数理解析研究所講究録
第 14 巻 1966 年 22-44

Δ^{+}，Δ_{ret} 等の一般化のこころみ

京大・物理　南　　政次

§1　はじめに

量子論を特徴づける最も基本的な公準は物理量の間の交換関係であるが，これがいわゆる古典力学の正準形式を典型にして対応論的に携えられている限り，必ずしも相対論の要請には適つていないわけであつて，これを相対論的に共変な型式に書きかえることが，場の理論の初期の一つの課題であつた。１９２９年JordanとPauli は相互作用のない場について次の様な不変デルタ函数と呼ばれる量を持ち込むことによつて交換関係の一般化を果した。

$$\Delta(x)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^4q\exp[-iq\cdot x]\,\delta(q\cdot q-\mu^2)\in(q) \qquad (1.1)$$

ここで，$i=\sqrt{-1}$．　$x\equiv(x^0,\bar{x})\equiv(x^0,x^1,x^2,x^3)$，

$q\equiv(q^0,\bar{q})\equiv(q^0,q^1,q^2,q^3)$ は夫々位置，運動量を示す４元ベクトルで，特にx^0，q^0 は夫々時間，エネルギー成分である。又内積$q\cdot x$ などは$q\cdot x=q^0x^0-\bar{q}\cdot\bar{x}$ $=q^0x^0-q^1x^1-q^2x^2-q^3x^3$ などと定めるものとする。　$\delta(q\cdot q-\mu^2)$ はいわゆるDiracのデルタ函数，　$\in(q)$ は

$$\in(q)=\begin{cases}1 & \text{for } q^0>0\\ -1 & \text{for } q^0<0\end{cases}$$

なるsign函数である。

実際，今$\varphi(x)$を

$$(\Box+\mu^2)\varphi(x)=0$$

を満す，実スカラーな場の演算子とする。但し□はダランベール演算子，(物理的には$\varphi(x)$は相互作用をもたない電気的中性な自由場で，μは場の表わす粒子の質量になる。)ところで，量子論における交換関係に相当するもの(つまり同一時刻における)は($AB-BA\equiv[A,B]$と書く)

$$\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0},\varphi(y)\right]_{x^0=y^0}=-i\,\delta^3(\bar{x}-\bar{y})$$

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{x^0=y^0}=0$$

$$\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0},\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^0}\right]_{x^0=y^0}=0$$

である。$\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^0}$が，$\varphi(x)$の正準共役な演算子になつている。一方，$\varphi(x)$は$\Delta(x)$を使うと

$$\varphi(x)=-\int_{x^0=y^0}d^3\bar{y}\left\{\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y^0}\Delta(x-y)+\varphi(y)\frac{\partial\Delta(x-y)}{\partial x^0}\right\}$$

と書けることが証明出来る。但し積分は$x^0=y^0$ 内の全ての点yについて行われるものとする。(つまり$x^0=y^0$ における$\varphi(y)$，$\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y^0}$の値を知つて任意の点$x$における$\varphi(x)$を出すことになつている。)この表示を利用すれば直ちに

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=i\,\Delta(x-y) \qquad (1.2)$$

なるLorentz 不変な交換関係を得ることが出来るわけである。

特に$\Delta(x)$ は$x\cdot x<0$ (空間的という)で，消えるから，$\varphi(x)$と$\varphi(y)$はxとyが空間的な場合，可換となるわけである。物理的には因果がない(独立)ということである。

上の方法は相互作用を考慮すると破綻するが相互作用の入つた場合の共変な形式の一つとしてFeynman の理論があつて，これは簡単に言えば共変な自由場で展開するという考え方に立つといつてよい。その場合，Feynman の不変デルタ函数と呼ばれる$\Delta_F(x)$が基本的な役割を果す：

$$\Delta_F(x)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\bar{p}}{2\sqrt{\bar{p}^2+\mu^2}}\exp[-i(\sqrt{\bar{p}^2+\mu^2}\cdot|x^0|-\bar{p}\cdot\bar{x})] \tag{1.3}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\exp[-ipx]\left\{\frac{\mathcal{P}}{p\cdot p-\mu^2}-i\pi\delta(p\cdot p-\mu^2)\right\} \tag{1.3$'$}$$

($\mathcal{P}$: Cauchyの主値)

(1.3)で x^0 が $|x^0|$ と入つているのが重要で，これはFeynman の陽電子理論に根ざしたものである。

後に，Feynman のpropagator $\Delta_F(x)$ を使わずに，たとえば真空偏極の計算が，簡単にしかももつと直接になされた。(Källénなど) これは本質的に次の様な $\Delta^{(1)}(x)$ と遅延*(先行**)デルタ函数，$\Delta_{ret}(\Delta_{adv})$ を巧みに使うものである。

$$\Delta^{(1)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\ \exp[-ip\cdot x]\,\delta(p\cdot p-\mu^2) \tag{1.4}$$

$$\Delta_{\substack{ret\\adv}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \exp[-ip\cdot x]\left\{\frac{\mathcal{P}}{p\cdot p-\mu^2}\mp i\pi\delta(p\cdot p-\mu^2)\epsilon(p)\right\}, \tag{1.5}$$

"遅延(先行)" ということは $x\cdot x>0$, $x^0<0$ ($x^0>0$) で $\Delta_{ret}=0$, ($\Delta_{adv}=0$) ということから来ている。(因果的)。これは，いわゆる "分散公式" による理論と密接に関係がある。

Feynman–Schwinger の方法は相互作用場をいわゆる摂理論で解くということであつて，勿論収束性その他で問題がある。ところで，現在の場の理論がこれ以上に本質的に進んでいるかどうかは別として，この延長上にあつて，又後のいわゆる公理論的な場の理論への橋渡しとしての重要な発展(50年代)はKällén とLehmannによる積分表示による理論である。今，時空点 x と y に夫々異なる粒子があつてそれらは互いに場 ϕ によつて媒介される相互作用をしているものとする。その時，基本的な量として

$$W_2(x-y)=(\Psi_0\ ,\ \phi(x)\phi(y)\Psi_0) \tag{1.6}$$

を採ることが出来る。Ψ_0 は真空をあらわす状態ベクトルである。簡単にいえば(1.6)は，y で真空から ϕ −粒子が発生し，x で ϕ −粒子が消滅する伝播函数である。$\phi(x)$ は次の方

* retarded　　** advanced

程式（ハイゼンベルク方程式）をみたすものとする：

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x\mu} = i\,[\,\phi(x),\ P^{\mu}]$$

又は，

$$\phi(x) = \exp[\,iP\cdot x]\,\phi(0)\exp[-iP\cdot x] \qquad (1.7)$$

但し，P^0 は相互作用も含めたハミルトニアン。（1.6）の右辺を射影演算子によつて中間状態 ψ_q（但し ψ_1 の P^{μ} の固有状態で，完全系をなすとする）を入れ（1.7）を用いると，

$$W_2(x-y) = \int d^4q\,\exp[-iq(x-y)]\,|(\psi_0,\ \phi(0)\psi_q)|^2$$

となり，更に

$$\rho(q) = (2\pi)^3\,|(\psi_0,\ \phi(0)\psi_q)|^2$$

とおくと

$$W_2(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4q\,\rho(q)\,\exp[-iq\cdot(x-y)].$$

ψ_q は“物理的”である筈だから $q\cdot q>0$（時間的）に加えて $q^0>0$ であると考える。（以後，この条件を示す時，$q\in V^+$ とする。）すると　$\theta(q)=\frac{1}{2}(1+\epsilon(q))$ によつて

$$W_2(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4q\,\rho(q^2)\,\theta(q)\,\exp[-iq(x-y)]$$

と書くとよく，又

$$= i\int d\mu^2\,\rho(\mu^2)\,\Delta^+(x-y,\mu^2) \qquad (1.8)$$

と書ける。但し

$$\Delta^+(x;\mu^2) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4q\,\exp[-iq\cdot x]\,\delta(q\cdot q-\mu^2)\,\theta(q) \qquad (1.9)$$

