

線型計算

広文理 新谷尚義

§1 記号の約束

とくにことわらない限り、実数の要素をもつ $n \times n$ の行列と複素数の要素をもつ n ベクトル だけを考えることにする。 A^T で A の転置行列, \bar{A}^T で A の共役転置行列を表わす。 A の行列式を $|A|$ または $\det(A)$ で表わし、 A の跡和を $\text{tr}(A)$ とかくことにする。

A の固有値を $\lambda_i(A)$, ($i=1, 2, \dots, n$) で表わし、 A の固有値であることが明らかになる場合には、単に λ_i とかくことにする。今後 $\lambda_i(A)$ は絶対値の大小順に番号がつけられているものとする。すなわち、

$$(1.1) \quad |\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|$$

である。

$$(1.2) \quad \rho(A) = |\lambda_1(A)|$$

を A のスペクトル半径、

$$(1.3) \quad \|A\|_S = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}}$$

を A のスペクトルノルムとす。これに代りて

$$(1.4) \quad \|A\|_E = \text{tr}(A^T A)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を A の ユークリッド・ノルム という。

ベクトル x に対して

$$(1.5) \quad (x, x)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

を x の ノルム という。

A が 正則行列 であるとき。

$$(1.6) \quad \Lambda(A) = \|A\|_S \|A^{-1}\|_S$$

を A の スペクトル 条件数 という。

$$(1.7) \quad p(A) = \rho(A) \rho(A^{-1})$$

を A の p 条件数 という。 A^{-1} の 固有値 は $1/\lambda_i(A)$, ($i=1, 2, \dots, n$) であるから

$$(1.8) \quad \Lambda(A) = (\lambda_1(A^T A) / \lambda_n(A^T A))^{\frac{1}{2}}$$

$$(1.9) \quad p(A) = |\lambda_1(A) / \lambda_n(A)|$$

と表わける。

§ 2 正値行列

A が 対称行列 で $\lambda_i(A) > 0$, ($i=1, 2, \dots, n$) であるとき, A は 正値行列 であるという。

定理 1 対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ($\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$) とすると、任意のベクトル x ($x \neq 0$) に対して

$$(2.1) \quad \mu_n \leq (x, Ax) / \|x\|^2 \leq \mu_1$$

が成り立つ。

定理 2 $B = A^T A$ は対称で $\lambda_i(B) \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) である。
また

$$(2.2) \quad \lambda_n(B) \leq |\lambda_i(A)|^2 \leq \lambda_1(B), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2.3) \quad |\lambda_i(A)| \leq \|A\|_S \leq \|A\|_E$$

$$(2.4) \quad \|A\|_E / \sqrt{n} \leq \|A\|_S$$

が成り立つ。

系 1 A が正則ならば、 $A^T A$ は正值である。

系 2 A が対称ならば $\lambda_i(A^T A) = \lambda_i^2(A)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) である。

系 3 A が対称ならば

$$(2.5) \quad \rho(A) = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}}, \quad \|A\|_S = \rho(A)$$

が成り立つ。さらに A が正則なときは

$$(2.6) \quad p(A) = \Lambda(A) = p(A^T A)^{\frac{1}{2}}$$

である。

系4 正則行列 A に対して 次の式が成り立つ。

$$(2.7) \quad p(A) \leq \Lambda(A) \leq \Lambda(A)^2 = \Lambda(A^T A)$$

$$(2.8) \quad p(A) \leq p(A)^2 \leq p(A^T A).$$

系5 A が正則ならば、次の式が成り立つ。

$$(2.9) \quad \lambda_n(A^T A) > |A|^2 / (\|A\|_E^2 / (n-1))^{n-1}$$

$$(2.10) \quad \Lambda(A) < \|A\|_E (\|A\|_E / \sqrt{n-1})^{n-1} / |\det(A)|$$

$$(2.11) \quad \Lambda(A) \leq \|A\|_E \|A^{-1}\|_E.$$

定理2 行列 A が正値ならば、 $a_{ii} > 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) である。

