数理解析研究所講究録
第16巻1966年77-89



# 分布定数系の制御問題

早稲田大学理工学部　示 村 悦二郎

## 1. はしがき

制御の対象となる物理系は，こまかくみればすべてその配置が空間的に分布している．しかし多くの系では，その分布がいくつかの点に集中していて，空間的配置は，それらの集中した部分相互間の関係においてしか意味をもたない場合があることを経験している．このような系は集中定数系と呼ばれ，多くは常微分方程式系で特性が定式化される．

現在までの制御理論は，主として常微分方程式系であらわされる集中定数系を対象として発展してきている．これはひとつには，統一的な理論体系を組立るにも，また実際の計算技術の面からも比較的取組み易かつたことと，実際には分布定数系である対象でも，これを近似的に集中定数系でおきかえて扱う程度で一応の目的を達していたことに起因するものであろう．

しかし多くの分野で，制御技術に対し，ますます高精度が要求されるようになり，これが必然的に対象のモデルの精密化を要求することになつている．高精度ということは，単に結果にあらわれた数量的な面のみをさすのではなく，高性能な制御系を構成するには，可制御性のような定性的な性質も見すごすことができない．モデルを精密化するひとつの方向は，分布定数系を偏微分方程式によつて定式化することである．

偏微分方程式によつて定式化される分布定数系に対する制御理論の展開に対しては，このように制御技術に対する切実な要求がその口火になつていることは事実であろうが，一方，制御理論の構造の中からも，これはむしろ当然の成行であつたと思われる．それは常微分方程式を偏微分方程式の特殊な形と考えれば，分布定数系に対する理論は，集中定数系に対する理論を包含

することになり，より広いものを求める理論の体系化の方向と一致するからである．また，従来の制御理論において多くの問題を残していたものに，むだ時間を含む系がある．むだ時間を含む系は，差分微分方程式で定式化され，これを出発点としていろいろな研究がおこなわれている．むだ時間要素に対しては後にのべるように，偏微分方程式であらわされるモデルを考えることができ，むだ時間を含む系は，集中定数系と結合した分布定数系と考えることもできる．

以下では，いくつかの代表的な分布定数系の例をあげ，分布定数系の制御の問題点を考察し，最后にむだ時間要素の偏微分方程式によるモデルについてのべる．

## 2. 分布定数制御系の基本的な構成

分布定数系では，その対象が存在する空間領域 $\Omega$ をまず考えなくてはならない．$\Omega$ は有限次元空間，実際には 1，2 あるいは 3 次元ユークリッド空間内の連結部分集合と考えられる．後の考え方を明らかにするために，$\Omega$ を開集合とし，その境界を $\partial\Omega$，$\Omega$ の閉包を $\bar{\Omega}$ とする．系の空間座標を $S = (S_1, S_2, \ldots, S_M)$ とする．系の領域の境界 $\partial\Omega$ は，有限個の連続

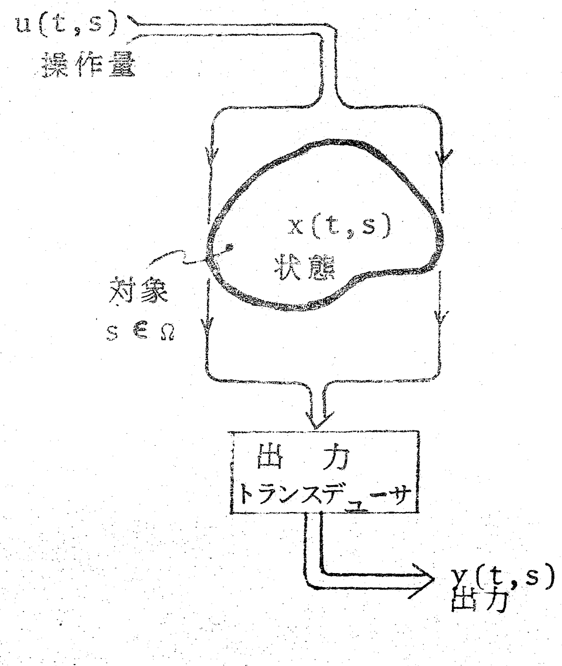



Fig. 1

な曲面から構成されている.

