数理解析研究所講究録
第19巻 1967年 55-69

作用素環のテンソル積における Fubini の定理の応用について

山形大学文理学部　富山　淳

§0. A, B を C^* 代数とし $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ を竹崎 [19]. の意味での α-ノルムによるテンソル積とする. 即ち

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\|_\alpha$$

$$= \sup \frac{\left\langle \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right)^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)^* \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right), \varphi \otimes \psi \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right)^* \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right), \varphi \otimes \psi \right\rangle^{1/2}}$$

ここに sup は A, B 上の state (又は pure state) φ, ψ の全体をわたるものとする. 今 A, B 上の有界な線型汎函数をあらためて φ, ψ とし, これに対して

$$R_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i, \varphi \rangle b_i ,$$

$$L_\psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, \psi \rangle a_i ,$$

と対応を定義すると, α-ノルムの性質より容易にわかる様に, これらは $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ 迄拡大出来て, 夫々 $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ より B 及び A 上への連続な対応を与える ($\|R_\varphi\| \le \|\varphi\|$, $\|L_\psi\| \le \|\psi\|$)。更に任意の $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の元 x に対して次の関係が成立する.

$$\langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle = \langle R_\varphi(x), \psi \rangle$$

これは，A 及び B が可換な時を考えてみればわかる様に，重積分における Fubini の定理の（非可換な場合での）一つの表現であると考えることが出来る．このような対応はテンソル積のノルムが Schatten [13] の意味での λ -ノルムより小さくなければ常に定義出来，上の様な Fubini の定理は一般の Banach 代数のテンソル積にも非常に有用であることが示されている（[9]，[18] 等）．ここでは作用素環のテンソル積の問題においても，方法の一つとしてこれを用いることが有効であることを，主として C^* 代数のテンソル積の型の問題への応用例によつて示すのが，本稿の目的である．

先ず L_ψ，R_φ の基本的な性質の二，三を補題としてのべる．

補題 1. $\{L_\varphi \mid \varphi$ は B の state $\}$ は positive な対応の total family である．i.e.

$$\forall x \in A \underset{\alpha}{\otimes} B\,,\quad x \neq 0 \quad \exists\, B \text{ の state } \varphi\,;\ L_\varphi(x) \neq 0\,.$$

これは φ を B の pure state に限定しても同様である．又 R_φ についても同じことが成立つ．

証明は α -ノルムの性質及び L_φ の定義より明らかである．

補題 2. I を $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の ideal とすると，$\overline{L_\varphi(I)}$ は A の（閉）ideal である．R_φ についても同様．

証明　B が単位元 1 をもつときは，任意の A の元 a について

$$aL_\varphi(x) = L_\varphi(a \otimes 1x),\ L_\varphi(x)a = L_\varphi(xa \otimes 1)$$

が成立するから補題は明らかである．一般の場合には B の approximate identity を用いればよい．

§1. さて上の Fubini の定理の応用として C^* - 代数のテンソル積の型をすべて決定してみよう．現在提唱されている C^* 代数の class に

は次のものがある．

trace が連続な C^* 代数（ Fell [3] ）（⊂ CCR 代数で dual が Hausdorff 空間になるもの）⊂ GTC 代数（ Diximier [2] ）⊂ GCR 代数（ Kaplansky [7] ）．更に GCR 代数の一部分としての CCR 代数（ [7] ）と， non-zero な GCR ideal をもたない代数（ NGCR 代数； Glimm [4] ）がある．最初の二者の定義をのべておこう． A を C^* 代数， $\hat{A}$ を A の dual とした時， A の既約表現 π に対して $\pi(a)$ の trace, Tr $\pi(a)$ は π のユニタリー同値類 $\hat{\pi}$ にのみ関係するから Tr $\pi(a)$ は $\hat{A}$ 上の函数とみることが出来る（以下簡単のために $\hat{\pi}$ と π を同一視して考える）．今

$$\mathcal{P} = \{ a \in A^+ \text{ i.e. } a \geq 0 \mid \mathrm{Tr}\,\pi(a) \text{ が } \hat{A} \text{ 上有限な値の連続函数} \}$$

