 4) のうち二つも一致することがわかる。

今,実際にこの一致が起つたとしよう。この時 $f=0$ は有限点で node を持ちその座標は一致した根 s_i , t_i である。勿論 node は $f=0$ の上にあるから $f(s_i, t_j)=0$。s の二次式 $\binom{2}{2}$ と $\binom{4}{4}$ の判別式はそれぞれ $\binom{2\ 1}{2\ 1}\binom{2\ 3}{2\ 3}$ 及び $\binom{4\ 1}{4\ 1}\binom{4\ 3}{4\ 3}$ であり,t の二次式 $\binom{1}{1}$, $\binom{3}{3}$ の判別式はそれぞれ $\binom{1\ 2}{1\ 2}\binom{1\ 4}{1\ 4}$, $\binom{3\ 2}{3\ 2}\binom{3\ 4}{3\ 4}$ でありそれらの積は積は等しいから, $\binom{2}{2}=0$ 又は $\binom{4}{4}=0$ が重根をもつ時,そしてその時にのみ $\binom{1}{1}=0$ 又は $\binom{3}{3}=0$ が重根をもつ。従つて $\binom{2}{2}=0$ と $\binom{4}{4}=0$ が共通根を持てば $\binom{1}{1}=0$ と $\binom{3}{3}=0$ が共通根を持ち,その逆も成立する。つまり $\binom{2}{2}$ と $\binom{4}{4}$ とから s を消去した終結式と $\binom{1}{1}$ と $\binom{3}{3}$ から t に消した終結式とは等しいことがわかつた。上に述べたことをもつと一般的に言つて:

T.1 変数 $s_{\delta\gamma}$ についての $\binom{\alpha}{\alpha}$ と $\binom{\beta}{\beta}$ との終結式は,変数 $s_{\alpha\beta}$ についての $\binom{\gamma}{\gamma}$ と $\binom{\delta}{\delta}$ との終結式に等しい。

T.2 $\binom{\alpha}{\alpha}=0$ と $\binom{\beta}{\beta}=0$ の $s_{\gamma\delta}$ についての共通根が存在するとしてそれを s_1 とし, $\binom{\gamma}{\gamma}=0$ と $\binom{\delta}{\delta}=0$ の $s_{\alpha\beta}$ についての共通根を t_1 とする。T.1 によつて t_1 は存在する。この時 $s_{\gamma\delta}=s_1$, $s_{\alpha\beta}=t_1$ において $\left(\quad\right)=0$ である。

N=4 で上の定理を調べてみる。$\binom{2}{2}=0$ が重根を持つのは

$$[M_{41}^2-(m_{15}+m_{45})^2][M_{41}^2-(m_{15}-m_{45})^2][M_{34}^2-(m_{35}+m_{45})^2][M_{34}^2-(m_{35}-m_{45})^2]=0$$

の場合で質量零の粒子を考えない限り,あまり現実的ではないが, $\binom{2}{2}=0$ と $\binom{4}{4}=0$ とが共通根を持つのは例えば $M_{12}=M_{41}$, $M_{23}=M_{34}$, $m_{25}=m_{45}$,つまり弾性散乱で交換される二つの粒子の質量が等しい時起る。今質量間にある関係が存在して $\binom{2}{2}=0$ と $\binom{4}{4}=0$ とが共通根 $s=s_1$ を持つたとしよう。T.2 より $\binom{1}{1}(t_1)=0$, $\binom{3}{3}(t_1)=0$ を満たす t_1 が存在し, $\left(\quad\right)(s_1, t_1)=0$ である。この時 $\binom{5}{5}(s_1, t_1)=0$ も成り立つ。実際 (L.1)(L.3)

により

$$\Delta^{52}_{\alpha}(s_1, t_1) = \binom{\alpha}{\alpha}\binom{5}{5}(s_1, t_1) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots\cdots, 4,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\binom{5}{\alpha}(s_1, t_1) + \binom{5}{5}(s_1, t_1) = \binom{5}{5}(s_1, t_1) = 0.$$

従つて共通根 (s_1, t_1) は $\binom{5}{5}=0$ の上にある。

$$\binom{5}{5} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & M_{12}^2 & s & M_{41}^2 \\ 1 & M_{12}^2 & 0 & M_{23}^2 & t \\ 1 & s & M_{23}^2 & 0 & M_{34}^2 \\ 1 & M_{41}^2 & t & M_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv k(s, t)$$