系の空間領域に関して次のふたつの概念は重要である.

S1. Fixed-Domain System. 領域の境界 $\partial\Omega$ が選ばれた空間座標系に関して不動である系を指し，非常に多くの実例がある．このような系でも，系の境界 $\partial\Omega$ を通して物質の流れのある場合もあるから注意を要する.

S2. Variable-Domain System 境界 $\partial\Omega$ が時間的に変化する系である．この変化の仕方は，1° 時間的に定まつた変化をする場合. 2° 他の従属変数（操作量 and/or 状態変数）によつて変化する場合，のふたつの場合が考えられる．このような系は実際には，例えば同じ物質の液相と固相とが接している場合に，両相の境界面が系の中での熱の移動によつて左右されるように，異つた相を含んでいる系とか， mechano-chemical 系のように系自身が変形可能な場合，あるいは，シリンダー内のピストンと，その下の流体のように，集中定数系と結合した形であらわれることが多い.

任意の時刻における系の状態は， $\Omega$ 上で定義された関数 $x(t,s)$ によつて規定される. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ としよう. Variable-Domain System では，この他に，境界 $\partial\Omega$ の状態（位置，速度など）を規定する変数を加えなくてはならない.

さて，次に分布定数系の操作量（入力）について考えよう．操作量は多くの系では，境界 $\partial\Omega$ から加えられる．このような操作を

C1. Boundary Control という．すなわち $u(t,s)$, $s \in \partial\Omega$.

Boundary Control は，実際に実現することが容易なため多くの場合，このような操作をおこなう．これに対し，操作が系の領域全体に分布しているものを

C2. Distributed Control という．すなわち $u(t,s)$, $s \in \Omega$.

Distributed Control は実際に実現するのが困難なため，その例は必ずしも多くはない．

これら2種類の操作が同時に存在する場合も考えられる．操作量 u もベクトルで $u = (u_1, u_2, \ldots, u_K)$ とする．

最后に系の出力について考えよう．系の出力は，系の制御の目的，用いるトランスデューサ（検出器）の種類などによつて異なり，次の2種類の出力が考えられる．

O1. Spatially-Dependent Output

$$y(t,s) = \beta(x(t,s),\ u(t,s)) \ , \quad s \in \overline{\Omega} \tag{1}$$

の形になるものをいう．

O2. Spatially-Independent Output

多くの出力トランスデューサは，何らかの形で，例えば

$$y(t) = \int_{\Omega'} W(s)x(t,s)d\Omega \ , \quad \Omega' \subseteq \Omega \tag{2}$$

のような空間的平均値をうるものである．

出力トランスデューサの機能は，状態空間から出力空間への写像という形で表現できる．これらの2種類のトランスデューサは，この観点からすれば，前者が無限次元の関数空間への写像であるのに対して，后者は，有限次元の空間への写像である点に大きな違いがある．

さて，このような分布定数系の特性は，多くの場合偏微分方程式系

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = f_i(x_1(t,s), \ldots; \frac{\partial x_1}{\partial s_1}, \ldots; u_{\Omega(1)}(t,s), \ldots) \quad , i = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

であらわされる．さらに境界条件は，

$$g_i(x_1(t,s'),\ldots;\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1'},\ldots;\ u_{\partial\Omega(1)}(t,s'),\ldots) = 0 \qquad (4)$$
$$,s' \in \partial\Omega,\ i = 1,2,\ldots,N'$$

の形に与えられる．(3)，(4) 式から分るように distributed control は (3) の形で，boundary control は (4) の形で表現される．(3)，(4) 式と，(1) あるいは (2) 式とで，分布定数系の様子は完全に記述される．ただし variable-domain system では，これにさらに領域の境界の状態を示す式をつけ加えなくてはならない．時によつては，(3) のような微分方程式と境界条件 (4) を考えるよりも，適当な核によつて表現された積分方程式を出発点とする方が便利なこともある．