もし，　$\rho(\mu^2)=\delta(\mu^2-\mu_0^2)$　なら自由場に還る。

１９５６年Wightman　は（1.6）を一般化した真空期待値

$$W_n(x_1,\cdots\cdots x_n) = (\psi_0,\ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\cdots\phi(x_n)\psi_0) \qquad (1.10)$$

が場の理論の最も基本的な量とした。一場の理論の要請をこれに押し込めることも出来るし，逆にWightman　函数を与えると場の理論は一義的にきまつてしまう，云々。従つて，W_n のいろいろな性質，たとえば解析性を調べること等が次の問題になるわけだが，その中で５８年KällénとWilmhelmsson　は（1.8）を一般化して

$$W_n(x_1,\cdots\cdots x_n) = (i)^n\int_0^{\infty}\!\!\cdots\!\int \Pi\,da_{\kappa\ell}\,G(a_{\kappa\ell})\,\Delta_n^+(\xi_\kappa,\mu_{\kappa\ell}^2)$$

と考え── 但し

$$\Delta_n^{+}(\xi_\kappa,\ \mu^2_{\kappa l})=\frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n}}\int\cdots\int d^4p_1\ \cdots\ d^4p_{n-1}\ \times$$

$$\times\exp\left[-i\sum^{n-1}p_\kappa x_\kappa\right]\prod_{\kappa\leq l}\delta(p_\kappa p_l-\mu^2_{\kappa l})\prod\theta(p_\kappa) \qquad (1.11)^{*)}$$

W_n の状報を Δ_n^+ から得ることを提唱した。（実際にKällén はのちに $n=4$ の場合についてこのやり方で $W_4(\xi)$ の解析性を部分的に調べた。一般的には未解決。$n=3$ の場合についてはdirect に解けている。）

扨て，$n=2$ の場合に戻つて，今迄にいろいろと得た不変デルタ函数の表示は積分路を実軸にとつて，被積分函数をいろいろ変えているわけだがその双対をとつて

$$\Omega_{(2)}=\frac{\exp[-iq\cdot x]}{q\cdot q-\mu^2} \qquad (1.12)$$

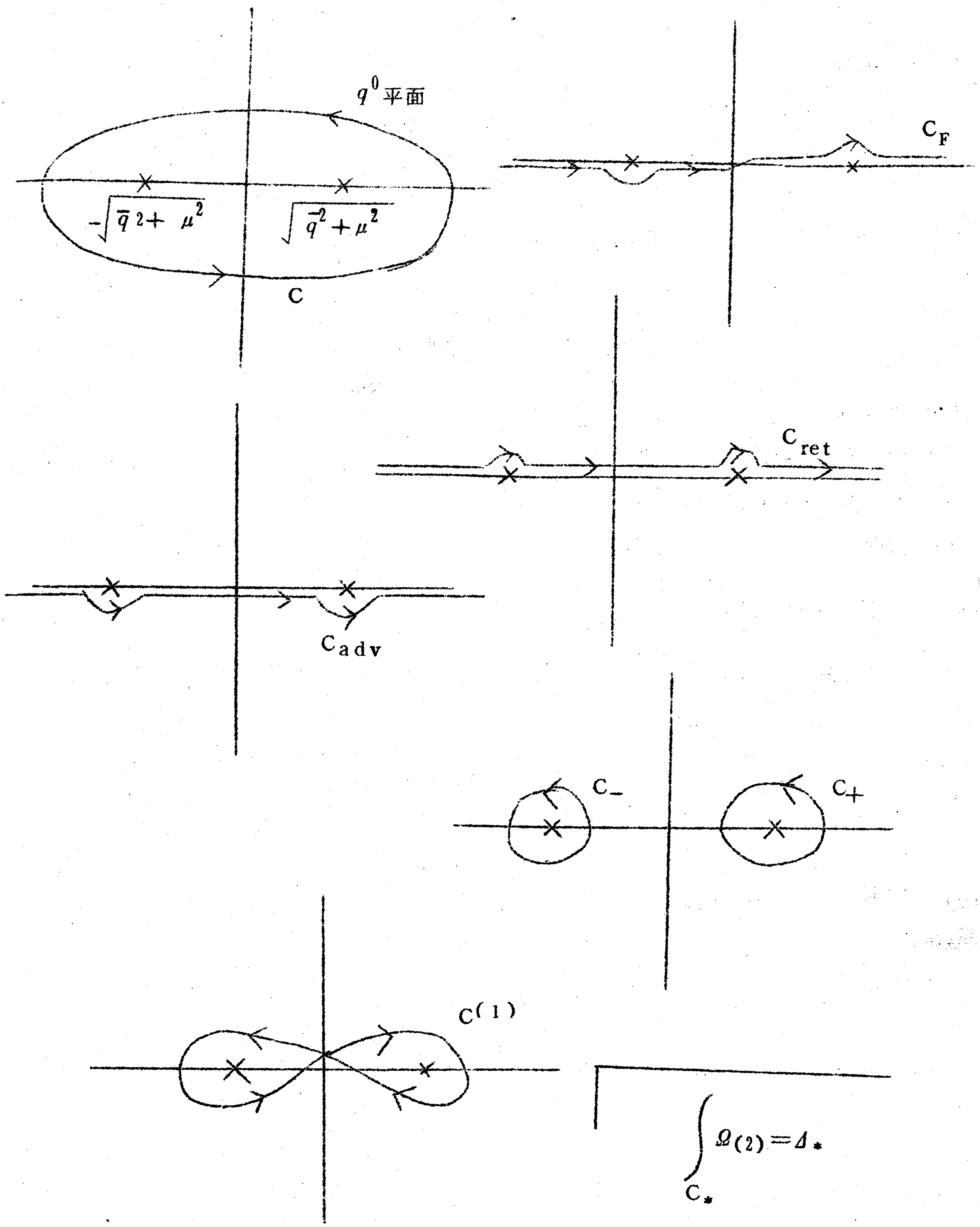
を適当な積分路（q^0－平面）で積分しても，全ての Δ 函数が出てくることが知られている。（下図参照）この表示によるとデルタ函数相互間の関係が積分路の関係に帰着するし，夫々の性質も積分路に還元出来ることになる。たとえば $\Delta_{ret}(x)$ が，$x\cdot x>0$，$x_0<0$ で消えることは，$x_0<0$ では（1.1 2）が q^0－ 平面の上半面で analytic だから C_{ret} は上半面で半円を画くと考えられ，極を中に含まないから 0 にホモログになることからわかる。同様に $x^0>0$（$x^0<0$）で Δ_F が $\Delta^+(\Delta^-)$ になることも容易に判る。

我々の目的は，この考えを多点デルタ（特異）函数－たとえば（1.1 1）－にも適用しようということである。

N．B． ときに，Δ，$\Delta^{\pm}$，$\Delta^{(1)}$ などを homogeneous なデルタ函数と云い，Δ_{ret}，Δ_{adv}，Δ_F 等を inhomogeneousなデルタ函数と云うことがある。それはダランベール演算子口を作用させた場合，消えるか $\delta^4(x)$ を残すかに依る。q^0 平面での積分路をみると，homogeneous なものはコンパクトに局在しているが，inhomogeneousなものは積分路が無限遠点に延びている。

---

*) 以下でこの種の Δ 函数をKällén函数と呼ぶ。


q^0平面
$-\sqrt{\bar{q}^2+\mu^2}$
$\sqrt{\bar{q}^2+\mu^2}$
C
C_F
C_{ret}
C_{adv}
C_-
C_+
$C^{(1)}$
$\int_{C_*} \Omega_{(2)} = \Delta_*$