であるからこの曲線は内部質量に依らず，考えている過程（第3図）の外状力学（kinematics）で定まる。実はこの曲線はKIBBLE[7]が調べた物理的領域の境界線なのである。$k(s, t)=0$ をKibble曲線と呼ぶ。node(s_1, t_1) では $\partial f_2/\partial s = 0 = \partial f_2/\partial t$ だから，f_2 と k とのJacobi 行列式 $J(f_2, k)$ は零である。ところがこの性質はもつと広く，$f_2=0$ がnodeを持つていなくても $f_2=0$ と $k=0$ との交点で成り立つ。なぜなら（L.10）より

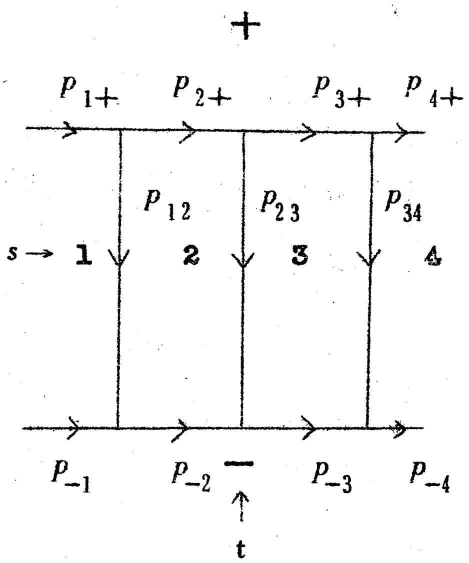
$$\frac{J}{4} = \binom{1}{3}\binom{5\ 2}{5\ 4} - \binom{2}{4}\binom{5\ 1}{5\ 3} = \binom{5}{3}\binom{5\ 2}{1\ 4} - \binom{5}{4}\binom{5\ 1}{2\ 3} = 0.$$

§4. 三段梯子グラフ

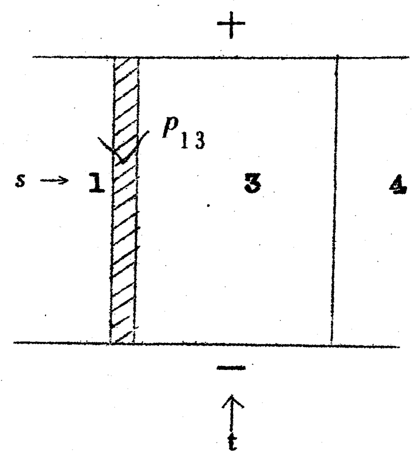
これは第4図のことである。運動量の名付けが以前と少し異なつており

$s=(p_{1+}+p_{-1})^2 = p_{+-}^2$ ，$t=(p_{1+}-p_{4+})^2 = p_{14}^2$ である。

このグラフのLandau曲線を§1で述べた，グラフの″積″の考えを用いて求める。まず第4図を第5図と第6図の″積″と見なす。（第5図で2の箱をつぶしそれを第6図で元へ戻す。）これらは箱型グラフであるからそのLandau曲線は前節で求めてあり，それぞれ



第 4 図



第 5 図

$$\left.\begin{array}{ll} g(s,t,x)=0, & \\ h(s,x)=0 & x\equiv p_{13}^2 \end{array}\right\}(4.1)$$

とする。(4.1)からxを消去して

$$f_3(s,t)=0. \qquad (4.2)$$

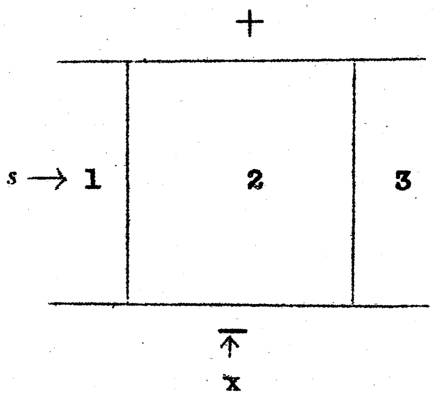
これが第4図のLandau曲線である。ところがもう一つ方法がある。**3**の箱をつぶして再び元へ戻す方法である。この時

$$\begin{array}{ll} g'(s,t,y)=0, & \\ h'(s,y)=0, & y\equiv p_{24}^2 \end{array} \qquad (4.3)$$

