数理解析研究所講究録
第18巻 1966年 89-98

ある非線形方程式の差分法による解の存在

京大 工　西 田 孝 明

次の方程式を考える．

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(t,x,y,\ldots,z,u)}{\partial x} + \frac{\partial g(t,x,\ldots,z,u)}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial h(t,x,\ldots,z,u)}{\partial z} + \psi(t,x,\ldots,z,u) = 0$$

(2)
$$u(0,x,y,\ldots,z,u) = u_0(x,y,\ldots,z)$$

$t \geqq 0$, $-\infty < x,y,\ldots,z < +\infty$ の初期値問題

空間変数が一次元の場合， f の convexity と ψ の u に関するある増大 order の仮定の下に　O.A.Oueǔhuk (1957 YMH 3-73) が positive type の scheme を用いて詳しく調べている．

空間変数が二次元以上の場合

(3)
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial h(u)}{\partial z} = 0$$

について，E.Conway & J.Smoller (1966 CPAM 95-105) が同じ positive type の scheme を用いて，弱い解の global な存在を示した．その方法を少し詳しく見れば，ψ の u に関する増大 order のある仮定の下に，(1), (2) の弱い解の global な存在がわかる．

弱い解の定義 (空間変数は説明簡単のため (x,y) とする．)

$u(t,x,y) \in L^\infty$ が (1),(2) の弱い解であるとは次が成り立つこと．

$\forall(t,x,y) \in \overset{\circ}{C}{}^1$ に対して，

(4) $$\iiint_{t>0}\left[u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f(t,x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g(t,x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\psi(t,x,y,u)\varphi\right]dtdxdy$$

$$+\iint_{t=0}u_0(x,y)\varphi(0,x,y)\ dxdy=0$$

f, g, ψ, u_0 に関する仮定を述べよう。

$G=\left\{(t,x,y),\quad t\geqq 0,\quad -\infty<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}<+\infty\right\}$, $R^1=(-\infty,+\infty)$ とする

(5) $f,g\in C^2\ (G\times R^1)$, $^\forall v>0$ に対し，次が $G\times\{|u|\leqq v\}$ で有界 f'_x, g'_y, f'_u, g'_u, f''_{xx}, g''_{xx}, f''_{yy}, g''_{yy}, f''_{xu}, g''_{xu}, f''_{yu}, g''_{yu}.

$\psi\in C^2\ (G\times R^1)$, $^\forall v>0$ に対し ψ, ψ'_u, ψ'_x, ψ'_y は $G\times\{|u|\leqq v\}$ で有界 更に ψ の u に関する増大 order は，次を仮定する.

(6) $$\max_G\left\{\frac{\psi}{2}-f_x,\ \frac{\psi}{2}-g_y\right\}\leqq V_1(v),\quad 0\leqq u\leqq v$$

$$\min_G\left\{\frac{\psi}{2}-f_x,\ \frac{\psi}{2}-g_y\right\}\geqq V_2^*(v),\quad 0\geqq u\geqq v$$

とおき，$v\geqq 0$ に対し，$V_2(v)=-V_2^*(-v)$ とおいて，$V_i'(v)\geqq 0$，$v\geqq 0$，$i=1,2$ となるようにした時，

$^\exists\alpha>0$, $^\forall m>0$, $^\forall T>0$ に対し，$^\exists M>0$ して次が成立.

(7)* $$\int_m^M\frac{dv}{2V_i(v)+\alpha}\geqq T\ ,\quad i=1,2.$$

* 条件 (7) が成り立つには，次で充分である.

(8) $$\left(\frac{\psi}{2}-f_x\right)_u<C,\quad\left(\frac{\psi}{2}-g_y\right)_u<C$$

C : 定数 (t,x,y,u に依存しない).

初期値 $u_0(x,y)$ は，Tonelli-Cesariの意味で局所有界変動な有界可測関数.