§2 基本微分型式

1° 位置ベクトル $x_i=(x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ $i=1, 2, \cdots\cdots\cdots n$ で張る $4n$ 次元空間を X^n とする。x_i の内積は

$$x_i x_i = x_i^0 x_i^0 - x_i^1 x_i^1 - x_i^2 x_i^2 - x_i^3 x_i^3$$

と定める。x_i^0 は時間成分である。Z^{n-1} は等値関係

$$x_i - x_{i+1} = x'_i - x'_{i+1} \quad , \; i=1, \cdots\cdots\cdots n-1$$

による X の商空間とする。（とくに $\xi_i \equiv x_i - x_{i+1}$ とおく）運動量ベクトル $q_i=(q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ $i=1, 2, \cdots\cdots\cdots n$ で張る空間を Q^n とする。q_i の内積は

$$q_i \cdot q_i = q_i^0 q_i^0 - q_i^1 q_i^1 - q_i^2 q_i^2 - q_i^3 q_i^3$$

と定める。q_i^0 はエネルギー成分である。$\widetilde{Q}^{n-1}$ は

$$\{ q \; ; \; q_1 + q_2 + \cdots\cdots\cdots + q_n = 0 \}$$

なる Q^n の部分空間とする。X^n と Q^n の内積は

$$\sum^n q_i x_i = \sum^n (q_i^0 x_i^0 - q_i^1 x_i^1 - q_i^2 x_i^2 - q_i^3 x_i^3)$$

だが，これは $\widetilde{Q}^{n-1} \times Z^{n-1}$ では

$$= \sum^{n-1} (q_1 + q_2 + \cdots\cdots\cdots + q_i) \xi_i$$

I を 1 から n 迄の整数の全ての部分集合とする。その時 q_I を次の様に定義する。

$$M(\mathcal{G}) : q_I = \sum_{i \in I} q_i \qquad (2.1)$$

但し，$\Sigma_{i \in I}$ は I に含まれている全ての整数 i についての和，更に y_I を次の式によつて導入する。

$$\sum_{I \ni i} y_I = x_i - x_n \qquad \text{for given } i \qquad (2.2)$$

但し，$\Sigma_{I \ni i}$ は与えられた i を含む全ての I についての和を意味する。

すると

$$\Sigma_i q_i \cdot x_i = \Sigma_I q_I y_I \quad .$$

2° (1.1 1) に鑑みて，また x_i のいろいろな置換を考慮に入れて (1.1 2) の一般化されたものは次の様であるとする：

$$\Omega_{(n)}=\omega_{(n)}\exp[-i\Sigma_{\mathrm{I}}q_{\mathrm{I}}y_{\mathrm{I}}] \tag{2.3}$$

$$\omega_{(n)}=\left.\frac{\Pi_{\mathrm{I}}d^4q_{\mathrm{I}}}{\Pi_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}q_{\mathrm{I}}-a_{\mathrm{I}})\Pi d^4(q_{\mathrm{I}}-\sum_{i\in\mathrm{I}}q_i)}\right|_{M(\vartheta)} \tag{2.4}$$

注意：suffixをIとしたのは，x_iの置換を考慮に入れたからであつて，Källénのsuffixの採り方とは異なる。

ところで，$\{q_{\mathrm{I}}\}$の次元は$2^{n-1}-1$，一方q_iによる内積の数は$n(n-1)/2$，従つて

$$S_{\mathrm{I}}:q_{\mathrm{I}}\cdot q_{\mathrm{I}}-a_{\mathrm{I}}=0$$

として$\cap_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{I}}\cap M(\vartheta)$は大抵の場合消える。とくに，$n=2$，3の場合は$2^{n-1}-1=n(n-1)/2$となるが，$n=4$では一般に

$$S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_{12}\cap S_{23}\cap S_{31}\cap S_{123}=0$$

である。

最後に，$S_{\mathrm{I}}\cap M(\vartheta)$の集合を考える場合，$\widetilde{Q}^{n-1}$空間の座標を適当にとることによつて，たとえば

$$q_i^{\mu}=0 \qquad i\leq\mu$$

とすることが出来ることに注意しておく。時にこの部分空間を$\mathfrak{M}_i$と称える。

§3 Källén函数を導くこと

次の段はいろいろな積分路を導入することだが，この節では特にKallen 函数に相当した特異函数を導出するべく$\widetilde{Q}^{n-1}$上のホモロジーを，特に$n=3$，4の場合について考察する。

1° $n=3$の場合

我々の与えた基本微分型式は，この場合

$$\Omega_{(3)}=\omega_{(3)}\exp[-iq_1y_1-iq_2y_2-iq_{12}y_{12}]$$

但し

$$\omega_{(3)}=\left.\frac{d^4q_1\wedge d^4q_2\wedge d^4q_{12}}{\Pi_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}\cdot q_{\mathrm{I}}-a_{\mathrm{I}})d^4(q_{12}-q_1-q_2)}\right|_{M(12)}$$

yはxによつて

$$y_1+y_{12}=x_1-x_{\xi}(=\xi_1+\xi_2)$$

$$y_2+y_{12}=x_2-x_3(=\xi_2)$$

である。(y_1，y_2，y_{12}の内一つはredundant)

補題：S_1, S_2, S_{12} が $M(12)$：$q_{12}-q_1-q_2=0$
上で一般の位置にあるための必要十分条件は

$$\lambda_3(a_1, a_2, a_{12}) \equiv a_1^2+a_2^2+a_{12}^2-2a_1a_2-2a_1a_{12}-2a_2a_{12} \fallingdotseq\!\!\!\!/ \; 0 \quad (3.1)$$

$$a_1 \neq 0 \quad , \quad a_2 \neq 0 \quad , \quad a_{12} \neq 0$$

で与えられる。（証明略）

ところで $\mathfrak{M}$ 上で，$S_{1}\cap S_{2}\cap S_{12}$ は0次元になり

$$(q_1^0)^2 = a_1 \quad , \quad q_2^0 = \frac{a_{12}-a_1-a_2}{2q_1^0} \quad , \quad (q_2^1)^2 = \frac{\lambda_3(a_{12}a_1a_2)}{4a_1} \quad (3.2)$$

と解ける。$\lambda_3(a_{12}a_1a_2)<0$ の場合，実のintersectionはなく，q_i はユークリッドベクトルになる。

定義：a_1, a_2, a_{12} の内2つ a_κ, a_ι が実かつ正，そして残りの a_m が実，最後に $\lambda(a_\kappa a_\iota a_m)>0$ である時 $\{a\}$ は (κ, ι) − physical 領域にあると称える。

$\{a\}$ を (κ, ι) − physical領域に閉じ込めておいて，次の実manifold を定義する。

$$s_j^{\pm} : q_j q_j - a_j = 0 \quad , \quad q^0{}_j \gtrless 0 \, , \qquad j = \kappa, \iota$$

$$(3.3)$$

$$s_j : q_j \cdot q_j - a_j = 0 \quad , \qquad j = m$$

すると，例えば $\{a\}$ が $(1, 12)$ − physical領域にある時

$$s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2$$

が存在する。そこで，これによってgenerate されるホモロジー類を $h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ と記すことにする。他の場合も同様である。

次に δ をLerayの双対境界作用素とする。$\delta^3 h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ は $\tilde{Q}^2 - s_1 \cup s_{12} \cup s_2$ 上のホモロジー類である。

実際，あとで示す様に $\Omega_{(3)}$ を $\delta^3 h^{++}(s_1 \cap s_{12} \cap s_2)$ 上で積分すればKällén の $\Delta_3^+(x_1, x_2, x_3; a)$ に本質的に等しいものが得られる。

定義：$K_3(x_1x_2x_3 | a_1a_{12}; a_2)$

$$\equiv \langle \delta^3 h^{++} s_1 \cap s_{12} \cap s_2), \Omega_{(3)} \rangle \quad (3.4)$$