からyを消して

$$f'_3(s,t)=0. \qquad (4.4)$$

(4.2)も(4.4)もs, t平面の代数曲線である。これらが一致しなければ第4図のLandau 曲線は可約になつてしまう。実は前節T.1によりこれらは一致する。なぜなら:



第 6 図

$$
\left(\qquad\right) \equiv
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & & + & - & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & s & M_{+1}^{2} & m_{+2}^{2} & m_{+3}^{2} & M_{+4}^{2} \\
- & 1 & & 0 & M_{-1}^{2} & m_{-2}^{2} & m_{-3}^{2} & M_{-4}^{2} \\
1 & 1 & & & 0 & m_{12}^{2} & x & t \\
2 & 1 & \text{対} & \text{称} & & 0 & m_{23}^{2} & y \\
3 & 1 & & & & & 0 & m_{34}^{2} \\
4 & 1 & & & & & & 0
\end{array}
\qquad (4.5)
$$

とおくと，前節より

$$
g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.6)
$$

f_3 は $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ の $s_{13} \equiv x$ についての終結式であり，f'_3 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ の $s_{24} \equiv y$ についての

の終結式である。従つてそれらは一致する。またこの時T．2により（4.5）の $\left(\qquad\right) = 0$

である。

原論文ではこの三段梯子のLandau曲線について詳しく議論せず，次節でN段梯子の

Landau曲線についての一般論を詳しく行なつている。しかしこの紹介ではその一般論を三段梯子にあてはめて述べ，一般論はその結果だけを書くことにする。おそらくこれは原著者に対する犯罪的行為であろう。

まず $f_3(s, t) = 0$ の漸近線を求める。

$h(s, x) = Q_2(s)x^2 + (x$ の一次式$)$，

$g(s, t, x) = B_0(s)x^2 + B_1(s, t)x + B_2(s, t)$

と表わすと Q_2，B_0，B_1，B_2 は s について二次，B_1 は t について1次，B_2 は t について

て二次であり

$B_2(s, t) = Q_3(s)t^2 + (t$ の一次式$)$

と書くと Q_3 は s の二次式である。これより f_3 は t の四次式，s の八次式，全次数は12，

そして

$$f_3(s,t)=(Q_2(s)Q_3(s)^2)\,t^4+(t\text{の三次式}) \qquad (4.7)$$

なる形をしていることがわかる。$f_3=0$の漸近線はすべて垂直($s=\mathrm{const.}$)又は水平($t=\mathrm{const.}$)であり水平漸近線は四個，垂直なのは四個あつてこれは二重に縮退している。

垂直漸近線は$Q_2(s)\cdot Q_3(s)=0$の解であるから

$$s=(m_{+2}\pm m_{-2})^2 \quad , \quad (m_{+3}\pm m_{-3})^2 \quad .$$

水平漸近線はまず$h(s,x)=0$より

$$\lim_{s\to\infty} x(s)=(m_{12}\pm m_{23})^2 \quad ,$$

次に $g(s,t,x(s))=0$より

$$\lim_{s\to\infty} t(s)=\lim_{s\to\infty}(m_{34}\pm\sqrt{x(s)})^2=(m_{12}\pm m_{23}\pm m_{34})^2 \quad .$$

以上まとめて垂直及び水平漸近線は

$$\left.\begin{aligned} s&=(m_{+2}\pm m_{-2})^2 \quad , \quad (m_{+3}\pm m_{-3})^2 \\ t&=(m_{12}\pm m_{23}\pm m_{34})^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

但し符号のどちらを取るかは，選んでいる枝に依る。また一般にはこれらの漸近線はcusp状でないことも示せる。

次に$f_3=0$の垂直接線を求め，これによつてこの曲線のgenusを計算する。垂直接線は$f_3=0$より$t=t(s)$と解いて$dt(s)/ds=\infty$のsの値であるがf_3はhとgとからxを消去したものであるから

$$\frac{dt}{ds}=\left[\frac{\partial g}{\partial t}\;\frac{\partial h}{\partial x}\right]^{-1}\left[\frac{\partial g}{\partial x}\;\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{\partial g}{\partial s}\;\frac{\partial h}{\partial x}\right] \qquad (4.9)$$

