数理解析研究所講究録
第 19 巻 1967 年 89-100

統計力学的平衡状態とC^*-代数の状態の分解

京都大学理学部　宮田英男

ここでは以下の論文に述べてあることの主要な部分を紹介する。

[1] S. Doplicher　D. Kastler　D. W. Robinson

Covariance Algebra in Field Theory and Statistical Mechanics

Communication in Mathematical Physics 3 (1966

[2] D. Ruelle

States of Physical System　〃　3 (1966)

[3] D. Kastler　D. W. Robinson

Invariant State in Statistical Mechanics　〃　3 (1966)

[4] D. W. Robinson　D. Ruelle

Extremal Invariant State　〃　to appear

これらの論文では場の理論及び統計力学の代数的定式化に立って、観測可能量のなすC^*-代数の上の状態(state)として与えられる物理的状態について考察したもので、空間的広がりを記述するため、その平行移動に対応するalgebraのautomorphismを導入し、それらによって値を変えないような状態(invariant state)つまり空間的に一様な状態を考え、それらを特別な性質を持つ状態に分解することを考える。それでここでの議論の中心は§2の「分解定理I」および§3の「分解定理II」である。

§1　invariant stateと表現

定義1. ・$\mathfrak{A}$：C^*-algebra（局所観測可能量から生成されるC^*-algebra）

・T：局所コンパクト・アーベル群（平行移動の群）コンパクトでないとする。

かつ$\mathfrak{A}$のautomorphismとしてhomomorphicに表現される。

$$A \in \mathfrak{A} \xrightarrow{x \in T} A(x) \in \mathfrak{A}$$

が与えられて A が連続とは $x \to x_0 \Rightarrow \|A(x) - A\| \to 0$ $\forall A \in \mathfrak{A}$ が与えられて A が連続とは

・E : states on $\mathfrak{A}$（ノルム1の正値線形汎函数）

・τ_x $x \in T$: $\rho \in E \xrightarrow{\tau_x} \tau_x \rho \in E$ 　　$\tau_x\rho(A) \equiv \rho(A(x))$

・$E \cap I_T$: T-invariant states $\subset E$ 　　$\rho \in E \cap I_T \Leftrightarrow \tau_x \rho = \rho$ $\forall x \in T$

注意 ― $\mathfrak{A}$ には少くとも近似単位元があるものとする。

定義2. 任意の $\mathfrak{A}$ の元２つ A, B を取ったときに

$x \longrightarrow \infty$ に対し $\|[A(x), B]\| \to 0$ が成り立つとき

$\mathfrak{A}$ を asymptotically abelian algebra という。

― これら以外に[1],[3]において補助的に次のような algebra $\mathfrak{A}_1^T$ が導入されている。

$$\mathfrak{A}_1^T = \{ X \,;\ x \in T \xrightarrow{X} X_x \in \mathfrak{A} \ \text{measurable} \quad \|X\|_1 \equiv \int \|X_u\|\,du < \infty \}$$

（ここで measurable とは任意の compact $K \subset T$ と $\varepsilon > 0$ に対し measure$(K - K')$ $< \varepsilon$ となる compact $K' \subset K$ が存在して K' の上では X_x が連続であるときを言う。この時は $x \longrightarrow \|X_x\|$ は可測になる。）

。積　$X * Y$: $(X*Y)_x = \int X_u\, Y_{x-u}(u)\,du$

。対合　X^* : $(X^*)_x = \{X_{-x}(x)\}^*$

のように定めれば $\|X * Y\|_1 \leq \|X\|_1 \cdot \|Y\|_1$ 　$\|X^*\|_1 = \|X\|_1$ が成り立つので $\mathfrak{A}_1^T$ は normed*-algebra になる。（完備であることもいえる。）

・$\mathfrak{A}$ に近似単位元 A_μ があると $\varepsilon_\nu(x)$ を T における 0 の近傍 ν の上だけで 0 でない値を持つ L_1 ノルム１のスカラー函数とすれば $E_\lambda = A_\mu \varepsilon_\nu \in \mathfrak{A}_1^T$: $(A_\mu \varepsilon_\nu)_x = A_\mu \varepsilon_\nu(x)$ は $\mathfrak{A}_1^T$ における近似単位元になる。

・また $\mathfrak{A}_1^T$ は $\|X\| \equiv \sup\limits_{\tilde{\pi} \in \{\mathfrak{A}_1^T \text{の表現}\}} \|\tilde{\pi}(X)\|$ がノルムの性質をみたし $\|X^* * X\| = \|X\|^2$ が成り立つことから、このノルムで非完備 C^*-algebra となる。