さらに，実際の系では，分布定数系が単独に存在する場合より，むしろ他の集中定数系と結合して問題になることの方が多い．集中定数系の方程式を

$$\frac{dx'(t)}{dt} = f'(x',u'(t),y(t)) \qquad (5)$$

$$y'(t) = h(x'(t),u'(t),y(t)) \qquad (6)$$

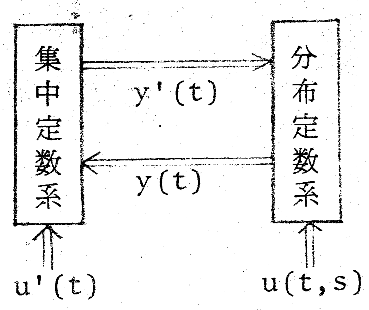



Fig. 2

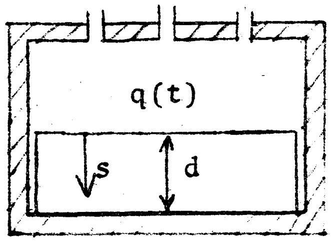
とすると，この場合には，集中定数系の出力 $y'(t)$ が (3) または，(4) 式の右辺に加えられ，(1) ～ (6) 式までで全体の系を記述することになり，系全体の状態は $\{x'(t),x(t,s)\}$ で規定される．

3. 分布定数系の例

以下に，いくつかの代表的な分布定数系について，系の方程式，操作量，出力などを簡単にしらべる．

（1）均一加熱炉　(S1, C1, O1)

水平断面内では一様に加熱されるとすれば，被加熱物体の温度の状態は次式であらわされる．




$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s^2}$$

境界条件：$\left.\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{1}{\kappa}q(t)$

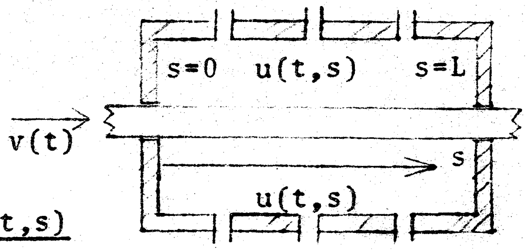
$$\left.\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right|_{s=d} = 0$$

操作量　：$q(t)$ ：炉への供給熱量

出力　　：$y_1(t) = x(t,0)$, $y_2(t) = x(t,d)$

（2）連続加熱炉　(S1, C1/C2, O1)

被加熱物体が薄く，垂直断面内では，温度分布が一様であるとすれば，温度分布は次式に従う．



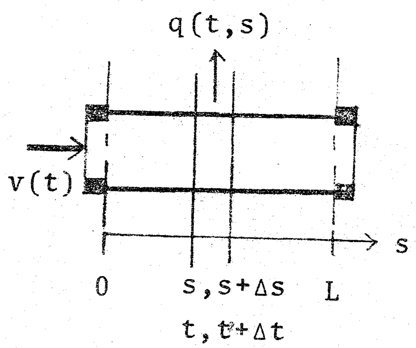

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s^2} + v(t)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + \sigma(x(t,s) - u(t,s))$$

境界条件：$x(t,0) = x_0(t)$,

操作量 ： $\begin{cases} u(t,s) & ：\text{炉内温度} \\ v(t) & ：\text{材料移動速度} \end{cases}$

出力 ： $y(t) = x(t,L)$

( 3 ) Transportation-Exchanger (S1, C1, O1/O2)




流体その他の物質が移動しながら外部とエネルギ ，イオンなどの交換をおこなう機構は，生体に多くみられるが，工業的にも熱交換器，イオン交換器など，その例が多い．媒質によつてはこばれて外部と交換される"もの"を $x(t,s)$ とすれば $q(t,s)$ を外部への流量として，次式に従う．

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = -v(t)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} - q(t,s)$$