とする。ここで x_1, x_2, x_3 の並びは次の手順で順序づけられているとする：$\{a\}$ が

$(1,12)$ − physical領域にあることから q_2 は q_1, q_{12} であらわされていると考え
$(q_2 = q_{12} - q_1)$ ，$\Omega_{(3)}$ のexponential 因子を

$$\Omega_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[-iq_1(x_1 - x_2) - iq_{12}(x_2 - x_3)]$$

と並べた時の $\{x\}$ の並び $x_1 - x_2, x_2 - x_3$ に依る。この定義によつて，以下の様に x_1, x_2, x_3 を置換した6個の K_3 が得られる。

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_2 ; a_2) = <\delta^3 h^{++}(S_1 \cap S_{12} \cap S_2), \Omega_{(3)}>$$
$$K_3(x_1 x_3 x_2 | a_1 a_2 ; a_{12}) = <\delta^3 h^{+-}(S_1 \cap S_2 \cap S_{12}), \Omega_{(3)}>$$
$$K_3(x_3 x_1 x_2 | a_{12} a_2 ; a_1) = <\delta^3 h^{--}(S_{12} \cap S_2 \cap S_1), \Omega_{(3)}>$$
$$K_3(x_2 x_1 x_3 | a_2 a_{12} ; a_1) = <\delta^3 h^{++}(S_2 \quad S_{12} \quad S_1), \Omega_{(3)}>$$
$$K_3(x_2 x_3 x_1 | a_2 a_1 ; a_{12}) = <\delta^3 h^{+-}(S_2 \cap S_1 \cap S_{12}), \Omega_{(3)}>$$
$$K_3(x_3 x_2 x_1 | a_{12} a_1 ; a_2) = <\delta^3 h^{--}(S_{12} \cap S_1 \cap S_2), \Omega_{(3)}> \qquad (3.5)$$

勿論夫々の $\{a\}$ の領域は限られている：$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12} ; a_2)$ の場合，もし
$a_2 < (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{12}})^2$ でなければ

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12} ; a_2) = 0$$

証明 $\mathcal{M}$ 上で解くと，$2q_1^0 q_{12}^0 = a_{12} + a_1 - a_2 > 0$
かつ $\lambda_3(a_1 a_{12} a_2) > 0 \qquad \therefore \ a_{12} + a_1 - a_2 > 2\sqrt{a_1 a_{12}}$.
（明らかに $K_3(x_3 x_2 x_1 | a_{12} a_1 ; a_2)$ は同じ台をもつ）
それでは $K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12} ; a_2)$ 等が $\Delta_3^+(x_1 x_2 x_3 ; \mu^2)$ 等とみなされること：

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a_1 a_{12} ; a_2)$$

$$= \int_{\delta^3(s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2)} \frac{\exp[-iq_1(x_1 - x_2) - iq_{12}(x_2 - x_3)] \, d^4 q_1 \wedge d^4 q_{12}}{(q_1 \cdot q_1 - a_1)(q_{12} \cdot q_{12} - a_{12})((q_{12} - q_1)(q_{12} - q_1) - a_2)}$$

ここでLerayの留数公式を使うと

$$= (2\pi i)^3 \int_{s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_2} \frac{\exp[-iq_1(x_1 - x_2) - iq_{12}(x_2 - x_3)]}{(q_1^0 + \sqrt{\bar{q}_1^2 + a_1})(q_{12}^0 + \sqrt{\bar{q}_{12}^2 + a_{12}})} \times$$

$$\times \frac{d^4 q_1 \wedge d^4 q_{12}}{d(q_1^0 - \sqrt{\bar{q}_1^2 + a_1}) \wedge d(q_{12}^0 - \sqrt{\bar{q}_{12}^2 + a_{12}}) \wedge d((q_{12} - q_1)(q_{12} - q_1) - a_2)}$$

これをδ－函数で表示すると

$$=\int d^4q_1 d^4q_{12}\ \exp[-iq_1(x_1-x_2)-iq_{12}(x_2-x_3)]\times$$

$$\theta(q_1)\delta(q_1q_1-a_1)\theta(q_{12})\delta(q_{12}\cdot q_{12}-a_{12})\delta((q_{12}-q_1)(q_{12}-q_1)-a_2)$$

となる。但し，次の公式を使つた

$$\frac{1}{q^0+\sqrt{\bar{q}^2+a}}\ \delta(q^0-\sqrt{\bar{q}^2+a})$$

$$=\delta((q^0)^2-(\bar{q})^2-a)\theta(q^0)$$

Källén の表示と identifyさせるには

$$q_1\to p_1\quad,\quad q_{12}\to p_2$$

$$a_1\to\mu_{11}^2\quad,\quad a_{12}\to\mu_{22}^2$$

$$a_2\to\mu_{22}^2+\mu_{11}^2-2\mu_{12}^2$$

と置き換えればよい。

6個のK_3はWightman　3点函数$W_3(x_1x_2x_3)$で場の演算子を置換した6個のWightman　函数に対応している。そして(κ, ι)－physicalということはWightman函数を中間状態で分けていつたとき中間状態が〝物理的〟ということに対応している：

$$\int(\psi_0,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\psi_0)$$

$$=dq_1dq_{12}(\psi_0,\phi(x_1)\psi_{q_1})(\psi_{q_1},\phi(x_2)\psi_{q_{12}})\times$$

$$\times(\psi_{q_{12}},\phi(x_3)\psi_0)$$

(1.7)式を使つて

$$=\int dq_1dq_{12}\ \exp[-iq_1(x_1-x_2)-iq_{12}(x_2-x_3)]\times$$

$$\times(\psi_0,\phi(0)\psi_{q_1})(\psi_{q_1},\phi(0)\psi_{q_{12}})(\psi_{q_{12}}\phi(0)\psi_0)\qquad(3.6)$$

ψ_{q_1}, $\psi_{q_{12}}$　は物理的な中間状態だから$q_1^0>0$，$q_1\cdot q_1>0$ ($d.h.\ q_1\in V^+$)，　$q_{12}^0>0$，　$q_{12}\cdot q_{12}>0$，($q_{12}\in V^+$)（時間的でエネルギーは正），これが$K_3(x_1x_2x_3|a)$ に抽出されているわけである。

2°　$n=4$の場合

この場合は，S_I の数（7個）と不変量$q_i\cdot q_j$ の数（6個）の異なる最初の場合である。

$$\Omega_{(4)} = \frac{\exp[-iq_1y_1 - iq_2y_2 - iq_3y_3 - iq_{12}y_{12} - iq_{23}y_{23} - iq_{31}y_{31} - iq_{123}y_{123}]}{\Pi_I(q_I\cdot q_I - a_I)} \times$$

$$\times \frac{d^4q_1 \wedge d^4q_2 \wedge d^4q_3 \wedge d^4q_{12} \wedge d^4q_{23} \wedge d^4q_{31} \wedge d^4q_{123}}{d^4(q_{12}-q_1-q_2)\wedge d^4(q_{23}-q_2-q_3)\wedge d^4(q_{31}-q_3-q_1)\wedge d^4(q_{123}-q_1-q_2-q_3)} \tag{3.7}$$

$s_j^{\pm}$，s_j 等の定義，（$\kappa\ell m$）－physical 領域の定義も$n=3$の場合に準じて与えるものとする。その際，不変量の数は6であるから7つのS_I の内6個のintersectionのホモロジー類から出発するが，だから$n=3$の場合の$\lambda_3>0$に代つて，どの6個のS_I のintersection も空でないという条件を与えておかねばならない。