とおくと， A の自己共役な ideal $\mathfrak{m}(A)$ が存在して $\mathfrak{m}(A)^+ = \mathcal{P}$ となる． $J(A) = \overline{\mathfrak{m}(A)}$ とおき $J(A) = A$ のとき A を trace が連続な C^* 代数という．更に A に閉 ideal の composition series $\{I_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0}$ が存在して， $I_{\alpha+1}/I_\alpha = J(A/I_\alpha)$ となるとき， A を一般化された， trace が連続な C^* 代数一略して GTC 代数という。尚 C^* 代数には Mackey [8] によつて提唱されていた I 型の C^*-代数という class があるが，これは最近の境 [11] の結果により，代数が separable でない時にも GCR 代数と定義が一致することが判明している．そこでこれらの型のテンソル積の問題であるが，それは以下の様になる．

定理 1. (a) A, B が共に trace が連続な C^* 代数 $\rightleftarrows$ $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が trace が連続な C^* 代数

(b) A, B が共に GTC 代数 $\rightleftarrows$ $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が GTC 代数

(c) A, B が共に CCR 代数 $\rightleftarrows$ $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が CCR 代数

(d) A, B が共に GCR 代数 $\rightleftarrows$ $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が GCR 代数

(e) A 又は B が NGCR 代数 $\rightleftarrows$ $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が NGCR 代数

これらについては Wulfsohn [22], [23], Guichardet [5] 等にその一部がみられる. 又前にのべた境 [11] は代数が separableでない時も, GCR 代数と I 型の C^* 代数が一致すること及び NGCR 代数とIII型の factor 表現を十分沢山もつ代数とが同値であることを示しているので, これを用いれば Guichardet が Glimm [4] を用いた様にして (e) を一般に証明することが出来, 又 [22] を合せれば (d) もわかつている結果になるわけであるが, [11] の証明は結局 [4] の結果 (従つてぼう大な議論) を用いるので, この部分についても以下の様な直接の証明は意味があると考えられる.

証明に入る前に, 記号として φ を B (又は A) の state としたとき π_φ を φ による B の表現とし, 表現空間を H_{π_φ} (又は $H\varphi$) とかくことにする. ヒルベルト空間 H での vector state は $\omega_\xi(\xi \in H, \|\xi\| = 1)$ であらわす. 又 E の共役空間を E^* とかく:

補題 3. $\{I_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0}$ を $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の (閉 ideal の) composition series とする. 即ち α は順序数で (i) $I_0 = \{0\}$, $I_{\alpha_0} = A$ (ii) $\{I_\alpha\}$ は増加列で特に α が極限数の時には $I_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha' < \alpha} I_{\alpha'}}$, .

このとき $\Lambda = \{\alpha \mid \overline{L\varphi(I_\alpha)} = J_\Lambda\}$ とし $\{\Lambda\}$ に大小関係を

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 \rightleftarrows \alpha' < \alpha \quad (\alpha' \in \Lambda_1,\ \alpha \in \Lambda_2)$$

と定義すると, この順序で $\{\Lambda\}$ は整列集合となり, $\{J_\Lambda\}$ は A の composition series となる.

証明は容易であるから略する.

補題 4. A_1, B_1 を H_1 上の C^* 代数, A_2, B_2 を H_2 上の C^* 代数とする. 今 $A_1 \underset{\alpha}{\otimes} A_2$, $B_1 \underset{\alpha}{\otimes} B_2$ をヒルベルト空間 $H_1 \otimes H_2$ 上の代数と考えるとき, もし $A_1 \underset{\alpha}{\otimes} A_2 \supset B_1 \underset{\alpha}{\otimes} B_2$ ならば, $A_1 \supset B_1$ 且つ $A_2 \supset B_2$ である.

証明　A_1 に含まれない B_1 の元を a とすると, H_1 上の有界な線型作用素全体のつくる C^* 代数 $B(H_1)$ 上の有界な線型汎函数 ϕ が存在して,

$$<a, \phi> \neq 0 \ , \quad <A_1, \phi> = 0 \ . \qquad \text{よつて}$$

$$\forall \varphi \in B(H_2)^* \ ; \quad <A_1 \underset{\alpha}{\otimes} A_2, \ \phi \underset{\alpha}{\otimes} \varphi> = 0 \ .$$

従つて $< B_1 \underset{\alpha}{\otimes} B_2, \ \phi \otimes \varphi >=0$. しかるに φ は任意で, $<a, \phi> \neq 0$ であるからこれは矛盾である. B_2 についても同様.