境界条件： $x(t,0) = x_0(t)$

操作量 ： $v(t)$ ： 媒質移動速度

出力 ： $y(t) = x(t,L)$

この系は，外部へ"もの"を伝達することが目的の場合には，次のようになる。

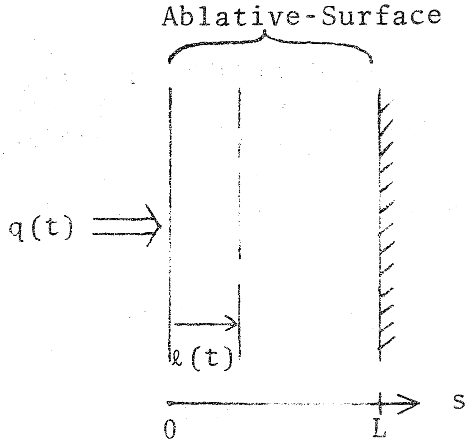
$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t} = -v(t)\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial s} - q(t,s) \quad ：\text{内部}$$

$$\frac{\partial x_2(t,s)}{\partial t} = q(t,s) \quad ：\text{外部}$$

出力 ： $y(t) = \int_0^L W(s)x_2(t,s)ds$

（４） Ablative-Surface

(S2, Cl, 01)




宇宙船が大気圏に再突入する際，摩擦熱で船体が損傷することを避けるために，船体表面に Ablative-Surface を設け，この物質を溶解させることによつて熱を奪い，船体を保護する． $t = t_0$ で再突入を開始し， $t = t_1$ で表面 $s = 0$ が融点に達したとする． $x(t,s)$ を Ablative Surface 内部の温度とする．

(i) $t_0 \le t \le t_1$ , $0 \le s \le L$

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial s^2}$$

$$\left.\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{1}{\kappa} q(v(t)), \qquad \left.\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\right|_{s=L} = 0$$

(ii) $t_1 \le t$.　　表面は融点に達し，溶解した表面は直ちに吹きとばされる．表面の瞬時の位置を $\ell(t)$ とする．

$$\frac{\partial x'(t,s)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 x'(t,s)}{\partial s^2} \quad , \quad \ell(t) \le s \le L$$

$$x'(t_1,s) = x(t_1,s) \quad , \quad \ell(t_1) = 0$$

$$x'(t,\ell(t)) = x_m \quad (\text{融点})$$

$$\frac{d\ell(t)}{dt} = \frac{\kappa}{\rho L} \left.\frac{\partial x'(t,s)}{\partial s}\right|_{s=\ell(t)} + q(v(t))$$

$$\left.\frac{\partial x'(t,s)}{\partial s}\right|_{s=L} = 0$$

操作量 ： $v(t)$ ：宇宙船の速度

出力 ： $y(t) = \ell(t)$

4. むだ時間要素の偏微分方程式によるモデル

$m(t)$, $t > 0$ を入力， $n(t)$ を出力とするとき，入出力の関係が

$$n(t) = \begin{cases} m_0(t) & , \quad 0 \leq t \leq \theta \\ m(t-\theta) & , \quad \theta < t \end{cases}$$

で与えられる要素をむだ時間要素と呼び， $\theta$ をむだ時間という. $\theta$ は因果律から常に $\theta \geq 0$ である. $m_0(t)$ は与えられた関数で初期関数という．いま，むだ時間要素に対して Fig.3 のようなモデルを考える．すなわち入力 $m(t)$ がある速度 $\nu$ で動く媒体によつて長さ L の区間を運ばれると考える．このような分布定数モデルの特性は，先にのべた Transportation-Exchanger で $q(t,s) \equiv 0$ と考えられるから直ちに，次式のようになることが分る．

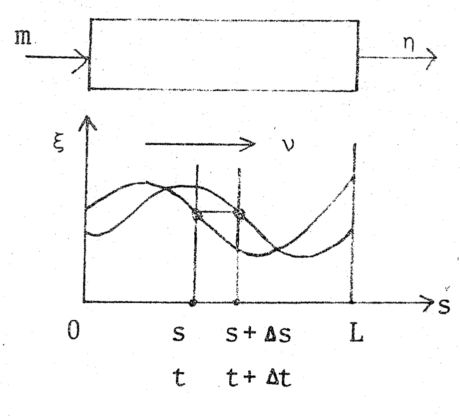



Fig. 3

$$\frac{\partial \xi(t,s)}{\partial t} = -\nu\frac{\partial \xi(t,s)}{\partial s}, \quad 0 \le s \le L, \quad 0 \le t \tag{7}$$