この様にして，例えば

$$s_1^+ \cap s_{12}^+ \cap s_{123}^+ \cap s_2 \cap s_{23} \cap s_3$$

によつてgenerate されるホモロジー類を

$$h^{+++}(S_1 \cap S_{12} \cap S_{123} \cap S_2 \cap S_{23} \cap S_3)$$

などとする。

実際Källén の$\Delta_4^+(x_1x_2x_3x_4;\mu^2)$ を与える類は

$$\delta^6 h^{+++}(S_1 \cap S_{12} \cap S_{123} \cap S_2 \cap S_{23} \cap S_3)$$

である。但し，Δ_4^+ と違つて$\Omega_{(4)}$に

$$\frac{1}{q_{13}\cdot q_{13} - a_{13}}$$

という因子があるために

$$\frac{1}{a_{123}+a_1+a_2+a_3-a_{12}-a_{23}-a_{31}}$$

という極型の因子だけが余計にかかることになる。$\{a_I\}$空間における特異manifoldは勿論これだけでなく

$$\lambda_4(a_1a_2a_3a_{12}a_{23}a_{123})$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 2a_1 & a_{12}-a_1-a_2 & a_{13}-a_1-a_3 \\ a_{12}-a_1-a_2 & 2a_2 & a_{23}-a_2-a_3 \\ a_{13}-a_1-a_3 & a_{23}-a_2-a_3 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.8)$$

と λ_4 のargument の内 $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{23}, a_{123}$ を

$$a_{13}+a_{32}+a_{21}-a_1-a_2-a_3-a_{123}=0 \qquad (3.9)$$

の式によつて置き換えて得る6個の $\lambda_4=0$ 等がある。（その他，部分的な $\lambda_3=0$ ，$a_I=0$ など）これらは $\{S_I\}$ が，一般の位置にないという条件になつている。

最後に，24 個の K_4 の内 ― それらが三つの集団に分かれるので，― 代表的に三つ与えておく。

$$K_4(x_1x_2x_3x_4|a_1a_{12}a_{123};a) = \langle \delta^6 h^{+++}(S_1\cap S_{12}\cap S_{123}\cap S_2\cap S_{23}\cap S_3),\ \Omega_{(4)}\rangle$$
$$K_4(x_2x_3x_1x_4|a_2a_{23}a_{123};a) = \langle \delta^6 h^{+++}(S_2\cap S_{23}\cap S_{123}\cap S_1\cap S_{13}\cap S_3),\ \Omega_{(4)}\rangle$$
$$K_4(x_1x_3x_2x_4|a_1a_{13}a_{123};a) = \langle \delta^6 h^{+++}(S_1\cap S_{13}\cap S_{123}\cap S_2\cap S_{21}\cap S_3),\ \Omega_{(4)}\rangle$$

§4 遅延函数その他

この節では特に $n=3$ の場合についてLeray の双対輪体の類 $\delta^3 h$ とは違つた類に属するホモロジー類を導入して，遅延性（先行性）をもつたdistributionを構成する。これは $n=2$ の場合のinhomogeneousな場合に相当する。（K_3 はhomogeneous）

尚，この節では $n=3$ の場合のみ考慮するので $q_3 \equiv -q_{12}$ として，q_1, q_2, q_3 を対称に扱う。$a_1, a_2, a_3(=a_{12})$ は実で正とする。

定義：$\gamma_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ を夫々その台を $\mathcal{T}_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ においている（かつその虚部は固定されている）ところの 2×4 次元の閉輪体とする。

但し $\mathcal{T}_{\pm\pm}(q_1, q_2)$ は $I_m q_1 \in V^{\pm}$，$I_m q_2 \in V^{\pm}$ をbase とする管領域（tube domain）のことである。

すると例えば次の結果を得る。

$$R_3(x_3;\ x_1x_2|a_1a_2;a_3) \equiv \langle \gamma_{--}(q_1, q_2),\ \Omega_{(3)}\rangle \qquad (4.1)$$

は，もし

$$x_3-x_2 \in V^+ \quad かつ \quad x_3-x_1 \in V^+ \qquad (4.2)$$

でなければ消える。（注意：R_3 は勿論distribution の意味で定義されている。恐ら

くK_3の場合より強いtesting 函数でsmear outしておかねばならない。)

証明；$\Omega_{(3)}$を

$$\Omega_{(3)}=\omega(3)\exp[i(x_3-x_1)q_1+i(x_3-x_2)q_2)]$$

と並べると判る様に，もし$x_3-x_1\in V^+$でないなら$e\in V^+$なる4−ベクトルeが存在して$(x_3-x_1)\cdot e<0$ と出来るから$\gamma_{--}(q_1;q_2)$は$\gamma_{--}(q_1;q_2)-(i\lambda e,0)$にホモローグである。$\lambda$は$0\leq\lambda\leq\infty$。 $\lambda\to+\infty$とすると$<\gamma_{--}(q_1;q_2),\Omega_{(3)}>$は消える。同様に$x_3-x_2\notin V^+$の場合にも証明出来る。(終)

$R_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)$ は(4.2)を台として持つことからこれをx_3に関する遅延(特異)函数と呼ぶことが出来る。(x_3がx_1及びx_2の(時間的に)前にあるとき，$R_3(x_3;x_1x_2)$ は消えない。) 同様に

$$A_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)\equiv<\gamma_{++}(q_1,q_2),\Omega_{(3)}> \qquad (4.3)$$

は，もし

$$x_2-x_3\in V^+ \quad かつ \quad x_1-x_3\in V^+$$

でなければ消え，(4.3)を先行(特異)函数と呼ぶことが出来る。

同様に，x_2 or x_1 に関する遅延函数も拵えることが出来ることは明らかであろう。

扨て，次に$R_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)$ と我々が前の節で求めたK_3(and the like)との関係を，ホモロジー類をいろいろな条件のもとで考察することによつて調べることにする。(以下A_3については話が全く対称であるので触れない)

そこで，$\{x\}$を(4.2)の内とくに

$$x_3-x_2\in V^+ \quad , \quad x_2-x_1\in V^+ \qquad (4.4)$$

に固定してみる。すると，先ず$R_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)$ は

$$<\gamma_{--}(q_1,q_2)-\gamma_{++}(q_1,q_3) \quad , \quad \Omega_{(3)}> \qquad (4.5)$$

に等しいことが判る。何故なら $<\gamma_{++}(q_1,q_3),\Omega_{(3)}>$ は$x_3-x_2\in V^+$ かつ $x_1-x_2\in V^+$ でなければ消えるが，これは(4.4)に反するからである。所で，$\gamma_{--}(q_1,q_2)-\gamma_{++}(q_1,q_3)$ は明らかにS_1を囲む(Leray)の双対境界に等しい。($q_1+q_2+q_3=0$ に注意する。上の積分路は$\mathfrak{C}_{-+}(q_2,q_3)$ に入つているのである。)

この様にして(4.4)が成立てば

$$<\gamma_{--}(q_1,q_2),\Omega_{(3)}>\sim<\delta h_{(-+)}(S_1-S_2\cup S_3),\Omega_{(3)}> \qquad (4.6)$$

ということになる。但し，$\delta h_{(-+)}$ は次の定義による。

定義；1° $h^{\pm}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$ は $s_1^{\pm}\cap\mathcal{T}_{\pm\mp}(q_2,q_3)$ の中の積分路によつ generate された（2×4－1）－次元ホモロジー類， 2° $\delta h^{\pm}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$ は，$h^{\pm}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$ の S_1 に関するLerayの双対ホモロジー類。 そして
3° $\delta h_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$ は次の様に定義する。

$$\delta h_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)$$
$$=\delta h^{+}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)-\delta h^{-}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3) \qquad (4.7)$$

次に（4.4）に加えて更に

$$\lambda_3(a_1a_2a_3)<0 \qquad (4.8)$$

という条件をつけ加える。（これは前述した様に，S_1，S_2，S_3 が実のintersectionを持たない ——q がユークリツドベクトルになるという条件。）

定義；1° $\lambda_3(a_1a_2a_3)<0$ のもとで $h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1\cap S_2-S_3)$ は $s_1^{\varepsilon}\cap s_2^{\varepsilon'}$ in $\mathrm{Re}\,\widetilde{Q}^2$（$\varepsilon$，$\varepsilon'$ は＋or－）によつてgenerate される（2×4－2）－次元ホモロジー類， 2° $\delta^2h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1\cap S_2-S_3)$ は S_1 と S_2 に関する $h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1\ S_2-S_3)$ 双対ホモロジー類。