C^* 代数 A の既約表現 π が表現空間 H_π 上の完全連続作用素を含む時, π を normal な表現という. これについて上記補題 4. より直ちに

系 π_1, π_2 を夫々 C^* 代数 A, B の既約表現とするとき $\pi_1 \otimes \pi_2$ が normal であることと, π_1 及び π_2 が normal であることとは同値である.

一般に π を $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の H 上への表現とすると, π に関係して常に A, B の H 上への表現 π_1, π_2 がつくれて

$$\pi(a \otimes b) = \pi_1(a)\pi_2(b) = \pi_2(b)\pi_1(a)$$

となる. このとき次のことは未解決である.

問題 I　π が normal な時, π_1, π_2 は (nonzero な) 完全連続作用素を含む表現の ampliation であろうか?

予想としては肯定的であろうと思われる. 以上の準備の下に先ず定理 1. の (d), (e) に関係して次のことを証明する.

定理2.　φ を B の pure state, I を $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の CCR（又は GCR）ideal とすると，$\overline{L_\varphi(I)}$ は A の CCR（又は GCR）ideal である．R_φ についても同様．

証明　$I \neq \{0\}$ で且つ $\overline{L_\varphi(I)} = \{0\}$ の時のみ考えればよい．ϕ を A の pure state とし $\pi_\phi | L_\varphi(I) \neq 0$ とする．このとき任意の $\psi \in \pi_\phi(A)^*$ に対して

$$\langle L_\varphi(I),\ {}^t\pi_\phi(\psi)\rangle = \langle I,\ {}^t\pi_\phi(\psi) \otimes {}^t\pi_\varphi(\varphi')\rangle$$
$$= \langle \pi_\phi \otimes \pi_\varphi(I),\ \psi \otimes \varphi'\rangle = \langle C(H_\phi \otimes H_\varphi),\ \psi \otimes \varphi'\rangle \quad .$$

但し $\varphi = {}^t\pi_\varphi(\varphi')$ とおき I は CCR idealとする．ここで $\pi_\phi \otimes \pi_\varphi(I) = C(H_\phi \otimes H_\varphi) = C(H_\phi) \underset{\alpha}{\otimes} C(H_\varphi)$ と補題4.より $\pi_\phi(A) \supset C(H_\phi)$ が導かれるが，上の等式を用いることにより，更に $\pi_\phi(A)^*$ において

$$\pi_\phi(\overline{L_\varphi(I)}) \text{ の polar} = C(H_\phi) \text{ の polar}$$

故に $\pi_\phi(\overline{L_\varphi(I)}) = C(H_\phi)$　i.e.　$\overline{L_\varphi(I)}$ は CCR idealである．次に I が GCR idealの時は，I を定義する composition series を $\{I_\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0}$ とすると，補題3.の証明と同様な考えで，これより $\overline{L_\varphi(I)}$ の composition series $\{J_\Lambda\}_{0 \leq \Lambda \leq \Lambda_0}$ がみちびかれる。この時上の証明を少し修正すれば $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ が CCR 代数であることより，$J_{\Lambda+1}/J_\Lambda$ が CCR 代数であることが帰結出来る．

定理1.の (c) の証明

A, B が共に CCR 代数ならば I 型であるから [22; 定理4] により $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の dual $\widehat{A \underset{\alpha}{\otimes} B}$ は $\hat{A} \times \hat{B}$ と位相空間として同一視出来る．よつて $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ は又 CCR 代数である．逆は補題4.による．

(d), (e) の証明

A, B が GCR 代数の時 $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が又 GCR 代数となることは [23] に直接の証明が示されているが，前述の如く [11]，[22] を合せても，又 [12] とを合せてもわかるわけである．次に A 又は B の一方が NGCR 代数であるとすると，前定理から $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ は non-zero な GCR ideal を持ち得ない．よつて $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ は NGCR 代数である．逆は最初にのべた GCR 代数の積の話より出る．最後に $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ が GCR 代数であるとすると，もし A が GCR 代数でなければ [7] により A に proper な GCR ideal K が存在して A/K は NGCR 代数となる．よつて $A/K \underset{\alpha}{\otimes} B$ は NGCR 代数，一方これは $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の homomorphic image であるから GCR 代数であり矛盾となる．B についても同様である．

(a) の証明

→) 向きの証明は，このとき $\widehat{A \underset{\alpha}{\otimes} B} \approx \hat{A} \times \hat{B}$ であるから（[22; 定理 4]）殆んど明らかである．逆は次の補題より示される．

