数理解析研究所講究録
第 18 巻 1966 年 1-8

大次元連立1次方程式 について の一考察

日大　理工　　宇　野　利　雄

第一種積分方程式は通例解をもたないのが普通である．たとえば

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy = g(x) \tag{1}$$

において $g(x)$ を与えて $f(x)$ を求めようとする． $f(x)$, $g(x)$ の Fourier 変換をそれぞれ

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx,$$

$$\gamma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{isx} dx$$

とすると，(1) から

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy\right) e^{isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} e^{isx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{isy} \left(\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{s^2}{4}}\right) dy \\ &= e^{-\frac{s^2}{4}} \psi(s)\end{aligned}$$

となつて

$$\psi(s) = e^{\frac{s^2}{4}} \gamma(s)$$

となる．たとえば $f(x)$ を絶対値可積分の函数の範囲で求めようとすると $s\to\pm\infty$ のとき $\psi(s)\longrightarrow 0$ でなければならないので，右辺の函数 $g(x)$ はその Fourier 変換 $\gamma(s)$ が $\gamma(s)=0(e^{-s^2/4})$ の位数のものでなければならないことになる．

第二種積分方程式はこれに反して通例解のあるのが普通であつて，たとえば前例に連結する

$$(2) \qquad f(x)-\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2}f(y)dy=g(x)$$

においては，上と同様に f,g の Foutier 変換 $\psi(s)$，$\gamma(s)$ の間の関係を作ると

$$(1-\lambda e^{-\frac{s^2}{4}})\psi(s)=\gamma(s)$$

となり，$\lambda<1$ ならば，$g(x)$ の Fourier 変換と同じ位数の Fourier 変換を持つ函数の範囲で $f(x)$ が見つかる．

(2) は δ 函数をつかつて

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(x-y)-\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}]f(y)dy=g(x)$$

と書けば，一般に核 $K(x,y)$ に超函数をゆるした形での第一種積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)f(y)dy=g(x)$$

とも考えられ，この見地からすると核には特異性が余計入つている方が，かえつて解が存在しやすくなるという傾向にあるように見受けられる．たとえば方程式

$$f^{(m)}(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)dy = g(x) \tag{3}$$

については，これを

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(-1)^m \delta^m(x-y) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}] f(y)dy = g(x)$$

とみることにより，Fourier 変換の間の関係が

$$\psi(s) = \gamma(s)/[(-is)^m - \lambda e^{-\frac{s^2}{4}}]$$

となり，m 偶数のときにλに不等式による範囲の限定があるのをのぞいては，$f(x)$ はその Fourier 変換を得ることによつて求まる．

積分における連続和を離散点における和におきかえると，連立１次方程式が積分方程式に対比されるものになる。そこで積分方程式について上のような考察を行なつたことに比較されるものが連立１次方程式についても成立してはいないであろうか。

特に間隔をこまかに区分点の数を大きくして，函数値の有限個の和で積分を近似することとすると，積分方程式は大次元の連立方程式におきかえられることとなる．このような素朴な考え方をしてみたとき，それがはたしてどのくらいの有効性を持つであろうか。

このような考察に資料を提供する若干の数値実験を行なつて見たので，これを以下に報告する．連立１次方程式を

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = c_i \qquad (i = 1,2,...,m)$$

とする。係数行列 $A = (a_{ij})$ 右辺のベクトル $C = (c_i)$ 解のベクトル $X = (x_j)$ として， $AX = C$ である．

1.　(1) にくらべられるような，A の各要素がなめらかにならんでいる場合として a_{ij} を次のようにとつた．すなわち

$$f(x,y) = e^{-(x-y)^2}$$

とおき，a_{ij} を $a_{ij} = f(x_i, y_j)$ とした．ここに x_i，y_i は区間 $0 \leqq x \leqq \ell$，$0 \leqq y \leqq \ell$ を等分する点

$$x_i = (i-1)h, \quad y_j = (j-1)h$$
$$(i,j = 1,2,\ldots,m)$$

で，h は $(m-1)h = \ell$ である．

m が大きいほど函数 $f(x,y)$ の値を x，y の接近した場所で次々にとつて行くわけである。

$\ell = 2,0$ として m=6，9，12 の3通りの場合の係数Aを作り，次にそれぞれの場合につき Xが $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1$ となるように右辺Cを計算した．この A，C を与えられたものとして通例の消去法により方程式を解き，これによつた求められた解X がはたして (1，1，...，1) を復元するかどうかをしらべた．各場合の Xは次のようである．

a) 6元	b) 9元	c) 12元
+9.9999868 -01	+9.9861777 -01	+9.9733261 -01
+1.0000038 +00	+1.0077484 +00	+1.0277281 +00
+9.9999390 -01	+9.7856410 -01	+8.6037110 -01
+1.0000072 +00	+1.0381510 +00	+1.4163052 +00
+9.9999450 -01	+9.5232200 -01	+2.1634923 -01
+1.0000022 +00	+1.0427550 +00	+1.9215475 +00
	+9.7319300 -01	+4.4253590 -01
	+1.0107222 +00	+8.9225930 -01
	-9.9790910 -01	+1.5390468 +00
		+5.0845790 -01
		+1.2204169 +00
		+9.5776182 -01