すると，（4.8）のもとで，次のLemmaを証明することが出来る：

$$\delta h^{\varepsilon}_{(\pm\mp)}(S_1-S_2\cup S_3)-\delta h^{\varepsilon}_{(\mp\pm)}(S_1-S_2\cup S_3)$$
$$\sim\mp\delta^2h^{\varepsilon+}(S_1\cap S_2-S_3)\pm\delta^2h^{\varepsilon-}(S_1\cap S_2-S_3)$$
$$\pm\delta^2h^{\varepsilon+}(S_1\cap S_3-S_2)\mp\delta^2h^{\varepsilon-}(S_1\cap S_3-S_2) \qquad (4.9)$$

（証明略）

これを使うと $R_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)$ は（4.4）及び（4.8）の条件のもとでは次の様に展開される。

$$<r_{--}(q_1,q_2),\Omega_{(3)}>$$
$$\sim<\delta^2h^{++}(S_1\cap S_2-S_3),\Omega_{(3)}>-<\delta^2h^{+-}(S_1\cap S_2-S_3),\Omega_{(3)}>$$
$$-<\delta^2h^{++}(S_1\cap S_3-S_2),\Omega_{(3)}>+<\delta^2h^{+-}(S_1\cap S_3-S_2),\Omega_{(3)}>$$
$$-<\delta^2h^{-+}(S_1\cap S_2-S_3),\Omega_{(3)}>+<\delta^2h^{--}(S_1\cap S_2-S_3),\Omega_{(3)}>$$
$$+<\delta^2h^{-+}(S_1\cap S_3-S_2),\Omega_{(3)}>-\delta^2h^{--}(S_1\cap S_3\ S_2),\Omega_{(3)}>$$

(4.10)

証明；　$<r_{++}(q_1,q_2)-r_{--}(q_1,q_3),\Omega_{(3)}>$ を考えると，これは（4.4）で明らかに消える。そして　$r_{++}(q_1,q_2)-r_{--}(q_1,q_3)$ は $-\delta h_{(+-)}(S_1-S_2\cup S_3)$ に等しい。そこで，（4.5）とこれとを加えると，$<r_{--}(q_1,q_2),\Omega_{(3)}>$ は

$$<\delta h_{(-+)}(S_1-S_2\cup S_3)-\delta h_{(+-)}(S_1-S_2\cup S_3),\ \Omega_{(3)}>$$

に等しいと言つてよい。所が，後者は定義と先のLemma によつて（4.10）である。（終）

例として，$\delta^2 h^{++}(S_1\ \ S_2-S_3)$ を採つて，これにLerayの留数公式をあてはめてみよう；

$$\begin{aligned}
&<\delta^2 h^{++}(S_1\cap S_2-S_3),\ \Omega_{(3)}> \\
&=(2\pi i)^2\int \exp[i(x_3-x_1)q_1+i(x_3-x_2)q_2]\times \\
&\times\delta(q_1q_1-a_1)\delta(q_2q_2-a_2)\theta(q_1)\theta(q_2)\times \\
&\times\frac{1}{(q_1+q_2)(q_1+q_2)-a_3}\,dq_1dq_2
\end{aligned}\tag{4.11}$$

所で，

$$\frac{1}{q\cdot q-a}=\int_{-\infty}^{\infty}da'\,\frac{\delta(q\cdot q-a')}{a'-a}$$

と考えて，（4.11）を変型すると，結局

$$\begin{aligned}
&<\delta^2 h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1\cap S_2-S_3),\ \ \Omega_{(3)}> \\
&=\frac{1}{2\pi i}\int da'_3\,\frac{<\delta^3 h^{\varepsilon\varepsilon'}(S_1\cap S_2\cap S_3),\ \Omega'_{(3)}>}{a'_3-a_3}
\end{aligned}\tag{4.12}$$

を得る。被積分函数の分子は前節で考えたものと同質である。特に，$<\delta^3 h^{(\pm\mp)}(S_1\cap S_2\cap S_3)$ $\Omega_{(3)}>$ は全く前節で採りあげたものに等しく，その台は

$$a_3<(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\tag{4.13}$$

であつた。同様に，$<\delta^3 h^{(\pm\pm)}(S_1\cap S_2\cap S_3),\ \Omega_{(3)}>$の台は

$$a_3>(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2\tag{4.14}$$

であることが証明出来る。

従つて，$<\delta^2 h^{(\pm\mp)}(S_1\cap S_2-S_3),\ \Omega_{(3)}>$ と

$<\delta^2 h^{(\pm\pm)}(S_1\cap S_2-S_3),\ \Omega_{(3)}>$　は夫々（4.13）と（4.14）に

branch cut をもつていることになる。具体的に表示すると

$$<\delta^2 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 - S_3),\ \Omega_{(3)}>$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2} da'_3 \frac{<\delta^3 h^{(\pm\mp)}(S_1 \cap S_2 \cap S_3),\ \Omega_{(3)}>}{a'_3 - a_3} \qquad (4.15)$$

$$<\delta^2 h^{(\pm\pm)}(S_1 \cap S_2 - S_3),\ \Omega_{(3)}>$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}^{\infty} da'_3 \frac{<\delta^3 h^{(\pm\pm)}(S_1\ S_2\ S_3),\ \Omega'_{(3)}}{a'_3 - a_3} \qquad (4.16)$$

これらを使つて，$R_3(x_3;x_2x_1|a_1a_2;a_3)$ を(4.10)によつてK_3(and the like) で表現することが出来るわけである。(4.15)(4.16)は場の理論でいう dispersion relation (分散公式)と非常に近いものであるが，ここでは触れないことにする。(実際，$\lambda_3(a_1a_2a_3)<0$ をはずした場合上の様な関係式がどの様になるかということの類似した問題もいわゆる公理論的場の理論で非常に重要になつている。)

最後に$n=2$の場合のΔ_F に相当する time ordered な3点のデルタ不変函数について簡単に解れる；

$n=2$の場合(4－ベクトル一つ；q_1) a_1を$a_1-i\ \epsilon$(ϵは無限小正数)としてReq_1空間を4－cycleとすればよかつた。これにならつて singularity

$$(\mathrm{Re}\,q_j)\cdot(\mathrm{Re}\,q_j)-a_j=0 \qquad (4.17)$$

の近傍では，$\tau_{FFF}(\widetilde{Q}^2)$ はRe$q_j\cdot I_m q_j>0, \|I_m q_j\|<\delta$ (δ：固定小数)に台をもちsingularity(4.17)を離れればRe$\widetilde{Q}^2$ にホモローグになつている様に定義する。そのとき

$$F_3(x_1x_2x_3|a_1a_2a_3)$$
$$\equiv <\tau_{FFF}(\widetilde{Q}^2),\ \Omega_{(3)}(\widetilde{\Omega}^2-\cup S) \qquad (4.18)$$

を所用のものとする。

次を証明することが出来る。

$$x_1-x_2\in V^+,\quad x_2-x_3\in V^+$$

で，かつ $\lambda_3(a_1a_2a_3)<0$ のとき

$$r_{\mathrm{FFF}}(\widetilde{Q}^2) \sim \delta^2 h^{-+}(S_3\cap S_1-S_2) - \delta^2 h^{++}(S_1\cap S_2-S_3) - \delta^2 h^{--}(S_2\cap S_3-S_1) \tag{4.19}$$

（証明略）

尚，物理でよく知られた様に表示すると，次の様になろう。

$$\langle r_{\mathrm{FFF}}(\widetilde{Q}^2),\ \Omega_{(3)}\rangle$$

$$=\int_{\mathrm{Re}\widetilde{Q}^2}\exp[-i\Sigma x_j q_j]\frac{\delta(q_1+q_2+q_3)}{\Pi_j(q_jq_j-a_j+i\epsilon)}dq_1dq_2dq_3$$