さて $\varphi \in E \cap I_T$ が与えられた時 Gel'fand Segal construction により ヒルベルト空間 H_φ、その上の $\mathfrak{A}$ の表現 π、T のユニタリ-表現 U、cyclic vector [illegible] $\Omega \in H_\phi$ が与えられて $A \in \mathfrak{A}$ $x \in T$ に対し $\pi(A)\Omega$ は H_ϕ で dense で [illegible] H_ϕ が与え

$\Phi(A) = (\Omega|\pi(A)|\Omega) \equiv (\pi(A)\Omega, \Omega)$ と書けて

$\pi(A(x)) = U(x)\pi(A)U(x)^{-1}$ $\quad U(x)\Omega = \Omega$ が成り立つ

同様に $\mathfrak{A}^T_1$ 上の state に対しても表現 $\hat{\pi}$ を構成できる。

また一般の先に essential な $(\mathfrak{A}, T)$ の表現 (π, U) と $\mathfrak{A}^T_1$ の表現 $\hat{\pi}$ の間には一対一対応があるので下のような関係がつく。

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\Phi \in E \cap L_T} \arrow[r, shift left, "①"] \arrow[d, shift left, "⑦"] & \boxed{\text{表現 } \pi(\mathfrak{A}),\ \text{ユニタリー表現 } U(T)\quad \text{cyclic } \Omega \in H} \arrow[l, shift left, "②"] \arrow[d, shift left, "⑤"] \\
\boxed{\hat{\Phi}\quad \text{state on } \mathfrak{A}^T_1} \arrow[r, shift left, "③"] \arrow[u, shift left, "⑧"] & \boxed{\text{表現 } \hat{\pi}(\mathfrak{A}^T_1)\quad \text{cyclic } \Omega \in H} \arrow[l, shift left, "④"] \arrow[u, shift left, "⑥"]
\end{tikzcd}
$$

①③ Gel'fand Segal construction

② $\Phi(A) = (\Omega|\pi(A)|\Omega)$ $\qquad$ ④ $\hat{\Phi}(X) = (\Omega|\hat{\pi}(X)|\Omega)$

⑤ $\hat{\pi}(X) = \int \pi(X_x) U(x)\, dx$

⑥ $\pi(A) = \text{strong} \lim\limits_{\lambda} \hat{\pi}(\rho(A, E_\lambda))$ $\qquad$ $(\rho(A)X)_y = AX_y$

$U(x) = \text{strong} \lim\limits_{\lambda} \hat{\pi}(V(x)E_\lambda)$ $\qquad$ $(V(x)X)_y = X_{y-x}(x)$

⑦ $\hat{\Phi}(X) = \int \Phi(X_u)\, du$ $\qquad$ ⑧ $\Phi(A) = \lim\limits_{\lambda} \hat{\Phi}(\rho(A)E_\lambda)$

equivalent な表現を同一視すれば一意的に一つから他を作り得る。

これらについて表現の既約性に関する次のような性質の同値関係がある。

<u>定理1</u> $\mathfrak{A}$ を asymptotically abelian algebra とし、上の対応関係のもとで

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\Phi :\ \text{weakly clustering}} \arrow[r, leftrightarrow, "5."] & \boxed{\Omega :\ \text{only invariant vector}} \arrow[d, shift left, "4."] \\
\boxed{\Phi :\ \text{extremal in } E \cap L_T} \arrow[d, leftrightarrow, "2."] & \boxed{\pi(\mathfrak{A}) \cup U(T) :\ \text{既約}} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "6."] \arrow[d, leftrightarrow, "3."] \\
\boxed{\hat{\Phi} :\ \text{pure or extremal}} \arrow[r, leftrightarrow, "1."] & \boxed{\hat{\pi}(\mathfrak{A}^T_1) :\ \text{既約}}
\end{tikzcd}
$$

の全部が同値になる。但し asympt. abelian は 6. を証明する時にだけ必要で上の二つと下の四つはそうでなくても同値で、かつ 4. が成立する。

さて weakly clustering state とは以下のような性質を持つものである。

平均の操作 $h \longrightarrow h_i \equiv \lim_{\alpha} M_\alpha h \equiv \lim_{\alpha} \int f_\alpha(x) h(x)\, dx$ f_α としては

i) $f_\alpha(x) \geqq 0$ T で定義された正のスカラー可測函数

ii) $\int dx\, f_\alpha(x) = 1$

iii) $\lim_{\alpha} \int dx\, |f_\alpha(x) - f_\alpha(x+y)| = 0 \quad {}^\forall y \in T$