§3 固有値の限界

固有値を実際に求めなくても、その限界がわかれば十分である場合もあり、特に誤差評価のためにも必要があるので、固有値の限界について知られている結果を少しおいておく。

定理 3 (Gerschgorin)

$$(3.1) \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと、 $\lambda_i(A)$ は複素平面上の n 本の円

$$(3.2) \quad K_j: |z - a_{jj}| \leq r_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

からなる 閉集合 $\bigcup_{j=1}^n K_j$ の中にある。

系 1 $\lambda_i(A), (i = 1, 2, \dots, n)$ は n 本の円

$$(3.3) \quad C_j: |z - a_{jj}| \leq s_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

からなる 閉集合 $\bigcup_{j=1}^n C_j$ の中にある。ただし

$$(3.4) \quad s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

である。

系 2 $\lambda_i(A), (i = 1, 2, \dots, n)$ は $(\bigcup_{j=1}^n K_j) \cap (\bigcup_{j=1}^n C_j)$ の中にある。

系 3

$$(3.5) \quad \rho(A) \leq \min\left(\max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|, \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ki}|\right)$$

$$(3.6) \quad 1/\rho(A^{-1}) \geq \max_i [\min(|a_{ii}| - r_i), \min(|a_{ii}| - s_i)]$$

定理 4 (Gerschgorin) 円 $K_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ のうち m 本の交
わって連結閉集合 H_m を作り、他の円は H_m と共通点をもたないならば、

ちようど m 個の固有値が H_m の中にある。

定理 5 (Schur) 行列 A に対して次の式が成り立つ。

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_E^2.$$

定理 6 対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, ($\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$) とする。任意の $h-1$, ($1 \leq h \leq n$) 個のベクトル α_i ($i=1, 2, \dots, h-1$) を選んで固定する。条件

$$(3.8) \quad \|x\| = 1, \quad (x, \alpha_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, h-1)$$

をみたすあらゆるベクトル x についての (x, Ax) の上限を $J_h(\alpha)$ とすると、

$$(3.9) \quad J_h(\alpha) = \sup_x (x, Ax) \geq \mu_h$$

が成り立つ。また、あらゆる α_i の選び方についての $J_h(\alpha)$ の下限は μ_h に等しい。すなわち

$$(3.10) \quad \inf_{\alpha} J_h(\alpha) = \mu_h$$

が成り立つ。

実際には、上限下限の値をとるベクトル x, α が存在するから、

$$(3.11) \quad \mu_h = \min_{\alpha} \left\{ \max_{x \neq 0} (x, Ax) / \|x\|^2 : (x, \alpha_i) = 0, (i=1, 2, \dots, h-1) \right\}$$

とかける。

系 A が対称行列, B が正值行列であり, $B^{-1}A$ の固有値を $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, $(\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n)$ とすると,

$$(3.12) \quad \nu_h = \min_{\substack{x \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{\max(x, Ax)}{(x, Bx)} : (x, \alpha_i) = 0 \ (i=1, 2, \dots, h-1) \right\}$$

が成り立つ。特に B の最大固有値を ω_1 , 最小固有値を ω_n とすると

$$(3.13) \quad \omega_1 \nu_h \geq \mu_h \geq \omega_n \nu_h, \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

定理 7 対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, $(\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n)$, 対称行列 B の固有値を $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, $(\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n)$, 行列 $A - B$ の最大固有値を ω_1 , 最小固有値を ω_n とすると,

$$(3.14) \quad \omega_n \leq \mu_h - \nu_h \leq \omega_1, \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

系 対称行列 A の固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, $(\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n)$, 対角要素 a_{ii} , $(i=1, 2, \dots, n)$ を大小順に並べたものを d_1, d_2, \dots, d_n , $(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ とすると,

$$(3.15) \quad s = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

とおくと

$$(3.16) \quad |\mu_i - d_i| \leq s, \quad |\mu_i - d_i| \leq t, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