補題 5. A 又は B が GCR 代数，φ を B の pure state とすると，$L_\varphi(J(A \underset{\alpha}{\otimes} B)) \subset J(A)$．$R_\varphi$ についても同様である．

証明 $L_\varphi(m(A \underset{\alpha}{\otimes} B)^+) \subset m(A)^+$ を示せばよい．ψ を A の pure state，$\{\zeta_L\}$ を H_ψ の cnos．又 $\{\eta_K\}$ を H_φ の cnos．とする．但し $\{\eta_K\}$ は $= {}^t\pi_\varphi(\omega_{\eta_0})$ となるようにとつておく．

$$\forall \mathfrak{a} \in m(A \underset{\alpha}{\otimes} B)^+ ;\ t_r(\pi_\psi \otimes \pi_\varphi(\mathfrak{a}))$$

$$= \sum_{L,K} (\pi_\psi \times \pi_\varphi(\mathfrak{a})\zeta_L \otimes \eta_K ,\ \zeta_L \otimes \eta_K) < \infty$$

よつて

$$t_r(\pi_\psi \otimes \pi_\varphi(\mathfrak{a})) = \sum_{K}\sum_{L} (\pi_\psi \otimes \pi_\varphi(\mathfrak{a})\zeta_L \otimes \eta_K ,\ \zeta_L \otimes \eta_K)$$

$$= \sum_{K}\sum_{L} < \mathfrak{a} ,\ {}^t\pi_\psi(\omega_{\zeta_L}) \otimes {}^t\pi_\varphi(\omega_{\eta_K}) >$$

$$= \sum_{K}\sum_{L} \langle L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a),\ t_{\pi_{\psi}}(\omega_{\zeta_L}) \rangle$$

$$= \sum_{K}\sum_{L} (\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a))\zeta_L,\ \zeta_L) = \sum_{K} t_r(\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a)))$$

従つて

$$t_r(\pi_{\psi}(L_{\varphi}(a))) = t_r\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_0})}(a))$$

$$= t_r(\pi_{\psi}\otimes\pi_{\varphi}(a)) - \sum_{K\neq 0} t_r(\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a)))$$

今 π_{ψ} を変数として考えると，右辺の第一項は仮定より連続，又 $t_r(\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a)))$ は常に下半連続（[1]）であるから $\sum_{K\neq 0} t_r(\pi_{\psi}(L\, t_{\pi_{\varphi}(\omega_{n_K})}(a)))$ は（有限な値で且つ）下半連続となり，結局 $t_r(\pi_{\psi}(L_{\varphi}(a)))$ は $\hat{A}$ 上有限連続になる．即ち $L_{\varphi}(a) \in m(A)^{+}$

(b) の証明

→）向きの概略をのべる（[23]）．$\{I_{\alpha}\}_{0\leq\alpha\leq\alpha_0}$ ，$\{J_{\beta}\}_{0\leq\beta\leq\beta_0}$ を夫々 A, B の canonical な composition series とする．今

$$E_{(\alpha,\ \beta)} = \bigcup_{(\alpha',\ \beta') \leq (\alpha,\ \beta)} \hat{I}_{\alpha'} \times \hat{J}_{\beta'}$$

とおくと（順序は辞書式順序を考える）$E_{(\alpha,\ \beta)}$ は $\hat{A}\times\hat{B}$ の開集合の増大列であり，従つて（A, B が GCR 代数なので）$A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の dual のそれである．更にこの $\{E_{(\alpha,\ \beta)}\}$ は [2] に示された GTC 代数となるための必要十分条件である次の三つの条件をみたしている．

(i) $E_{(0,\ 0)} = \phi$ ，$E_{(\alpha_0,\ \beta_0)} = \hat{A}\times\hat{B}$

(ii) $(\alpha,\ \beta)$ が極限数の時は $E_{(\alpha,\beta)} = \bigcup_{(\alpha',\beta')<(\alpha,\beta)} E_{(\alpha',\beta')}$

(iii) $E_{(\alpha,\beta+1)} - E_{(\alpha,\beta)}$ の各点は $\hat{A}\times\hat{B} - E_{(\alpha,\beta)}$ の中で閉近傍の基本列をもつ．