を定義した場合 $\Phi \in E$ が任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して

$\lim_{\alpha} \int dx\, f_\alpha(x) \{\Phi(A(x)B) - \Phi(A(x))\Phi(B)\} = 0$ を満たすとき Φ を weakly clustering

と呼ぶ。これに対して strongly clustering state とは

$\lim_{x \to \infty} \{\Phi(A(x)B) - \Phi(A(x))\Phi(B)\} = 0$ をみたす $\Phi \in E$ を言う。

また invariant vector とは T-不変 vector 即ち $U(x)\varphi = \varphi \quad {}^\forall x \in T$ をみたす φ を

いい、それのなす線形部分空間への射影を $E(0)$ と書く。

証明） 1. 有名なので略

2. 対応式 ⑦ ⑧ よりわかる。

3. 対応式 ⑤ ⑥ より $(\pi(\mathfrak{A}) \cup U(T))' = \hat{\pi}(\mathfrak{A}^T_{\imath})'$

4. $C \in (\pi(\mathfrak{A}) \cup U(T))'$ とすれば $U(x) C\Omega = C U(x) \Omega = C\Omega$ より $C\Omega$ も

invariant vector。それが一次元である事から $C\Omega = c\Omega$ c はスカラー

故に $C\pi(A)\Omega = \pi(A) C\Omega = c\pi(A)\Omega$ for ${}^\forall A \in \mathfrak{A}$。ところが Ω は cyclic

であるから $C = c$ でなくてはならない。

次の証明のために補題を挙げる。

<u>補題 1.</u> $\lim_{\alpha} \int f_\alpha(x) (\varphi | U(-x) - E(0) | \psi)\, dx = 0$ $U(-x)$ の代りに $U(x)$ でも同じ

∵) $(\varphi| = (\chi|(1 - U(y)) \quad y \neq 0$ のときは $\left| \int dx\, f_\alpha(x) (\chi|(1 - U(y))(U(-x) - E(0))|\psi) \right|$

$= \left| \int dx\, f_\alpha(x) (\chi | U(-x) - U(-x+y) | \psi) \right| = \left| \int dx\, (f_\alpha(x) - f_\alpha(x-y)) (\chi | U(-x) | \psi) \right|$

$\leqq \int dx\, |f_\alpha(x) - f_\alpha(x-y)| \cdot |(\chi | U(-x) | \psi)| \leqq \int dx\, |f_\alpha(x) - f_\alpha(x-y)| \cdot \|\chi\| \cdot \|\psi\| \xrightarrow{\alpha} 0$

また $(\varphi| = (\varphi|E(0)$ の場合は明らかに成り立つ。

$M \equiv \{(1-U(y))\chi\ ;\ \chi \in H\ \ y \in T\}$ 及び $E(0)H$ の元に対しては証明された。ところが $M^{\perp}$ = invariant vector = $E(0)H$ であるから $H = \bar{M} \cup E(0)H$。$\bar{M}$ の元は M の元の有限個の一次結合でノルム近似できる。故に H に対しても成立つ。」

<u>補題 2.</u>　$\mathfrak{A}$ が asymptotically abelian であれば、$E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)$ は abelian。

∵) asympt. abelian より $(\psi|E(0)[\pi(A(x)),\pi(B)]E(0)|\varphi) \xrightarrow{x\to\infty} 0$

故に $\lim_{\alpha}\int f_{\alpha}(x)(\psi|E(0)[\pi(A(x)),\pi(B)]E(0)|\varphi)\,dx = 0$ (f_{α} の性質 iii) よりわかる)

$\pi(A(x)) = U(x)\pi(A)U(-x)$　　$U(x)E(0) = E(0)U(x) = E(0)$　及び補題 1. より

$$(\psi|E(0)\pi(A)E(0)\pi(B)E(0)|\varphi) - (\psi|E(0)\pi(B)E(0)\pi(A)E(0)|\varphi) = 0$$ 」

5. weakly clustering の性質を書きかえると、(Ωへの射影を E_{Ω} と書く)

$$\lim_{\alpha}\int dx\, f_{\alpha}(x)\,(\Omega|\pi(A)(U(-x)-E_{\Omega})\pi(B)|\Omega) = 0 \qquad (E_{\Omega} = |\Omega)(\Omega|)$$

となるが $(\Omega|\pi(A)$ 及び $\pi(B)|\Omega)$ は H で dense であるから、補題1. によりこの性質と $E_{\Omega} = E(0)$ つまり Ω が only invariant vector である事とは同値である。