定理 2 (Collatz) A を対称行列, 0 を要素にもたない任意の実数の
 k_i を v_i とし, $w = Av$ とおく。

$$(3.17) \quad l_M = \max_i w_i/v_i, \quad l_m = \min_i w_i/v_i$$

とすると, $l_M \geq \lambda \geq l_m$ であるような固有値 λ が少なくとも 1 つある。

§ 4 行列のノルム

行列の大きさを測る尺度として、次の条件をみたす実数 $\|A\|$ を導入し
 A のノルムという。

- (1) $\|A\| \geq 0$ で, $A = 0$ のときに限り, $\|A\| = 0$
- (2) 任意の数 c に対して $\|cA\| = |c| \|A\|$
- (3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

$\|A\|_S, \|A\|_E$ はこれらの条件をみたしている。以下簡単のため、 $\|A\|_S$
 を単に $\|A\|$ とかくことにする。

定理 1 x を 0 でない任意のベクトルとすると

$$(4.1) \quad \|A\| = \max_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$$

である。

系 1 任意のベクトル x に対して、次の式が成り立つ。

$$(4.2) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

定理 10 $\|A\| < 1$ ならば、 $I + A$ は正則で

$$(4.3) \quad \|(I+A)^{-1}\| \leq 1/(1-\|A\|)$$

$$(4.4) \quad \|(I+A)^{-1} - I\| \leq \|A\|/(1-\|A\|)$$

が成り立つ。

系 1 A が正則で $\|A^{-1}B\| < 1$ ならば、 $A + B$ も正則で

$$(4.5) \quad \|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| \leq k \|A^{-1}\|, \quad k = \|A^{-1}B\|/(1-\|A^{-1}B\|)$$

が成り立つ。

系 2 $\|A\| < 1$ ならば、次の式が成り立つ。

$$(4.6) \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^r + (I-A)^{-1} A^{r+1}$$

$$(4.7) \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^r + \dots$$

この定理の証明では、 $|\lambda_i(I+A)| \geq 1 - \lambda_i(A) \geq 1 - \|A\| > 0$ であることを使う。
 $\|A\|_E < 1$ ならば $\|A\| \leq \|A\|_E < 1$ だから、 $\| \cdot \|_E$ で置きかえ

てお 定理 10 と系は成り立つ。

§ 5 評価式と近似式

数値計算にかけられる行列の要素は、誤差を伴っているのが普通である。また、計算の途中で丸められるから、与えられた数値解は、与えられた行列に対する線型計算の問題の正確な解ではなく、もとの行列に近い、値が少し変った要素をもつ行列に対する問題の正解な解であると考えられる。そこで係数が少し変化したとき、解にどのような影響があるかを調べよう。また近似解の誤差評価についても考えよう。

5.1 連立1次方程式

定理 11 x を方程式 $Ax = b$ の解、 A が $A + \delta A$ b が $b + \delta b$ に変ったとき、解を $y + \delta x$ とする。このとき $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば次の式が成り立つ。

$$(5.1) \quad \|\delta x\| \leq [\|A^{-1}\delta A\| \|b\| + \|\delta b\|] \|A^{-1}\| / (1 - \|A^{-1}\delta A\|)$$

$$(5.2) \quad \|\delta x\| / \|x\| \leq [\|\delta b\| / \|b\| + \|\delta A\| / \|A\|] \Lambda(A) / (1 - \|A^{-1}\delta A\|)$$

系 1

$$(5.3) \quad z = A^{-1}(\delta b - \delta Ax)$$

とおく。 $\|A^{-1}\delta A\| < 1$ ならば次の式が成り立つ。

$$(5.4) \quad \delta x = z - (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta Ax$$

系 2 $\delta A = (\delta a_{ij}), A^{-1} = (c_{ij}), \delta b = (\delta b_i), Z = (z_i)$, とおす。

$$(5.5) \quad |\delta b_i| \leq \varepsilon, |\delta a_{ij}| \leq \varepsilon, (i, j=1, 2, \dots, n)$$

ならば、次の式が成り立つ。

$$(5.6) \quad |z_i| \leq e \sum_{j=1}^n |c_{ij}|, \quad e = \varepsilon (1 + \sum_{j=1}^n |x_j|).$$