条件 (7) or (8)と，解が $t \to +\infty$ に対しても存在することとの関係を後で簡単な方程式について調べる.

positive type の scheme　　$h,\ q,\ p > 0$

$$u^k_{n,m} = u(kh, nq, mp), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$\psi({}^k_{n,m}, u^\ell_{\alpha\beta}) = (kh, nq, mp, u(\ell h, \alpha q, \beta p)) \quad \text{とする.}$$

$$(9) \qquad \frac{u^{k+1}_{n,m} - \frac{1}{4}(u^k_{n+1,m} + u^k_{n-1,m} + u^k_{n,m+1} + u^k_{n,m-1})}{h} + \frac{f({}^k_{n+1,m}, u^k_{n+1,m})}{2q}$$
$$- \frac{f({}^k_{n-1,m}, u^k_{n-1,m})}{2q} + \frac{1}{2}\psi({}^k_{n-1,m}, u^k_{n-1,m}) + \frac{g({}^k_{n,m+1}, u^k_{n,m+1})}{2p}$$
$$- \frac{g({}^k_{n,m-1}, u^k_{n,m-1})}{2p} + \frac{1}{2}\psi({}^k_{n,m-1}, u^k_{n,m-1}) = 0$$

$$(10) \qquad u^h(t,x,y) = u^k_{n,m}, \quad \begin{cases} kh \leqq t < (k+1)h \\ nq \leqq x < (n+1)q \\ mp \leqq y < (m+1)p \end{cases}$$

と定めるとき，次が成り立つ。

補題 1.

$0 < h < h_0$ に対し $^\forall K \subset G$ ；有界集合として $\{u^h(t,x,y)\}$ が一様に有界で $L^1(K)$ で compact であるとする。 $h \to 0$ に対し， $u^h(0,x,y) \to u_0(x,y)$ in $L^1_{loc}(R^2)$ が成り立つならば，

$\frac{q^2}{4h} \to 0,\ \frac{p^2}{4h} \to 0$ なるような適当な列を選べば，

$$u^{h_j}(t,x,y) \to u(t,x,y) \quad \text{a.e. in } {}^\forall K$$

かつ，

$$u(t,x,y)$$

は，(1),(2) の弱い解，即ち (4) を充す.

証明

(9) に $\varphi^{k}_{nm} = \varphi(kh,nq,mp)$ をかけて変形する.

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & \frac{\varphi^{k+1}_{nm}u^{k+1}_{nm}-\varphi^{k}_{nm}u^{k}_{nm}}{h} - u^{k+1}_{nm}\cdot\frac{\varphi^{k+1}_{nm}-\varphi^{K}_{nm}}{h} \\
& - \frac{q^2}{4h}u^{k}_{nm}\frac{\varphi^{k}_{n+1,m}-2\varphi^{k}_{nm}+\varphi^{k}_{n-1,m}}{q^2} + \frac{\varphi^{k}_{n+1,m}u^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{nm}u^{k}_{n-1,m}}{4h} \\
& + \frac{\varphi^{k}_{n-1,m}u^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{nm}u^{k}_{n+1,m}}{4h} + \frac{\varphi^{k}_{n+1,m}f({}^{k}_{n+1,m},u^{k}_{n+1,m})-\varphi^{k}_{n-1,m}f({}^{k}_{n-1,m},u^{k}_{n-1,m})}{2q} \\
& - f({}^{k}_{n+1,m},u^{k}_{n+1,m})\frac{\varphi^{k}_{n+1,m}-\varphi^{k}_{nm}}{2q} - f({}^{k}_{n-1,m},u^{k}_{n-1,m})\frac{\varphi^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{n-1,m}}{2q} \\
& - \frac{p^2}{4h}u^{k}_{nm}\frac{\varphi^{k}_{n,m+1}-2\varphi^{k}_{nm}+\varphi^{k}_{n,m-1}}{p^2} + \frac{\varphi^{k}_{n,m+1}u^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{nm}u^{k}_{n,m-1}}{4h} \\
& + \frac{\varphi^{k}_{n,m-1}u^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{nm}u^{k}_{n,m+1}}{4h} + \frac{\varphi^{k}_{n,m+1}g({}^{k}_{n,m+1},u^{k}_{n,m+1})-\varphi^{k}_{n,m-1}g({}^{k}_{n,m-1},u^{k}_{n,m-1})}{2p} \\
& - g({}^{k}_{n,m+1},u^{k}_{n,m+1})\frac{\varphi^{k}_{n,m+1}-\varphi^{k}_{nm}}{2p} - g({}^{k}_{n,m-1},u^{k}_{n,m-1})\frac{\varphi^{k}_{nm}-\varphi^{k}_{n,m-1}}{2p} \\
& + \frac{1}{2}\left\{\psi({}^{k}_{n-1,m},u^{k}_{n,m-1})\varphi^{k}_{nm} + \psi({}^{k}_{n,m-1},u^{k}_{n,m-1})\varphi^{k}_{nm}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