が成り立ち，この分子はtとsが有限なら常に有限である。従つて垂直接線は

$$\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

の解に限られる。二つの場合に分け，まず

A) $\partial h/\partial x=0$

これは$h\equiv\binom{4}{4}=0$が$x\equiv s_{13}$について重根をもつことであるから

$$M_1\cdot M_2=0 \quad , \quad M_1\equiv\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix} \quad , \quad M_2\equiv\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix} \qquad (4.10)$$

と同値である。この場合(4.9)より$(\partial g/\partial x)(\partial h/\partial s)\neq 0$を要求しなければならない。$\partial h/\partial s\neq 0$は$h=0$がnode を持つていないということでありこれは前節で見た通り一般

には成り立つている。また $\partial g/\partial x=0$ は

$$M_3 \cdot P=0 \quad , \quad M_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad P \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4.11)$$

を意味し，M_3 は s のみの二次式で $M_{\pm 4}$ に依つているから $M_3=0$ の根は $M_{\pm 4}$ に依り一方（4.10）の解は $M_{\pm 4}$ に依らない。従つて一般には $\partial h/\partial x=0$ の時 $M_3 \neq 0$ である。同様の議論は $P=0$ についても成り立つ。

従つて一般には（4.10）の根はすべて $f_3=0$ の垂直接線である。（このA）の議論が一般論と本質的に異る唯一の個所である。）

B）$\partial g/\partial t=0$

これは

$$M_3 \cdot Q=0 , \qquad Q=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (4.12)$$

と同値である。A）と同様に，一般には $M_3=0$ は $f_3=0$ の垂直接線になつている。ところが $Q=0$ は $h=0$ の Kibble 曲線であるから前節終りの議論と同じく $Q=0$ と $h=0$ の交点では

$$\frac{\partial(Q, h)}{\partial(s, x)}=0 ,$$

また $Q=0$ は s，x について $g=0$ の Kibble 曲線であるから $Q=0$，$g=0$ なら

$$\frac{\partial(Q, g)}{\partial(s, x)}=0 ,$$

従つて

$$\frac{\partial(g, h)}{\partial(s, x)}=0$$

となりこれは（4.9）の右辺の分子が零ということである。故にB）の場合は $M_3=0$ のみが垂直接線となりうる。

まとめると，$f_3=0$ の垂直接線は

$$\left.\begin{aligned} & M_1 \cdot M_2 \cdot M_3=0 , \\ & M_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad M_2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad M_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

で与えられる。垂直接線は六本あることがわかつたがその多重度は？　今$M_3=0$の根の一つをs_0とすると$h(s_0, x)=0$より$x=x_1(s_0)$，$x_2(s_0)$と二根得られ，$g(s_0, t, x_i(s_0))=0$，$i=1$，2をtについて解くと二重根が二つ得られることになる。他の場合も同様で結局（4.1 3）の垂直接線は二度接する。

$f_3=0$よりtをsの関数として求めると，その$t(s)$、は（4.13）のsで分枝特異性(branching singurality)をもつ。ある特定の枝$t_1(s)$から出発して複素s平面でsが適当な分枝特異点のまわりを一周すると他の枝$t_2(s)$に移ることができるからf_3は既約である。そこで$f_3=0$のclass とgenusを数える。§2と同じ要領で$t=\infty$からの接線の数は重複度を入れて$6\times2+4\times2\times2=28$（$m=28$），次数は12（$n=12$）で，一般にはcuspはないから（$k=0$）genus

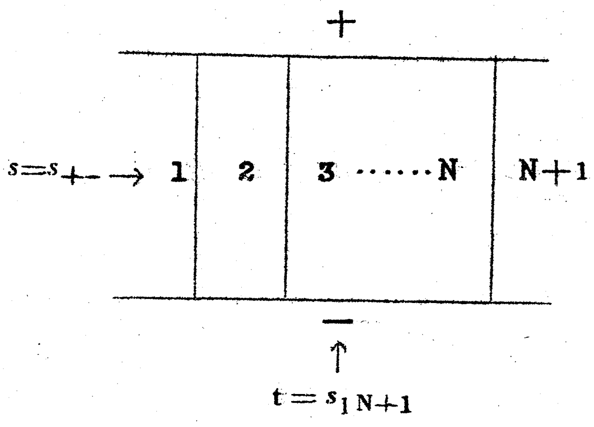
pは公式

$$p=\frac{m}{2}-n+\frac{k}{2}+1 \tag{4.14}$$

に代入して，$p=3$、従つて一般には$f_3=0$は初等関数や楕円関数でパラメーター付けできない。“一般には”という但し書きは$f_3=0$に対してはgenus 3が最大値であり，質量の間に特別な関係があると（弾性散乱とか同粒子交換とか………）曲線の特異性が増えて，その分だけgenusは減ることになる。