元数の増加とともに急速に不正確になつて行く状態が示されているが，そのメカニズムを解明する手がかりとして，消去の各段階における pivot の大きさを順に示すと次のようである．

a) 6 元	b) 9 元	c) 12 元
+1.0000000 +00	+1.0000000 +00	+1.0000000 +00
+2.7385096 -01	+1.1750310 -01	+6.3977460 -02
+1.2945141 -01	+2.5991650 -02	+7.9244900 -03
+7.9885320 -02	+8.1282000 -03	+1.4261700 -03
+5.7674150 -02	+3.1995350 -03	+3.3268800 -04
+4.6030000 -02	+1.4911820 -03	+9.7378000 -05
	+7.9875000 -04	+4.4068400 -05
	+4.9664300 -04	+4.1952300 -05
	+3.8356700 -04	+3.5448500 -05
		+3.1713290 -05
		+3.4705460 -05
		+3.0106650 -05

間隔をこまかにするほど，Aから作つて行く消去段階で pivot の桁落ちの進んで行くことがわかる．しかもこの桁落ちはどこかで突然急におこるのではなく，たとえばpivot 選択のために行，列の入れかえを要するという程の事情はおこつていない。 pivot の位置以外のところでも一様に同じ程度づつ桁落ちして行つて，１２元では１０$^{-5}$程度にまで達してしまう．このようないわば慢性の桁落ちで最後に pivot が非常に小さくなるという事情が次元が大きいほど深く進行して解を非常に不正確にしてしまうようである．

さて次に (2) にくらべられるのは，たとえばAの対角要素だけがうんと大きく，また対角線からはずれたところでは $|a_{ij}|$ が非常に小さい（時には０）という場合であろう（三項方程式のたぐい）が，ここではそのような例を試みる代りに，次のような例を作つてみた．

2. 平均０，標準偏差１であるような正規分布乱数を作り，Aの各要素をお

のおの独立にこのような乱数にとつてみた．こうやつて作つたＡにつき，前のときと同じく答が（1，1，... ，1）になるように右辺Ｃを計算し，このＡとＣとで方程式　AZ=C　を解いた結果が次表である（１２元と２０元）．

a) 12 元	b) 20 元
+1.0000037 +00	+9.9999902 -01
+1.0000011 +00	+1.0000041 +00
+9.9999990 -01	+9.9999957 -01
+9.9999893 -01	+9.9999596 -01
+1.0000009 +00	+9.9999881 -01
+1.0000016 +00	+1.0000027 +00
+1.0000008 +00	+9.9999919 -01
+9.9999885 -01	+9.9999901 -01
+1.0000009 +00	+1.0000022 +00
+9.9999812 -01	+1.0000014 +00
+1.0000021 +00	+9.9999657 -01
+9.9999766 -01	+9.9999916 -01
	+1.0000004 +00
	+9.9999989 -01
	+9.9999726 -01
	+1.0000008 +00
	+9.9999874 -01
	+1.0000010 +00
	+1.0000005 +00
	+1.0000018 +00

今度は１２元から２０元に進んでも不正確さの進行はみとめられず，両者ともほとんど同じ程度の妥当な解答を与えている．なお前と同じように順次の pivot を次に列挙してみる．消去段階での慢性桁落ちが少しもおこつていないことがよくわかる．

pivot の表

a) 12 元	b) 20 元
+2,4335454 -02	-7,4710629 -01
-1,0619746 +01	+1,3723496 +00
+1,5145449 +00	-4,6116445 -01
-1,1265228 +00	+2,8536451 +00
+6,4591299 +00	+1,0073386 +01
+6,8313018 -01	-7,6851490 -01
-4,1592240 +00	+1,4820407 +00
-1,0936601 +00	+8,0726207 +00
-2,0703513 +01	-4,3707493 +00
-1,5341720 +00	+9,2476287 -01
-1,4870904 +01	+1,3991120 +00
-2,7757835 +00	+5,8029069 +00
	+7,0861664 +00
	-8,5289907 +00
	+3,2427527 +00
	-3,4910717 +00
	-6,0245648 +00
	-3,1803128 +00
	-3,9404967 +00
	-4,9694117 -01

3. おわりになお次のような試みをした．これは消去段階での桁落ちとも関連することであるが，方程式 $AX = C$ の右辺Cにわずかの誤差が入つたとすると解答Xがどう変化するかのしらべである．これが大きく変化すれば A が不良条件であり，さほどでなければ A は良条件のものであるとも見なされるであろう．誤差を正規乱数で入れることにし，標準偏差 10^{-5} の正規乱数を右辺に加えた時の1節 a) と b) との答は次のようになつた．

a)　6 元	b)　9 元
+1.0003724 +00	+2.0964132 +00
+9.9912500 -01	-4.8626446 +00
+1.0008570 +00	+1.6259718 +01
+9.9963680 -01	-2.4254498 +01
+9.9994430 -01	+3.0071909 +01
+1.0001132 +00	-2.2844816 +01
	+1.4614066 +01
	-3.9494359 +00
	+1.8776954 +00

6 元では 10^{-5} 程度の右辺の誤差ではまだ相当合つた答が出ているが
元では全然くずれてしまう．

以上はＡが規則的な場合であるが２節の random な場合につき，同
10^{5} 程度の誤差を入れると１２元については次のようになつた。こ

random 12 元
+9.9998900 -01
+1.0000044 +00
+9.9999060 -01
+9.9999770 -01
+1.0000000 +00
+1.0000193 +00
+9.9999999 -01
+1.0000016 +00
+1.0000081 +00
+9.9998905 -01
+1.0000052 +00
+9.9999297 -01

見ると右辺に入れたと同程度の誤差しか答に
響が及んでいないことがわかり，前の例とは
的である．

以上は直接大次元そのものの例ではないが， a_{ij} がなめらかに推移
場合と，これが全然任意不規則な場合につき，元数をふやして行くと状
どう進行するか，相反する二つの特徴を示したものである．これらが大
を考える場合，何を目安として注目すべきかの一つの手がかりになるな
幸いである．