積分式に書くために，これに hqp を乗じて $k = 0,1,2,\ldots,$ $n,m = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ について加え，φ の仮定と，$u^{hj}(t,x,y)$ が $L^1(K)$ で収束することから式(4)を充す.

従つて，初期値を適当に与えて，その scheme による解

$$u^h(t,x,y) = u^k_{n,m}, \quad \begin{array}{l} kh \leqq t < (k+1)h \\ nq \leqq x < (n+1)q \\ mp \leqq y < (m+1)p \end{array}$$

が $^\forall K$ に対し，$L^1(K)$ で compact であることを言えばよい． K は，$\{(t,x,y),\ t \geqq 0,\ -\infty < \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} < +\infty\}$ の有界集合 $L^1(K)$ での compact 性の充分条件としては，階段関係 $\{u^h(t,x,y)\}$ については，次の補題がある．

補題 2. (E. de Giorgi, W.H.Fleming)

$$\sum_{\substack{kh \leqq T \\ |nq| \leqq X \\ |mp| \leqq X}} \left|u^{k+1}_{n,m} - u^k_{n,m}\right| pq + \left|u^k_{n+1,m} - u^k_{n,m}\right| ph + \left|u^k_{n,m+1} - u^k_{n,m}\right| qh \tag{12}$$

$< C$: 定数 $(h,q,p$ に依存しない．)

($^\forall T$, $^\forall X$ に対しては，依存してよい．)

の時には，$^\forall K$ に対し $\{u^h(t,x,y)\}_{0<h<h_0}$ は $L^1(K)$ で compact

結局上の補題の仮定を充すことがわかれば充分であることがわかつた．

補題 3.

$^\forall T > 0$: fix, $0 \leqq t \leqq T$ で $^\exists M$, (7) が成り立つとする．

h, q, p を充分小さくとり，かつ，次が成り立つようにする．

$$\max_{\Omega} |f_u| < \frac{q}{2h}, \quad \max_{\Omega} |g_u| < \frac{p}{2h}, \quad \Omega = G \times (|u| \leqq M) \tag{13}$$

そのとき，$0 \leqq kh \leqq T$ に対し，

(14) $\left|u^0_{n,m}\right| \leqq m$ ならば $\left|u^k_{n,m}\right| \leqq M$ が従う.

証明

(9) を Taylor 展開を用いて書きかえる.

$$u^{k+1}_{n,m} = \frac{1}{4}u^k_{n+1,m}\left(1-\frac{2h}{q}f_u\left(^k_{n+1,m},\xi^k_{n+1,m}\right)\right) + \frac{1}{4}u^k_{n-1,m}\left(1+\frac{2h}{q}f_u\left(^k_{n+1,m},\xi^k_{n+1,m}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{4}u^k_{n,m+1}\left(1-\frac{2h}{p}g_u\left(^k_{n,m+1},\eta^k_{n,m+1}\right)\right) + \frac{1}{4}u^k_{n,m-1}\left(1+\frac{2h}{p}g_u\left(^k_{n,m+1},\eta^k_{n,m+1}\right)\right)$$

$$+h\Big\{-f_x\left(^k_{n-1,m},u^k_{n-1,m}\right) - \frac{\psi}{2}\left(^k_{n-1,m},u^k_{n-1,m}\right) - g_y\left(^k_{n,m-1},u^k_{n,m-1}\right)$$

$$-\frac{\psi}{2}\left(^k_{n,m-1},u^k_{n,m-1}\right) - qf_{xx}(kh,\gamma_n,mp,u^k_{n-1,m}) - pg_{yy}(kh,nq,\kappa_m,u^k_{nm-1})$$