定理 12 x を方程式 $Ax = b$ の解, x^* を近似解とし、

$$(5.7) \quad v = b - Ax^*$$

とおくと次の式が成り立つ。

$$(5.8) \quad \|x - x^*\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$$

$$(5.9) \quad \|x - x^*\| / \|x\| \leq \Lambda(A) \|r\| / \|b\|.$$

系

$$(5.10) \quad \|x - x^*\| < \|r\| (\|A\|_E / \sqrt{n-1})^{n-1} / |\det(A)|$$

$$(5.11) \quad \|x - x^*\| / \|x\| < (\|r\| / \|b\|) \|A\|_E (\|A\|_E / \sqrt{n-1})^{n-1} / |\det(A)|$$

5.2 逆行列

定理 13 $A^{-1} = B, (A + \delta A)^{-1} = B + \delta B$ とおく。このとき

$\|A^{-1} \delta A\| < 1$ ならば、次の式が成り立つ。

$$(5.12) \quad \|\delta B\| \leq \|B\|^2 \|\delta A\| / (1 - \|A^{-1} \delta A\|)$$

$$(5.13) \quad \|\delta B\| / \|B\| \leq (\|\delta A\| / \|A\|) \Lambda(A) / (1 - \|A^{-1} \delta A\|)$$

系 $C = -A^{-1} \delta A A^{-1}$ とおくと, $\|A^{-1} \delta A\| < 1$ ならば δB は次のようにかける.

$$(5.14) \quad \delta B = C - (I + A^{-1} \delta A)^{-1} A^{-1} \delta A C$$

定理 14 B^* を $B = A^{-1}$ の逆行列とし, $R = I - B^* A$ とおくと

$$(5.15) \quad \|B - B^*\| / \|B\| \leq \|R\|$$

である. 若し $\|R\| < 1$ ならば 次の式が成り立つ.

$$(5.16) \quad \|B - B^*\| \leq \|B^*\| \|R\| / (1 - \|R\|)$$

$$(5.17) \quad B = (I - R)^{-1} B^* = B^* + R B^* + R^2 B^* + \dots + R^r B^* + (I - R)^{-1} R^{r+1} B^*$$

系 1 x を方程式 $Ax = b$ の解, x^* を近似解, r を残差ベクトルとすると, とき $\|R\| < 1$ ならば 次の式が成り立つ.

$$(5.18) \quad x - x^* = B^* r + R B^* r + \dots + R^r B^* r + (I - R)^{-1} R^{r+1} B^* r$$

系 2 $\|R\|_E < 1$ のとき

$$(5.19) \quad \omega = \|B^*\|_E / (1 - \|R\|_E)$$

とおくと 次の式が成り立つ.

$$(5.20) \quad \|B\|_E \leq \omega, \quad \Lambda(A) \leq \omega \|A\|_E$$

$$(5.21) \quad \|B - B^*\|_E \leq \omega \|R\|_E$$

$$(5.22) \quad \|x - x^*\| \leq \omega \|r\|$$

$$(5.23) \quad \|B - B^* - \sum_{k=1}^r R^k B^*\|_E \leq \omega \|F\|_E^{r+1}$$

$$(5.24) \quad \|x - x^* - \sum_{k=1}^r R^k B^* r\| \leq \omega \|x\| \|R\|^{r+1}$$

系 3

$$(5.25) \quad \|B - B^*\|_E / \|B\|_E \leq \|R\|_E$$

$$(5.26) \quad \|x - x^*\| / \|x\| \leq (\|r\| / \|b\|) \|A\|_E \omega, \quad (\|R\|_E < 1)$$

5.3 行列式

定理 15 $|\delta a_{ij}| \leq \varepsilon, (i, j=1, 2, \dots, n)$ ならば

$$(5.27) \quad |A + \delta A| - |A| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta a_{ij} A_{ji} + O(\varepsilon^2)$$

が成り立つ。ただし A_{ij} は a_{ij} の余因子である。

系 $|A| \neq 0$ ならば次の式が成り立つ。

$$(5.28) \quad |A + \delta A| - |A| = |A| \operatorname{tr}(A^{-1} \delta A) + O(\varepsilon^2)$$

5.4 固有値

定理 16 $A, A + \delta A$ が対称行列であるとき、その固有値をそれぞれ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n), \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n)$ とする。

$$|\delta a_{ij}| \leq \varepsilon, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