§5．N段梯子グラフ

第7図のグラフのLandau曲線を考える。N＝2は§3で，N＝3は§4で扱つた。（4.5）の拡張として

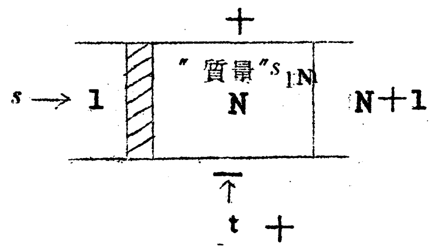


第 7 図

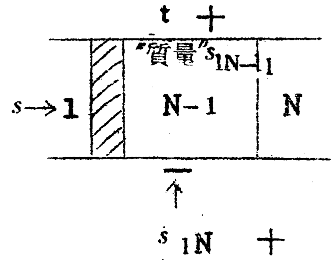
$$
\left(\qquad\right) = \begin{array}{r|cccccccccccc|}
 & & + & - & 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & & N & N+1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & s & M_{+1}^{2} & m_{+2}^{2} & \cdots & m^{2}_{+\ell-1} & m^{2}_{+\ell} & m^{2}_{+\ell+1} & \cdots & m^{2}_{+N} & M_{+N+1} \\
- & 1 & & 0 & M_{-1}^{2} & m^{2}_{-2} & \cdots & m^{2}_{-\ell-1} & m^{2}_{-\ell} & m^{2}_{-\ell-1} & \cdots & m^{2}_{-N} & M_{-N+1} \\
1 & 1 & & & 0 & m^{2}_{12} & \cdots & s_{1\ell-1} & s_{1\ell} & s_{1\ell+1} & \cdots & s_{1N} & t \\
2 & 1 & & & & 0 & \cdots & s_{2\ell-1} & s_{2\ell} & s_{2\ell+1} & \cdots & s_{2N} & s_{2N+1} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & -1 & & -1 & \\
\ell-1 & 1 & & & & & & 0 & m^{2}_{\ell-1\ell} & s_{\ell-1\ell} & \cdots & s_{\ell-1N} & s_{\ell-1N+1} \\
\ell & 1 & & & & & & & 0 & m^{2}_{\ell\ell+1} & \cdots & s_{\ell N} & s_{\ell N+1} \\
\ell+1 & 1 & & & \text{対} & \text{称} & & & & 0 & & s_{\ell+1N} & s_{\ell+1N+1} \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
N & 1 & & & & & & & & & & 0 & m^{2}_{NN+1} \\
N+1 & 1 & & & & & & & & & & & 0
\end{array}
\qquad (5.1)
$$

箱をつぶして元へ戻す操作として例えば

$$
\begin{pmatrix} 2 & \cdots\cdots & N-1 \\ 2 & \cdots\cdots & N-1 \end{pmatrix} \equiv h(1,\ N,\ N+1) = 0\ ;
$$

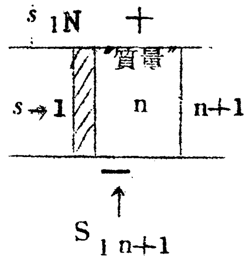


$$
\begin{pmatrix} 2 & \cdots N-2 & N+1 \\ 2 & \cdots N-2 & N+1 \end{pmatrix} \equiv h(1,\ N-1,\ N) = 0\ ;
$$



$\vdots$

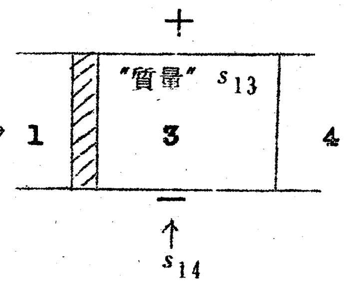
$$
\begin{pmatrix} 2 & \cdots\cdots n-1 & n+2 & \cdots\cdots & N+1 \\ 2 & \cdots\cdots n-1 & n+2 & \cdots\cdots & N+1 \end{pmatrix} \equiv h(1,\ n,\ n+1) = 0\ ;
$$