$\xi^k_{n+1,m}$, $\eta^k_{n,m+1}$, γ_n, κ_m は各々間の値.

$$m = M_0,\quad M_k = \max_{n,m}\left\{u^k_{n,m},0\right\},\quad N_k = -\min_{n,m}\left\{u^k_{n,m},0\right\}$$

とおくとき (13) より u の係数が正であることから, $V_i(v)$ の定義 (6) を用いると次が得られる.

$$M_{k+1} \leqq M_k + h(2V_1(M_k)+\alpha)$$

$$N_{k+1} \leqq N_k + h(2V_2(N_k)+\alpha)$$

$$\text{但し}\quad \max_{\Omega}\, q|f_{xx}| + p|g_{yy}| < \alpha$$

そこで, $\frac{dz}{dt} = 2V_i(z)+\alpha$, $i = 1,2$ を考えると $\int_m^M \frac{dz}{2V_i(z)+\alpha} \geqq T$

より $M_k, N_k \leqq M$, $0 \leqq kh \leqq T$ が得られる.

次を定義しよう．

$$
(16)\quad
\begin{cases}
\psi_0 = \max\limits_{\Omega} |\psi_u|, \qquad \psi_1 = \max\{|\psi_x|, |\psi_y|\} \\
F_0 = \max\limits_{\Omega}\{|f_{xu}|, |g_{xu}|, |f_{yu}|, |g_{yu}|\} \\
F_1 = \max\limits_{\Omega}\{|f_{xx}|, |g_{xx}|, |g_{yy}|, |f_{xx}|\}
\end{cases}
$$

更に (13) に共に，次を仮定しよう．

$$
(17)\qquad {}^{\exists}\delta > 0, \quad q \leqq \delta h, \quad p \leqq \delta h
$$

補題 4.

$$
(18)\qquad \sum_{\substack{|nq|\leqq X\\|mp|\leqq X}} \left(|u^k_{n+1,m} - u^k_{n,m}|p + |u^k_{n,m+1} - u^k_{n,m}|q\right)
$$

$$
\leqq \sum_{\substack{|nq|\leqq X+\delta(kh)\\|mp|\leqq X+\delta(kh)}} \left(|u^0_{n+1,m} - u^0_{n,m}|p + |u^0_{n,m+1} - u^0_{n,m}|q\right)\exp(\psi_0+\tfrac{3}{2}F_0)kh
$$

$$
+ kh(2X+2\delta(kh))^2(\psi_1+3F_1)\exp(\psi_0+\tfrac{3}{2}F_0)kh \text{ 。}
$$

証明

$w^k_{n,m} = u^k_{n+1,m} - u^k_{n,m}$, $\quad v^k_{n,m} = u^k_{n,m+1} - u^k_{n,m}$ とおこう． (9)において，

$n = n, n+1$, $\quad m = m, m+1$ として，差をとり，Taylor 展開を用いると次をうる．

$$
\sum_X |w^{k+1}_{n,m}|p + |v^{k+1}_{n,m}|q
$$

$$
\leqq \sum_{\substack{|nq|\leqq X+q\\|mp|\leqq X}} \left(|w^k_{n,m}|p + |v^k_{n,m}|q\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\psi_0}{2}h+\frac{F_0}{2}h\right) + \sum_X \left(|w^k_{n,m}|p + |v^k_{n,m}|q\right)F_0 h
$$

$$
+ \sum_{\substack{|nq|\leqq X\\|mp|\leqq X+p}} \left(|w^k_{n,m}|p + |v^k_{n,m}|q\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\psi_0}{2}h\right) + \sum_X pq(\psi_1+3F_1)
$$

$$
\leqq \cdots \leqq
$$

$$\leqq \sum_{\substack{|nq|\leqq X+(k+1)q\\ |mp|\leqq X+(k+1)p}} (|w^{0}_{n,m}|p+|v^{0}_{n,m}|q)(1+(\psi_0+\frac{3}{2}F_0)h)^{k}$$

$$+(k+1)h(\sum_{\substack{|nq|\leqq X+kp\\ |mp|\leqq X+kp}} pq(\psi_1+3F_1)(1+(\psi_0+\frac{3}{2}F_0)h)^{k-1}$$

q.e.d.