次に $A\underset{\alpha}{\otimes}B$ を GTC 代数とし，$\{I_\alpha\}_{0\le\alpha\le\alpha_0}$ をその canonical な composition series とする．φ を B の pure state とし，補題 3. による L_φ によつて $\{I_\alpha\}$ より A に写された composition series を $\{J_\beta\}_{0\le\beta\le\beta_0}$ とおく．$\hat{A}$ の中で $\{\hat{J}_\beta\}_{0\le\beta\le\beta_0}$ を考えると，つくり方からこれが上記の条件の (i) (ii) をみたしていることは明らかである．

$\pi_0\in\hat{J}_{\beta+1} - \hat{J}_\beta$ をとる．$\overline{L_\varphi(I_\alpha)} = J_{\beta+1}$ となる α の中で最小のものを改めて α とすると，α は極限数となり得ないから $\alpha = \alpha_0+1$ とおくと，$\overline{L_\varphi(I_{\alpha_0})} = J_\beta$．ここで $\forall\zeta\in H_{\pi_0}$ ($\|\zeta\|=1$) をとると今迄と同様な計算で（但し $\varphi = {}^t\pi_\varphi(\omega_{\zeta_0})$ ），

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle\pi_0(L_\varphi(I_{\alpha_0})),\ \omega_\zeta\rangle \\
&= \langle\pi_0\otimes\pi_\varphi(I_{\alpha_0}),\ \omega_\zeta\otimes\omega_{\eta_0}\rangle \\
&= \langle\pi_0\otimes\pi_\varphi(I_{\alpha_0}),\ \omega_{\zeta\otimes\eta_0}\rangle
\end{aligned}
$$

$\pi_0\otimes\pi_\varphi$ は既約表現だから，これより $\pi_0\otimes\pi_\varphi(I_{\alpha_0}) = 0$．

同様に $\pi_0(J_{\beta+1}) \neq 0$ より $\pi_0\otimes\pi_\varphi(I_{\alpha_0+1}) \neq 0$．よつて $\pi_0\otimes\pi_\varphi \in \hat{I}_{\alpha_0+1} - \hat{I}_{\alpha_0}$．ここで GTC 代数は GCR 代数であるから (a) の証明の時と同様に $\widehat{A\underset{\alpha}{\otimes}B}$ は $\hat{A}\times\hat{B}$ と同一視出来る．そこで U を π_0 の $\hat{A}$ での開近傍，V を π_φ の一つの開近傍とすると，$A\underset{\alpha}{\otimes}B$ が GTC であることから，前条件 (iii) により $\pi_0\otimes\pi_\varphi$ の開近傍 W（$\subset U\times V$ としてよい）が存在して

$$\overline{W\cap(\hat{A}\times\hat{B} - \hat{I}_{\alpha_0})} \subset U\times V\cap(\hat{A}\times\hat{B} - I_{\alpha_0})$$

更にこの W に対して π_0, π_φ の開近傍 U_1, V_1 が存在して $U_1\times V_1\subset W$.
この時つくり方から

$$\overline{\mathfrak{U}_1 \cap (\hat{A} - \hat{J}_\beta)} \subset \mathfrak{U} \cap (\hat{A} - \hat{J}_\beta) .$$

従つて A は GTC 代数である．B についても同様．

§2．ここで定理 1.の構成について少し吟味してみよう．先ず K, K_1, K_2 を夫々 $A \underset{\alpha}{\otimes} B$, A, B の最大の GCR ideal ([7]) とするとき，これらの間にどんな関係があるであろうか？もし一般に $K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2 = K$ となるのであれば定理 1.の (d), (e) の背景がはつきりするわけであるが，今の所これは次の形でしかわかつていない．

定理 3. A 又は B のいずれかが竹崎 [15] の意味でのテンソル積のノルムの一意性の性質（性質 (T) ）をもつならば $K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2 = K$ ．

証明 (1) $K_1 = A$ のとき（$K_2 = B$ の時も同様）．今 $K \supsetneqq K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2$ とすると，$A \underset{\alpha}{\otimes} B$ の既約表現 π が存在して $\pi(K) \neq 0$, $\pi(K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2) = 0$ ．ここで A が GCR 代数であることから，A, B の pure state φ, ψ が存在して $\pi \cong \pi_\varphi \otimes \pi_\psi$ （ユニタリ同値）．

$$\langle K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2 , \varphi \otimes \psi \rangle = \langle A \otimes K_2 , \varphi \otimes \psi \rangle = 0 \quad \text{より} \quad \langle K_2 , \psi \rangle = 0 .$$