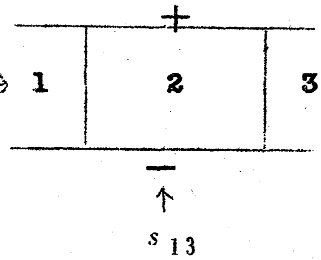
$\vdots$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & \cdots\cdots & N+1 \\ 2 & 5 & \cdots\cdots & N+1 \end{pmatrix} \equiv h(1,3,4)=0\ ; \quad s \rightarrow$$



$$\begin{pmatrix} 4 & \cdots\cdots & N+1 \\ 4 & \cdots\cdots & N+1 \end{pmatrix} \equiv h(1,2,3)=0\ ; \quad s \rightarrow$$



を考える。$s_{1p}=t_{p-1}$ とおくと，これらはN－1個の連立方程式

$$\left.\begin{array}{l} h(1,2,3)(s,t_2)=0\ , \\ h(1,3,4)(s,t_3,t_2)=0 \\ \quad\vdots \\ h(1,n,n+1)(s,t_n,\ t_{n-1})=0\ , \\ \quad\vdots \\ h(1,N-1,N)(s,t_{N-1},\ t_{N-2})=0\ , \\ h(1,N,N+1)(s,t,t_{N-1})=0 \end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

を与える。今 x の多項式 f と g との x についての終結式を $f[x]g$ と書くことにすると

$$f_N(s,t) \equiv h(1,N,N+1)[t_{N-1}](h(1,N-1,N)[t_{N-2}]\cdots\cdots$$

$$([t_n]h(1,n,n+1)[t_{n-1}](\cdots\cdot[t_3](h(1,3,4)[t_2]h(1,2,3))\cdots))\cdots) \qquad (5.3)$$

が求めるLandau曲線である。前節と同様他の操作でも，得られる方程式は同じである。また［ ］の操作は結合律を満たすから（ 5.3 ）は括弧をはずしても意味がある。

（ 4.7 ）の拡張としては

$$f_N(s,t)=(Q_2(s)\cdots\cdots Q_N(s))^{2^{N-2}}\cdot t^{2^{N-1}}+\cdots\cdots\cdots, \qquad (5.4)$$

但し

$$Q_p(s) \equiv \begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots p-1 & p+1 & \cdots & N+1 \\ 1 \cdots\cdots p-1 & p+1 & \cdots & N+1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s & m_{+p}^2 \\ 1 & s & 0 & m_{-p}^2 \\ 1 & m_{+p}^2 & m_{-p}^2 & 0 \end{vmatrix} . \quad (5.5)$$

これより

1） f_N は s について（N－1）2^N 次，t について 2^{N-1}次，全次数 $n = N 2^{N-1}$.

2） $f_N = 0$ は 2^{N-1}個の水平漸近線を持つ。また垂直漸近線は 2(N－1）個あり，各々 2^{N-2}重に縮退している。

（4.8）の拡張としてそれらの漸近線は

$$\left.\begin{aligned} & s = (m_{+p} \pm m_{-p})^2 \quad , \quad p = 2 , \cdots\cdots , N \\ & t = \left(\sum_{n-1}^{N} \pm m_{n,n+1} \right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

で与えられる。これらは一般には cusp ではない。

次に，$f_N = 0$ の垂直接線は（4.1 3）の拡張として

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & p-1 & p+2 & \cdots\cdots & N+1 \\ 1 & \cdots\cdots & p-1 & p+2 & \cdots\cdots & N+1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad p = 1 , \cdots\cdots , N$$

となる。2N個あり各々が 2^{N-2} 回接している。前節と同様 f_N は一般には既約である。この曲線の class mは

$$m = 2N \cdot 2^{N-2} + 2 \cdot 2(N-1) \cdot 2^{N-2} = (3N-2) \cdot 2^{N-1} \quad (5.7)$$

一般には cusp はないから，（4.1 4）より genus pがわかり

$$p = (N-2)\, 2^{N-2} + 1 \quad . \quad (5.8)$$

N	2	3	4	5	6	……
P	1	3	9	25	65	……

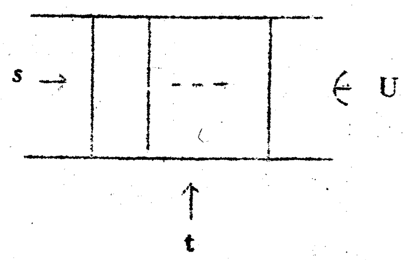
.