(19) $\bar{\psi} = \max_{\Omega} |\psi(t,x,y,u)|$, $\quad G_0 = \max_{\Omega}\{|f_x|, |g_y|\}$

と書くとき，次が成り立つ.

補題 5.

$q \leqq \delta h, \quad p \leqq \delta h, \quad 0 \leqq \beta h < \alpha h \leqq T$

(20) $$\sum_{X} |u^{\alpha}_{n,m} - u^{\beta}_{n,m}|qp \leqq C(\alpha-\beta)h$$

$$C = \frac{\delta}{2}\Big\{\sum_{X+\delta\alpha h}(|w^{0}_{n,m}|p+|v^{0}_{n,m}|q)+2\alpha h(2X+2\delta\alpha h)^2(\psi_1+3F_1)\Big\}$$

$$\times \exp(\psi_0+\frac{3}{2}F_0)\alpha h+(2X+\delta h)^2(\bar{\psi}+2G_0)$$

証明

(9)より次をうる.

$$\sum_{X} |u^{k+1}_{n,m}| - |u^{k}_{n,m}|qp$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_{\substack{|nq|\leqq X+q\\ |mp|\leqq X}} |w^{k}_{n,m}|qp+\frac{1}{2}\sum_{\substack{|nq|\ X\\ |mp|\ X+p}} |v^{k}_{n,m}|qp+h\sum_{X}(\bar{\psi}+2G_0)qp$$

$$\leqq \frac{\delta h}{2}\sum_{X+\delta h}(|w^{k}_{n,m}|p+|v^{k}_{n,m}|q)+h(2X+\delta h)^2(\bar{\psi}+2G_0)$$

q.e.d.

以上補題 3，4，5. より初期値 $u_0(x,y)$ が有界でそれを L^1_{loc} の意味で近似する階段関数

$$u^0_{n,m} = u^h(0,x,y), \qquad \begin{matrix} nq \leqq x < (n+1)q \\ mp \leqq y < (m+1)p \end{matrix}$$

について $X > 0$ に対し，

$$(21) \qquad \sum_{\substack{|nq|\leqq X \\ |mp|\leqq X}} \left(\left|u^0_{n+1,m} - u^0_{n,m}\right| p + \left|u^0_{n,m+1} - u^0_{n,m}\right| q \right) < C$$

C : indep. of h, q, p

が成り立てば， $u^h(t,x,y)$ は $L^1(K)$, $^\forall K$ で compact だからその適当な部分列は，弱い解に収束する．

上の要求を充す関数が，有界可測な局所的に有界変動 (Tonelli-Cesari の意味で）な関数である．即ち，$(x_1, \ldots, x_n)$ 空間の任意の有界領域 K に対し，その上の測度 0 の集合を N として，関数 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ の x_i に関する全変動 $\qquad i = 1, 2, \ldots, n$

$$v_i(\varphi|K)(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \operatorname*{Var}_{K-N}\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

が存在して， $K \cap R_{n-1}$ で可測，可積分．

$$(22) \qquad \mathrm{Var}\{\varphi(x\ ,\ldots,x\ )|K\} = \sum_i \int_{R_{n-1}\cap K} V_i(\varphi|K)\,dR_{n-1} \quad \text{で定める．}$$

定理

初期値　$u_0(x,y)$ ：有界可測関係で，局所的に Tonelli-Cesari の意味で有界変動とし，f，g，ψ が仮定 5. 6. 7. を充す時，方程式（1）の弱い解が存在する．その解は， t = const. の有界集合上又，G の有界集合上　Tonelli-Cesari の意味の有界変動関数である．

ψ の u に関する増大 order に関する例

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = g(x)u^2 \tag{22}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty \tag{23}$$

$$g(x) \in \mathring{C}^1 \tag{24}$$

このとき (22),(23) は $0 \leqq t < +\infty$ において，弱い解が存在することは，characteristics と差分法を一緒に用いて示される．

最後にこれらの問題と多くの示唆とを与えて下さつた山口，多田 両教授に感謝します．