初期条件： $\xi(0,s) = \xi_0(s), \quad 0 \le s \le L$

境界条件： $\xi(t,0) = m(t), \quad 0 < t$ (8)

出力　　： $\eta(t) = \xi(t,L), \quad 0 \le t$

(8) を満足する (7) の解は，

$$\xi(t,s) = \begin{cases} \xi_0(s-\nu t), & \nu t \le s \le L, \quad 0 \le t \le \frac{s}{\nu} \\ m(t-\frac{s}{\nu}), & 0 \le s < \nu t, \quad \frac{s}{\nu} < t \end{cases} \tag{9}$$

となるから，その出力は $\theta = L/\nu$ とおいて

$$\eta(t) = \begin{cases} \xi_0(L-\nu t), & 0 \le t \le \theta \\ m(t-\theta), & \theta < t \end{cases}$$

となる．

(7) 式であらわされるむだ時間要素のモデルの状態は $\xi(t,s)$, $0 \le s \le L$ で規定される．いま入力 $m(t)$, $t>0$ を区分的に連続な関数とすると，状態 $\xi(t,s)$ は，$s$ に関し区分的に連続な関数になる．いま，区間 $0 \le s \le L$ 上で定義されたすべての区分的に連続な関数のつくる空間を $\Gamma(L)$ とすれば，$\Gamma(L)$ は (7) 式であらわされるモデルの状態空間になる．

一方 (9) 式から分るように，$\xi(t,s)$, $0 \le s \le L$ は，入力の断片 $m(\tau)$, $t-\theta \le \tau \le t$ と1対1に対応する．いま $m_t(\sigma) = m(t+\sigma)$, $-\theta \le t \le 0$ という記号を導入すれば，$m_t(\sigma)$ は固定された $t$ に対して，区間 $[-\theta,0]$ 上で定義された区分的に連続な関数になる．そこで，

区間 $[-\theta,0]$ で定義されたすべての区分的に連続な関数のつくる空間を $\Sigma(\theta)$ とすれば，$\Gamma(L)$ と $\Sigma(\theta)$ は1対1に対応し，双方に距離を適当に導入すれば，系 (7) の状態を $\xi(t,s)$ で規定しても，$m_t(\sigma)$ によつて規定しても全く同値になる．

むだ時間要素と集中定数系が結合した系の特性は，次式であらわされる．

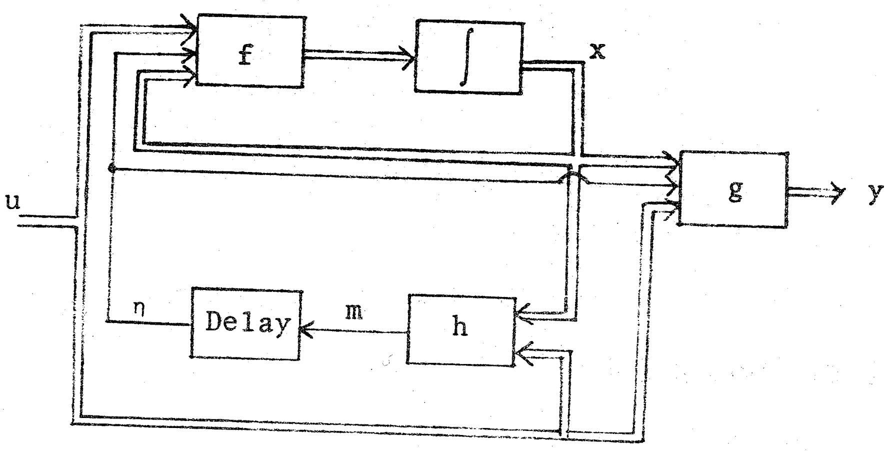



Fig. 4

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\eta,u)$$

$$\eta(t) = m(t-\theta) \qquad (10)$$

$$m = h(t,x,u)$$

$$y = g(t,x,\eta,u)$$

系 (10) の状態は集中定数系の状態 $x(t)$ と，むだ時間要素の状態 $m_t(\sigma)$ によつて規定されるから，集中定数系の状態空間を $R$ とすれば系 (10) の状態空間は $R\times\Sigma(\theta)$ である．