ならば、

$$(5.29) \quad |\mu_i - \nu_i| \leq n\varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である。

定理 17 λ を対称行列 A の固有値, x , ($\|x\| = 1$) を λ に対応する固有ベクトルとする。 $\tilde{\lambda}^*$ を λ の近似値, x^* , ($\|x^*\| = 1$) を x の近似ベクトルとし、

$$(5.30) \quad x^* = x + \xi, \quad y = Ax^* - \tilde{\lambda}^* x^*, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^* + (x^*, y)$$

とおくと次の式が成り立つ。

$$(5.31) \quad |\tilde{\lambda} - \lambda| \leq \|A - \lambda I\| \|\xi\|^2$$

また、

$$(5.32) \quad \tilde{y} = (A - \tilde{\lambda} I)x^*, \quad \xi = (A - \tilde{\lambda} I)\tilde{y}$$

$$(5.33) \quad \gamma = \|\tilde{y}\|^2, \quad \beta = (\xi, \tilde{y}), \quad \alpha = \gamma^2 - \|\xi\|^2, \quad \omega = \alpha^2 + 4\beta^2$$

とおく。 $\omega \neq 0$ ならば、

$$(5.34) \quad x_1 = 2\beta^2 / (\omega + |\alpha|\sqrt{\omega}), \quad x_2 = (1 + |\alpha|\sqrt{\omega}) / (2\gamma)$$

$$(5.35) \quad c = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{x_2}, & (\alpha \geq 0) \\ -\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{x_1}, & (\alpha < 0) \end{cases}, \quad d = \begin{cases} \sqrt{\gamma x_1}, & (\alpha \geq 0) \\ \sqrt{\gamma x_2}, & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$$(5.36) \quad \tilde{x} = dx^* + c\tilde{y}$$

とおくと、 $\|\tilde{x}\| = 1$ かつ

$$(5.37) \quad \|(A - \tilde{\lambda} I)x^*\|^2 - \|(A - \tilde{\lambda} I)\tilde{x}\|^2 = \begin{cases} (\sqrt{\omega} + |\alpha|) / (2\sqrt{\gamma}), & (\alpha \geq 0) \\ (2\beta^2\sqrt{\gamma} / (\sqrt{\omega} + |\alpha|)), & (\alpha < 0) \end{cases}$$

が成り立つ。

§ 6 数値解法

6.1 条件の悪い行列

(5.2), (5.13)式から条件数 $\Lambda(A)$ の大きい行列では、わずかな係数の変化が解に大きな影響を及ぼす可能性があることがわかる。たとえば、方程式

$$(6.1) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + 1.00001y = 2 \end{cases}$$

とはわずかに違ふ。そして解も $x = 1, y = 1$ と $x = 0.999987, y = 1.00001$ で少し違ふ。この場合 $\Lambda(A) \doteq 27, p(A) \doteq 18$ である。同様に、

$$(6.2) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 4.00001y = 7.00001 \end{cases}$$

と

$$(6.3) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 3.99999y = 7.00004 \end{cases}$$

とは余り違ふ。しかし解は $x = 1, y = 1$ と $x = 7 + 2/3, y = -4$ で全く違ふ。したがって一方を他方の近似と考えるわけにはゆかない。

(2) 式に対しては $\Lambda(A) \doteq 1666669, p(A) \doteq 1633336$ である。

また、

$$(6.4) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 3x + 3.999992y = 7.000042 \end{cases}$$

は (3) 式と $\varepsilon = 2 \times 10^{-6}$ しか違ふ。解は $x = 9 + 1/3, y = -5.25$ で ε だけの変化が $10^6 \varepsilon$ 程度の変化をもたしている。

6桁の計算で解きたいときには、7桁目を丸めなければならないから (3)

式になり、それを正確に解いても全く違った答えがえられることになる。
 この場合 $\kappa(A) \doteq 2083331$, $\rho(A) \doteq 2041659$ である。