一方

$$\langle K , \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_\varphi(K) , \psi \rangle \neq 0 .$$

定理 2.より $R_\varphi(K) \subset K_2$ だから，これは矛盾である．

(2) $K_1 \neq A$, 且つ $K_2 \neq B$ の時．A が性質 (T) をもつものとする．$A \underset{\nu}{\otimes} B$ で A, B の ν-ノルムによるテンソル積 ([6]) を示すと，先ず $A \underset{\nu}{\otimes} B/K_2 = A \underset{\alpha}{\otimes} B/u_2$ が NGCR 代数であることより，その核 $A \underset{\nu}{\otimes} K_2 = A \underset{\alpha}{\otimes} K_2$ は K を含む．次に $A/K_1 \underset{\nu}{\otimes} K_2 = A/K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2$ が NGCR 代数であることより $K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2 \supset K$ $\therefore K_1 \underset{\alpha}{\otimes} K_2 = K$.

(ν -ノルムのテンソル積については I, J を夫々 A, B の閉 ideal とした時，対応

$$A \underset{\nu}{\otimes} B \rightarrow A/I \underset{\nu}{\otimes} B/J$$

の核は，$A\underset{\nu}{\otimes}J + I\underset{\nu}{\otimes}B$ で与えられる．α-ノルムについては，このことが常に成立するかどうかわかつていない）．

ideal $J(A)$ については，もし $A\underset{\alpha}{\otimes}B$ で $K = K_1 \otimes K_2$ となつているならば， $J(A)\underset{\alpha}{\otimes}J(B) = J(A\underset{\alpha}{\otimes}B)$ となる．証明は補題 5.を用いて定理 3.の(1)のようにやればよい。

問題 II．$A\underset{\alpha}{\otimes}B$ で常に $K_1\underset{\alpha}{\otimes}K_2 = K$?

§3 定理 1.は一般の C^* 代数のテンソル積の compatible norm β ([15]) については次のようになる．先ず (a) ～ (d) の →) 向きは GCR 代数は compatible ノルムが一意（α-ノルムのみ）であるから問題にならない．(d) の ←) 向きは $A\underset{\beta}{\otimes}B$ を GCR 代数とすると，α-ノルムは compatible ノルムの中で最小 ([15]) であるから，$A\underset{\alpha}{\otimes}B$ は $A\underset{\beta}{\otimes}B$ の homomorphic image となり GCR 代数，従つて A 及び B は又 GCR 代数となり成立する．(a) ～ (c) の ←) 向きもこれより明らかである．(e) については $A\underset{\beta}{\otimes}B$ が NGCR 代数とすると，もし A も B も NGCR 代数でなければ non-zero な GCR ideal K_1，K_2 が存在して $K_1\underset{\nu}{\otimes}K_2 \subset A\underset{\nu}{\otimes}B$．よつて $A\underset{\nu}{\otimes}B$ より $A\underset{\beta}{\otimes}B$ への canonical な対応による $K_1\underset{\nu}{\otimes}K_2$ $(= K_1\underset{\alpha}{\otimes}K_2)$ の像は $A\underset{\beta}{\otimes}B$ の non-zero な GCR ideal となり矛盾を起す．即ち (e) の ←) 向きはそのまま成立つ．しかし (e) の →) 向きだけは compatible なノルムについて成立するかどうかわかつていない．これは表現を変えれば次の様な問題である．

問題 III ν-ノルムのテンソル積 $A\underset{\nu}{\otimes}B$ より α-ノルムのテンソル積 $A\underset{\alpha}{\otimes}B$ への canonical な対応の核は NGCR 代数であるか？

§4. 最後に von Neumann 代数のテンソル積における Fubini の定

理について簡単にふれておく．M, N を von Neumann 代数とし，$M\otimes N$ をその von Neumann 代数としてのテンソル積とする．

今 $\varphi\in M_*$, $\psi\in N_*$ に対して

$$R_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \varphi\rangle y_i ,$$

$$L_\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, \psi\rangle x_i$$

と前の C^* 代数の時のように定義すると，これは容易にわかる様に $M\otimes N$ 迄拡大出来て σ-weakly に連続な対応

$$R_\varphi : M\otimes N \to N, \quad L_\psi : M\otimes N \to M$$

を induce する．この時補題 1.と平行に次のことが成立する．

補題 1' $\{L_\varphi | \varphi\in N_*\}$, $\{R_\psi | \psi\in M_*\}$ は夫々 $M\otimes N$ より M 及び N への σ-weakly に連続な (onto) 対応の total family であり，これは φ, ψ を夫々 N, M 上の normal state 全体に制限しても同様である．更に任意の $M\otimes N$ の元 x について

$$\langle x, \psi\otimes\varphi\rangle = \langle L_\varphi(x), \psi\rangle = \langle R_\psi(x), \varphi\rangle .$$