また，Δ_{F} を $F_2(x_1x_2|a_1)$ と書き直すと

$$F_3(x_1x_2x_3|a_1a_2a_3) =(2\pi)^{-N}\int F_2(x_1x|a_1)F_2(x_2x|a_2)F_2(x_3x|a_3)dx$$

実は，我々の formalism の範囲内では場の演算子の積という概念は入つていない。従つて "time ordered" と称えても限られた意味においてである。（4.19）から明らかな様に $x_1-x_2\in V^+$，$x_2-x_3\in V^+$ と $\{x\}$ を揃えても r_{FFF} は $-\delta^3 h^{+-}(S_1\cap S_3\cap S_2)$ となるのでなく $\delta^2 h^{-+}(S_3\cap S_1-S_2)$ の型であり，更に他に二項存在している。

§5 遅延（先行）函数を別の方法で記述すること

位置空間と運動量空間との対称性（双対性）に鑑みて $\widetilde{Q}$ 空間と Z 空間を置き換えることを試みる。具体的には q 変数と ξ 変数を例えば（5.1）の様に取換えるわけだが，これによつて§3で考えた内積（Leray の双対輪体と $\Omega_{(3)}$ の）を新しく遅延（先行）函数の Fourier 変換とみなすことが出来るのである。

1° $n=3$ の場合

先ず

$$\begin{aligned} q_1 &\to \xi_1=x_1-x_2 \\ q_2 &\to \xi_2=x_2-x_3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

と変数を取換える。又 $\xi_{12}=\xi_1+\xi_2$ とする。混乱をさける為に，$\widetilde{Q}$ 空間での a，S，s，………に相当して夫々 α，Σ，σ，……などとする。

$$\Sigma_{\mathrm{I}}:\ \xi_{\mathrm{I}}\xi_{\mathrm{I}}-\alpha_{\mathrm{I}}=0 \tag{5.2}$$

$\Omega_{(3)} \in h^*(Z^2 - \Sigma_1 \cup \Sigma_{12} \cup \Sigma_2)$ は次の型をなす。

$$\Omega_{(3)} = \omega_{(3)} \exp[i\xi_1 p_1 + i\xi_{12} p_{12} + i\xi_2 p_2]$$

$$\omega_{(3)} = \frac{d^4\xi_1 \wedge d^4\xi_{12} \wedge d^4\xi_2}{\Pi_I[\xi_1 \cdot \xi_I - \alpha_I]\, d^4(\xi_1 + \xi_2 - \xi_{12})} \qquad (5.3)$$

p_I は y_I の counterpart である。

そこで，例えば

$$<\delta^3 h^{++}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2)\ ,\ \Omega_{(3)}(Z^2 - \cup\Sigma)>$$

を $x_1 - x_2 = \xi_1 \in V^+$ ， $x_1 - x_3 = \xi_{12} \in V^+$ (5.4)

に support をもったdistribution のFourier 変換と考えるのである。(5.4) によつてこれを x_1 に関して遅延性をもつているdistributionのFourier 変換とし $\tilde{r}_3(1)$ と記す。もし $\delta^3 h^{--}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2)$ を採用すれば

$$x_2 - x_1 = -\xi_1 \in V^+ \qquad x_3 - x_1 = -\xi_{12} \in V^+$$

に support をもつたもの (x_1 に関して先行性のFourier 変換が得られ，これを $\tilde{a}_3(1)$ とする：

$$\tilde{r}_3(1) = <\delta^3 h^{++}(\Sigma_1 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_2)\ ,\ \Omega_{(3)}>$$
$$\tilde{r}_3(2) = <\delta^3 h^{+-}(\Sigma_2 \cap \Sigma_1 \cap \Sigma_{12})\ ,\ \Omega_{(3)}>$$
$$\tilde{r}_3(3) = <\delta^3 h^{--}(\Sigma_{12} \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_1)\ ,\ \Omega_{(3)}>$$
$$\tilde{a}_3(1) = <\delta^3 h^{--}(\Sigma_{12} \cap \Sigma_1 \cap \Sigma_2)\ ,\ \Omega_{(3)}>$$
$$\tilde{a}_3(2) = <\delta^3 h^{+-}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_{12})\ ,\ \Omega_{(3)}>$$
$$\tilde{a}_3(3) = <\delta^3 h^{++}(\Sigma_2 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_1)\ ,\ \Omega_{(3)}>$$

これら6個は $K_3(x_\kappa x_\iota x_m | a)$ のdual になつているといえる。

この第二の考えも矢張り遅延函数その他の独立性等の代数的な性質を整理する一方法だが，$n=4$ の場合そのnon-trivial な例がある。

2° $n=4$ の場合

$n=3$ の場合は K_3 の6個に対して，6個の $\tilde{r}_3$, $\tilde{a}_3$ が存在した。しかし，24個の K_4 に対して，普通の意味での $\tilde{r}_4$ $\tilde{a}_4$ は8個しか作れない((5.6)以下参照)

先ず，(5.1)と同じ様に

$$q_i \to \xi_i = x_i - x_{i+1} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\xi_I = \sum_{i \in I} \xi_i$$

但し，ξ_{123} の代りに $\xi_4 = -\xi_{123}$ を時には用いる。 $\sum_{i=1}^{4}\xi_i = 0$ 又，$\xi_{23} = -\xi_{14}$ などに注意する。

$$\Omega_4(Z^3 - \Sigma_1 \cup \cdots\cdots \cup \Sigma_{123}) \quad と$$

$$\delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{k\ell} \cap \Sigma_{k\ell m} \cap \check{\Sigma}) \tag{5.6}$$

の内積を $\tilde{r}_4(\kappa)$ とする。但し $(\kappa\iota m)$ は (123)，(234)，(341)，(412) のいずれか，$\check{\Sigma}$ は7個の Σ_I から $\Sigma_k, \Sigma_{k\ell}, \Sigma_{k\ell m}$ 及び Σ_{13} をのぞいた残りの3個の Σ_I の intersection である。すると $\tilde{r}_4(\kappa)$ は

$$\xi_k = x_k - x_\ell \in V^+ \qquad \xi_{k\ell} = x_k - x_m \in V^+$$

かつ $\quad \xi_{k\ell m} = x_k - x_m \in V^+ \qquad (5.7)$

でなければ消える遅延函数の Fourier 変換とみてよい。但し添字 n は $(\kappa\iota mn)$ が (1234) のある置換になる様な1～4迄の整数

同様に (5，6) の代りに

$$\delta^6 h^{---}(\Sigma_k \cap \Sigma_{k\iota} \cap \Sigma_{km} \cap \check{\Sigma})$$

によるものを $\tilde{a}_4(k)$ とする。すると $\tilde{a}_4(k)$ は

$$x_\iota - x_\kappa \in V^+ \qquad x_m - x_\kappa \in V^+$$

かつ $\quad x_n - x_\kappa \quad V^+$

でなければ消える先行函数の Fourier 変換とみられる。

先にも注意した様に $\tilde{r}_4(k)$，$\tilde{a}_4(k)$ ，$k = 1, 2, 3, 4$ は8個しか存在していないので，24個の K_4 の dual にはなつていない。そこで，次の様に別種の遅延（先行）函数を構成する。

$$\Omega_{(4)}(Z^3 - \cup\Sigma) \quad と夫々$$

$$\delta^6 h^{+++}(\Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_l \cap \Sigma) + \delta^6 h^{+++}(\Sigma_{kl} \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_{lm} \cap \check{\Sigma}) \tag{5.8}$$

$$\delta^6 h^{++-}(\Sigma_k \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_l \cap \check{\Sigma}) + \delta^6 h^{+++}(\Sigma_k \cap \Sigma_{klm} \cap \Sigma_m \cap \check{\Sigma}) \tag{5.9}$$

$$\delta^6 h^{++-}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_{lm} \cap \check{\Sigma}) + \delta^6 h^{++-}(\Sigma_k \cap \Sigma_{kl} \cap \Sigma_m \cap \check{\Sigma}) \tag{5.10}$$