このように、係数の値がわずかに変う場合には、解は大きく変化する
 ような行列のことを、条件の悪い行列であるという。条件の良し悪しを測
 る尺度として条件数を使う意味も (5.2), (5.13) 式から明らかであろう。
 $\kappa(A)$ は $A^T A$ の固有値を求めないとえられないが、 $|A|$ または A^{-1} の求
 めておれば (2.10) 式 または (5.20) 式によって見積ることができる。

上の例からもわかるように、条件の悪い行列の場合には、丸め誤差が
 大きく作用するので、桁数をふやすなどして丸め誤差の影響力をへらす
 工夫をしなければ、似ても似つかない答えがえられる恐れがある。

定理 16 により、文称行列の場合には、要素が少し変化すれば固有値
 も少し変るが、非文称行列の場合には、 $\epsilon \neq 0$ は必ずしも成り立たない。
 以下サイスによる次の例を考えよう。

$$(6.5) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \epsilon & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A の固有方程式は $\lambda^n - (-1)^n \epsilon = 0$ で $\epsilon = 0$ のときは $\lambda_i = 0$
 ($i=1, 2, \dots, n$) であるが、 $\epsilon \neq 0$ ならば λ_i は $(-1)^n \epsilon$ の n 乗根
 である。たとえば、 $\epsilon = 10^{-10}$ で $n = 10$ のときは、 $|\lambda_i| = 10^{-1}$ の固有
 値の 1 つが 10^{-10} 変化しただけで固有値は $10^9 \epsilon$ の変化を起すこと
 になる。

6.2 残差

$Ax = b$ の近似解 x^* , $B = A^{-1}$ の近似行列 B^* がえられると、残差ベクトル r と 残差行列 R が求められる。すると (5.22), (5.21) 式によつて 誤差 $x^* - x$, $B^* - B$ のノルムの絶対評価ができる。(5.26), (5.25) 式によつて 相対評価ができる。これらの式から、残差が小さいから誤差も同程度に小さいといへばいいことがわかる。実際、

$$(6.6) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-1/n^2 \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 1+n-n^2 & n^2-n \\ n^2 & -n^2 \end{bmatrix}, \quad (n > 1)$$

とすると、

$$(6.7) \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1/n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

だから、 B^* は B のより近似に「なっているように見えるが、

$$(6.8) \quad B^* - B = \begin{bmatrix} n & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \|B - B^*\|_E = \sqrt{2n}$$

である。(5.21) 式を使うと、

$$(6.9) \quad \|R\|_E^2 = 1/n^2, \quad \|B^*\|_E^2 = (4n^4 - 4n^3 + 2n + 1)$$

$$(6.10) \quad \|B - B^*\|_E \leq 2n[1 + (4n^3 - 4n^2 + 2n + 1)/(4n^2(n-1)^2)]^{\frac{1}{2}}$$

がえられる。この場合 $\rho(A) = \lambda(A) = [4n^2 - 2 + 1/n^2 + (2n^2 - 1)\sqrt{4 + 1/n^4}]/2$

である。

6.3 近似解の改良

$Ax = b$ の近似解 x^* と A^{-1} の近似行列 B^* が求められたとき、 $\|R\|_E < 1$ ならば 定理 14 と系とにより、次のようにして x^* , B^* を改良することが出来る。

$$(6.11) \quad x_0^* = x^*, \quad r_0 = B^* r, \quad B_0^* = B^*, \quad C_0 = RB^*$$

$$(6.12) \quad x_{i+1}^* = x_i^* + r_i, \quad r_{i+1} = Rr_i$$

$$(6.13) \quad B_{i+1}^* = B_i^* + C_i, \quad C_{i+1} = RC_i, \quad (i=0, 1, \dots)$$

対称行列の固有値の近似値 λ^* , 近似固有ベクトル x^* が求められたときは、定理 17 を使って λ^* , x^* を改良することが出来る。

連立一次方程式を消去法などの直接法で解くときには、逆行列と行列式の値を同時に求めておくことが望ましい。そうしておくとは、行列の条件の良し悪しがわかり、誤差の見積りができ、さらに近似解の改良ができるからである。また積和 $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ を作るときには、丸めの誤差をへらすために 2 倍桁で計算することが望ましい。