むだ時間を含む系の制御問題は上にのべた状態の定義から分るように，与えられた初期状態 $(x(t_0),m_{t_0}(\sigma))$ から，最終状態 $(x(t_1),m_{t_1}(\sigma))$，$t_1>t_0$

へ，入力 $u(t)$ によつて制御するという形に定式化される．この種の制御を，系の状態を制御するという意味で，状態制御問題と呼ぶ．これに対し，系の出力に注目して，与えられた初期状態 $(x(t_0),\ m_{t_0}(\sigma))$ から，最終出力 $y(t_1)$，$t_1>t_0$ へ入力 $u(t)$ によつて制御するという問題も考えられる．このような制御問題を出力制御問題と呼ぼう．筆者は先に，むだ時間を含む系の制御においては，整定問題と到達問題を区別する必要があることを述べたが，[3] これらは，それぞれ，系 (10) で $y=g(x)=x$ の場合の状態制御問題と出力制御問題に対応する．

(10) 式で，むだ時間要素の状態に重点をおかなければ変数 $m$，$n$ を消去して，次の差分微分方程式がえられる．

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \tilde{f}(t,x(t),x(t-\theta),u(t),u(t-\theta)) \\ y(t) &= \tilde{g}(t,x(t),x(t-\theta),u(t),u(t-\theta)) \end{aligned} \tag{11}$$

$m = h(t,x,u)$ の関係から分るように $m_t(\sigma)$ を規定するには，$x_t(\sigma) = x(t+\sigma)$，$-\theta\leq \sigma\leq 0$ および $u_t(\sigma) = u(t+\sigma)$，$-\theta\leq\sigma\leq 0$ を規定しなくてはならない．したがつて，(11) の形で表現された，むだ時間を含む系の状態は $(x_t,u_t)$ で規定される．また，その状態空間は，$\Sigma^n(\theta) \times \Sigma^r(\theta)$ と考えられる．ただし $\Sigma^n(\theta)$ および $\Sigma^r(\theta)$ は，$\Sigma(\theta)$ のそれぞれ $n$ ヶおよび $r$ ヶの直積空間である．

むだ時間要素に対して (7) 式のモデルを考えることにより，先にのべた近似計算法の考え方が一層明確になる．[3] いま，むだ時間要素のモデル (7) の領域 $0 \leq s \leq L$ を長さ $\delta$ 毎の小区間に $k$ 分割し，各分点における $\xi(t,s)$ の値をそれぞれ $\xi(t,i\delta) = \xi^i(t)$，$i = 0,1,\ldots k$，ただし，$\xi^0(t)=\xi(t,0)=m(t)$，$\xi^k(t)=\xi(t,k\delta)=n(t)$ とする．ここで $k\delta = L$

である．これらの値に対して，偏微分方程式 (7) は，近似的に，常微分方程式系

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\omega(\xi^i - \xi^{i-1}), \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{12}$$

$$\xi^0(t) = m(t), \quad \xi^k(t) = \eta(t)$$

でおきかえることができる．ただし $\omega = \nu/\delta = k/\theta$ である．むだ時間要素を近似的に (12) の集中定数モデルでおきかえれば，むだ時間を含む制御系の状態制御問題は，有限次元空間内で近似的に議論することができる．

## 文　献


分布定数系の制御に関しては，

1）Wang, P.K.C., Control of Distributed Parameter Systems, Advances in Control Systems, vol. 1, p. 75 ff. Academic Press, 1964

2）ブトウコフスキー，A.G.， 分布定数系の最適制御理論，（ロシア語）HAУKA　1965

むだ時間を含む系の最適制御に関しては

3）示村悦二郎， 差分微分方程式であらわされる系の最適問題，京都大学数理解析研究所講究録（8）1/23，1966

Oğuztöreli, M.N., Time-lag Control Systems, Academic Press, 1966.