の内積を夫々

$$\tilde{r}_4(kl) \quad , \quad \tilde{r}_4(km) \quad , \quad \tilde{r}_4(km)$$

とする。すると，$\tilde{r}_4(ks)$ ，$s = l, m, n$ は

$$x_k - x_t \in V^+ \quad \text{and} \quad x_k - x_u \in V^+ \tag{5.11}$$

かつ $\quad x_s - x_t \in V^+ \quad \text{or} \quad x_s - x_u \in V^+$

を台にもつdistribution のFourier 変換とみられる。但し($kstu$)は(1234)のある置換である。

同様に(5.8)(5.9)(5.10) で$\delta^6 h^{(++\pm)} \to \delta^6 h^{(--\mp)}$と肩の符号をかえて得るものを，夫々，

$$\widetilde{a}_4(kl) \qquad \widetilde{a}_4(km) \qquad \widetilde{a}_4(kn)$$

としよう。すると，これをFourier 変換とするZ spaceでのdistribution の台は(5.11)でV^+をV^-に置き換えたものになる。そこでこの台の性質によつて$\widetilde{r}_4(ks)$ (or $\widetilde{a}_4(k,s)$)をx_kがx_tとx_uのどちらよりも進んで(or 遅れて)おり，同時にx_sがx_tかx_uのどちらかより進んで(or 遅れて)いる遅延(先行)函数のFourier 変換と称えることにする。((5.11)等の台を持つたこの種のdistribution は Wightman プログラムの中で，O. Steinmann, H. Araki and N. Burgoyneなどによつて最初構成された。)

扨て，$\widetilde{r}_4(ks)$ $\widetilde{a}_4(ks)$の数だけで24個，従つて前に定義した$\widetilde{r}_4(k)$, $\widetilde{a}_4(k)$とで32個となる。しかし，今定義した$\widetilde{r}_4(ks)$, $\widetilde{a}_4(ks)$ は夫々独立なわけでなく，次の関係にある。

$$\widetilde{r}_4(ks)+\widetilde{r}_4(sk)=\widetilde{a}_4(tu)+\widetilde{a}_4(ut) \qquad (5.12)$$

この関係式はWightman プログラムのなかではSteinmannの等式と呼ばれるものだが，証明も我々のホモロジカルな考え方で行なえば，自動的に可能である。

§6 おわりに

以上が大体のΔ^+, Δ_{ret}等の一般化に関するstraight forward な御膳立である。あと，いろいろな方面にわたつて分析することがあろう。

例えば，最初の目的であつた様な，局所性(locality)のホモロジカルな解釈などもその一つである。今$n=2$の場合をとり，更に，4元ベクトルq_1を1元のq_1^0 (時間的)と簡単化して考えることにする。するとξ_1が空間的な場合$q_1 \cdot \xi_1=0$よつて$\Omega_{(2)}=\omega_{(2)}$. 従つて singularity は$(q_1^0)^2-a_1=0$のみ。$a_1$をphysicalとすると，$q_1^0$平面の実軸上に二つの極があつて一方の双対境界が$K_2(x_1x_2|a_1)$を与えるとすると，他方のそれは$K_2(x_2x_1|a_1)$を与える。ところが一方は他方にホモログになるから，$\xi_1=x_1-x_2 \notin V$のとき

$$K_2(x_1x_2|a_1)=K_2(x_2x_1|a_1)$$

となることになる。これが，ξ_1 が空間的なとき，$\Delta(\xi_1)=0$ (cf.(1,2)以下)であることの解釈であり，$n\geq 3$の場合でも，大体似た風な考察が可能と思われる。しかしながら$n=2$の場合においても，上の如く簡単化を行なわないと話は簡単ではないようである。それは，q_1の計量がユークリッド計量でないことに依る。

Z空間での解析性とホモロジーの関係も次の重要な問題となろう。

最後にもう一つ面白そうな問題に触れておく。$\{a_j\}$がphysical 領域にあるというとき$\sqrt{a_j}$が物理的な質量と考えて正の実数に制限しているわけだが，例えば$K_3(x_1x_2x_3|a_1a_3,a_2)$を，複素数$a_1, a_3, a_2$ の函数と見做したら，どうかという話である。$\{a_j\}$ をその空間で，はじめの点から動かして，再び元の点に戻したときK_nに どれだけ変化があつたかという問題なども含まれる。これを一般的に観るのは困難なので，$q_j^\mu=0$ for $\mu\geq j$.という制限をおいて少々概観する。($n=3$の場合)

$\mathfrak{A}_{(3)}(\{a\}$ のなす空間で$n=3$の場合) でのsingularity manifolds は前述したように

$$\mathfrak{S}_j:\ a_j=0 \qquad j=1,2,3$$
$$\mathfrak{S}_{123}:\ \lambda_3(a_1a_2a_3)=0$$

であるが，これらを避けた$\mathfrak{A}_{(3)}$上の点$\{a_0\}$から，たとえばa_1, a_3-a_2 を固定して$\lambda_3(a_1a_2a_3)$平面で$\mathfrak{S}_{123}:\lambda_3(a_1a_2a_3)=0$ のまわりを正の方向に$\{a\}$が動いて再び$\{a_0\}$に戻ったとしよう。そのとき

$$\delta^3h^{\epsilon\epsilon'}(S_1\cap S_l\cap S_m)\to-\delta^3h^{\epsilon\epsilon'}(S_1\cap S_l\cap S_m)$$

と変化する。($\epsilon\epsilon'$は$++$，$+-$，$-+$，$--$のいずれ。)何故なら$q_j^\mu=0$ for $\mu\geq j$のもとでは$h^{+-}(S_1\cap S_3\cap S_2)$は二点から成つているが，$\{a\}$を$\mathfrak{S}_{123}$のまわりを一回転させると二点が夫々入れ換り，符号が逆になる。((3.2)参照)(証明終)これによつて

$$K_3(x_1x_lx_m|a)\to-K_3(x_1x_lx_m|a)$$

などとなる。従つてまた$\mathfrak{S}_{123}$ はsquare root 型のsingularity であることも判る。(二度$\mathfrak{S}_{123}$ のまわりをまわせばよい。) これらの結論は先きの制限をはずしても成立つのではないかと思われる。

同様に，a_2とa_3を固定して，a_1 平面で $\mathfrak{S}_1:a_1=0$のまわりを$\{a\}$を回転させると

$$\delta^3h^{(+-)}(S_1\cap S_3\cap S_2)\to-\delta^3h^{-+}(S_1\cap S_3\cap S_2)$$

などとなることが証明出来る。従つて

$$K_3(x_1 x_2 x_3 | a) \longrightarrow K_3(x_3 x_2 x_1 | a)$$

などと変化する。

この様なことが，もつと一般的に明らかになれば，解析性との関連が掴める糸口が出てくるかもしれない。実際，$K_3(x_1 x_2 x_3 | a)$ は $\mathscr{C}_{++}(x_1 - x_2, x_2 - x_3)$で正則なある函数の境界値とみられ$K_3(x_3 x_2 x_1 | a)$ は $\mathscr{C}_{--}(x_1 - x_2, x_2 - x_3)$で正則なある函数の境界値とみられるが，$\mathscr{C}_{++}$と$\mathscr{C}_{--}$ が$\{a\}$によつて何かの意味で繋がつていると云えそうという様なこともあるからである。

附記： 本稿の原論文はProgress of Theoretical Physics vol.35 No.4 に掲載されますので，詳しい点，たとえば個々の証明，$K_4(x_k x_l x_m x_n | a)$の具体的な表示等は，そちらを参照していたゞきたく思います。またReferences もこちらでは一切省きましたが，英文の方には附けてあります。

最後に，末尾ながら，御指導をいたゞいた荒木不二洋教授に感謝いたします。