前節でも述べた如く，これは最大値を与えていると見なすべきである。

§6．クラスU

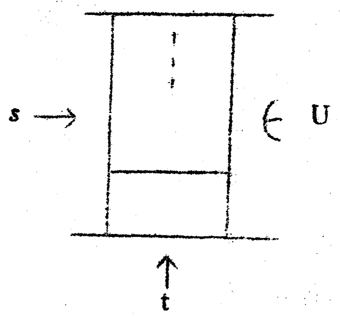
ここでは交叉していない（uncrossed）グラフのクラスUのLandau曲線について或る程度一般論を行なう。但しこみ入つた議論は省略致します。クラスUとそのLandau曲線は次の如く帰納的に定義される。

1）



$\therefore$

$f(s,t)=0$



$\therefore$

$f(t,s)=0$

2）$F_1 \in U$，$F_2 \in U$ならその“積”$F_1F_2 \in U$．　$f_1(s,t)=0$，$f_2(s,t)=0$をそれぞれF_1，F_2のLandau曲線とするとF_1F_2のLandan曲線$f=0$は，

$$f(s,t)=f_1(s,x)[x]f_0(s,t,x,y)[y]f_2(s,y) \qquad (6.1)$$

である。f_0は（1.5）．

クラスUに属するグラフの特徴は各頂点は三本の線から成りそれらの線は交叉していないことである。

今（6.1）のf_1，f_2は既約としその最高巾を

$$f_1(s,t)=s^{\alpha_1}\cdot t^{\beta_1}+\cdots\cdots,$$

$$f_2(s,t)=s^{\alpha_2}\cdot t^{\beta_2}+\cdots\cdots$$

とする。つまりf_iはsについてα_i次，tについてはβ_i次そして全次数が$\alpha_i+\beta_i$ということ。この時（6.1）のfは

$$\left.\begin{aligned}
&f(s,t)=s^{\alpha}\cdot t^{\beta}+\cdots\cdots,\\
&\alpha=2\alpha_1\beta_2+2\alpha_2\beta_1+2\beta_1\beta_2,\\
&\beta=2\beta_1\beta_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

fが既約ならそのclass mは

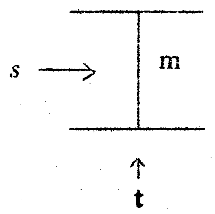
$$\left.\begin{aligned} & m-2\alpha=2\beta_1(m_2-2\alpha_2)+2\beta_2(m_1-2\alpha_1),\\ & m_1 \text{ は } f_1=0 \text{ の class},\\ & m_2 \text{ は } f_2=0 \text{ の class}. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

一般にはcusp がないから$f=0$のgenusは計算できる。ところがグラフがある対称性を持てばそのLandau 曲線は可約となる。

§7 クラスC

交叉したグラフのクラスCはLandau曲線を扱うには，$s+t+u=\sum_1^4(\text{外部質量})^2$で$u$－変数を導入して適当に使い分けるのであるが，ここでは省略致します。

尚ここで取り扱われなかつたグラフに



がある。このLandau曲線は$t=m^2$ なる直線で，Kibble曲線の接線になつていないからグラフのつなぎ合せに使えないのである。

以上

文　　献

1) N.Nakanishi , Prog. Theor. Phys. **22**(1959),128.

〃 , 〃 **23**(1960),284.

〃 , Supple. Prog. Theor. Phys. **18**(1961),1.

2) L.D.Landau, Nucl. Phys. **13**(1959), 181.

3) J.D. Bjorken, Stanford preprint, (1959).

4) この節に出てくる式の証明は

D.B.Melrose,Nuovo Cimento XLA(1965),182. の appendix に載つている。

5) R.Karplus, C. M. Sommerfield and E.H.Wichmann, II, Phys,Rev. 114 (1959), 376.

6) J.Tarski, Journ.Math.Phys. 1 (1960), 149.

7) T.W.B.Kibble, Phys.Rev. 117 (1960), 1159.