この結果の応用は既に竹崎 [14] においてみられる．今 $\tilde{L}_\varphi(x) = L_\varphi(x)\otimes 1$ とおくと，$\{\tilde{L}_\varphi | \varphi$ は N の normal state$\}$ は $M\otimes N$ より $M\otimes 1$ への σ-weakly に連続な Banach 空間としてのノルムが 1 の projection の total family になつている．($1\otimes N$ についても同様)．ところがこのような対応は型の大きな von Neumann 代数より小さな型の von Neumann 代数へのみ存在するのであつて（境 [10]，富山 [17] ）これがいわば von Neumann 代数のテンソル積の型のきまり方の背景なのである．尚 M, N を夫々ヒルベルト空間 H, K 上作用するものとすると

き， Fubini の定理を $M\otimes N$ を超えて $B(H)\otimes B(K)$ の中で考えることも出来る．この時勿論定義から明らかなように，任意の $\varphi\in B(K)_*$，$\psi\in B(H)_*$ について $L_\varphi(M\otimes N)\subset M$，$R_\psi(M\otimes N)\subset N$．ここで $M\otimes N$ に対する commutation theorem の代りとして次の結果は有用である．

任意の $\varphi\in B(K)_*$，$\varphi\in B(H)_*$ について

$$L_\varphi((M\otimes N)')\subset M' , \quad R_\psi((M\otimes N)')\subset N' .$$

一般に $M\otimes N$ を含む von Neumann 代数 M_0 が任意の $\varphi\in B(K)_*$, $\varphi\in B(H)_*$ について

$$L_\varphi(M_0)\subset M , \quad R_\psi(M_0)\subset N ,$$

をみたす時，$M\otimes N$ とどんな関係にあるかは興味ある問題であるが，現在の所何もわかつていない．

文　　献

1. J. Dixmier; Point séparés dans le spectre d'une C*-algèbre, Acta Sc. Math., 22(1961), 115--128.
2. ______; Traces sur les C*-algèbres, Ann. Inst. Fourier, 13 (1963), 219--262.
3. J. M. G. Fell; The structure of algebras of operator fields, Acta Math., 106 (1961), 233--280.
4. J. Glimm; Type I C*-algebras, Ann. Math., 73 (1961), 572--612.
5. A. Guichardet; Caractères et représentations de produits tensoriels de C*-algèbres, Ann. Ecole Norm. Sup., 81 (1964), 189--206.

6. A. Guichardet; Sur les produits tensoriels de C*-algèbres, Doklady Akad. Nauk, 160 (1965), 986--989 (Russian).

7. I. Kaplansky; The structure of certain operator algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 219--255.

8. G. W. Mackey; Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 134--165.

9. N. Mochizuki; The tensor product of function algebras, Tôhoku Math. J., 17 (1965), 139--146.

10. S. Sakai; On topological properties of W*-algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 439--444.

11. _____; On a characterization of type I C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 508--512.

12. _____; On type I C*-algebras (to appear)

13. R. Schatten; Theory of cross-spaces, Princeton (1950).

14. M. Takesaki; On the direct product of W*-factors, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 116--119.

15. _____; On the cross norm of the direct product of C*-algebras, ibid., 16 (1964), 111--122.

16. _____; C*-algebra のテンソル積とその表現 数理解析研究所講究録

17. J. Tomiyama; On the profection of norm one in W*-algebras III, Tôhoku Math. J., 11 (1957), 125--129.

18. _____; Tensor product of commutative Banach algebras, ibid., 12 (1960), 147--154.

19. T. Turumaru; On the direct product of operator algebras, ibid., 4 (1952), 242--251.

20. _____; _____ II, ibid., 5 (1953), 1--7.

21. _____; _____ III, ibid., 6 (1954), 208--211.

22. A. Wulfsohn; Produit tensoriel de C*-algèbres, Bull. Sci. Math., 87 (1963), 13--27.

23. _____; Le produit tensoriel de certaines C*-algebres, C. R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 6052--6054.