6. $\pi(\mathfrak{A}) \cup U(T)$ 既約であるとする。H が一次元で $\pi = 0$ の場合は trivial だから除くと、0でない $\forall\varphi \in E(0)H$ をとれば $\pi(\mathfrak{A})\varphi$ は $\pi(\mathfrak{A}) \cup U(T)$ 不変だから H で密で $E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)\varphi = E(0)\pi(\mathfrak{A})\varphi$ は $E(0)H$ で密になる。故に $E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)$ は $E(0)H$ 上の表現として既約である。ところが $\mathfrak{A}$ が asympt. abelian であれば補題 2 より $E(0)\pi(A)E(0)$ は abelian であるから、$E(0)H$ が一次元よりあり得ない。

定理 1. 証明終

§2. invariant state の分解

$E \cap \mathfrak{F}$ の extremal point の集合を $\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{F})$ と書けば、定理 1. より $\mathfrak{A}$ が asympt. abelian であれば <u>$\rho \in \mathcal{E}(E\cap\mathfrak{F})$</u> は <u>$\rho$ が weakly clustering state</u> である事を意味する。一般の invariant state をこのような state の和として分解する事を考える。

$\boxed{\text{分解定理 I}}$ (定義 1. のもとで) $\mathfrak{A}$ を asympt. abelian algebra とするとき、

$\phi \in E \cap \mathfrak{F}$ は以下の<u>条件 1' あるいは 2'</u> があれば $\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{F})$

に属する状態の和として分解できる。

<u>条件1.</u>　$\mathfrak{A}$: 可分　H_Φ : 可分

これは[3]における証明のやり方で、この時には J. Dixmier　*Les C*-algèbres et leur représentation* にある以下の定理を利用する。

(8.5.2) H を可分ヒルベルト空間、$\hat{\pi}$ をその上の可分 C^*-algebra $\mathfrak{A}_T$ の表現とし

$\mathfrak{Z}$ を $\hat{\pi}(\mathfrak{A}_T)'$ の極大な可換フォン・ノイマン代数とした時

$H=\int^{\oplus} H_\lambda d\mu(\lambda)$　$\hat{\pi}=\int^{\oplus}\hat{\pi}_\lambda d\mu(\lambda)$ のように分解され、$\hat{\pi}_\lambda$ は H_λ で既約で、

$\mathfrak{Z}$ は分解における対角元に等しい。

(8.8.1) f を *positive linear form* これに応ずる表現を $\hat{\pi}_f$ とし、これについて(8.5.2)

のような分解があるとして *cyclic vector* の分解を $\int^{\oplus}\Omega_\lambda d\mu(\lambda)$ とする。

その時ほとんどすべての λ に対し $\Omega_\lambda \neq 0$ かつ

$f_\lambda(a)=(\Omega_\lambda|\hat{\pi}_\lambda(a)|\Omega_\lambda)$ は可積分で　$f=\int f_\lambda d\mu(\lambda)$ となる。

$\mathfrak{A}$ が可分であれば $\mathfrak{A}_T$ も可分になるから、Φ に応ずる $\hat{\Phi}$ 及び $\hat{\pi}(\mathfrak{A}_T)$ に対してこれをあてはめる。この時には <u>$\hat{\pi}(\mathfrak{A}_T)'$ 自身が可換フォン・ノイマン代数</u>になる。何となれば⑤⑥の対応式から $\hat{\pi}(\mathfrak{A}_T)'=(\pi(\mathfrak{A})\cup \sqcup(T))'$ で、これに属する元を C_1, C_2 とする。$\pi(\mathfrak{A})\Omega$ は密であるから ${}^\forall A, B\in\mathfrak{A}$ に対し $(\Omega|\pi(A)[C_1, C_2]\pi(B)|\Omega)=0$ を証明すればよい。C_1, C_2 は *self-adjoint* として一般性を失なわない。すると Ω の *cyclicity* より ${}^\forall\varepsilon>0$ に対し ${}^\exists A_1, A_2\in\mathfrak{A}$　$\|C_i\Omega-\pi(A_i)\Omega\|<\varepsilon$　$i=1,2$　とできて、$\pi(A_1), \pi(A_2)$ は *self adjoint* にとれる。C_1, C_2 は $\pi(\mathfrak{A})$, $\sqcup(T)$ と交換するから、

$$(\Omega|\pi(A)C_1C_2\pi(B)\Omega)=(\Omega|C_1\pi(AB)C_2|\Omega)=\lim_\alpha\int dx f_\alpha(x)(\Omega|C_1\pi(AB)C_2\sqcup(x)|\Omega)$$

$$=\lim_\alpha\int dx f_\alpha(x)(\Omega|C_1\pi(AB)\sqcup(x)C_2|\Omega)=(\Omega|C_1\pi(AB)E(0)C_2|\Omega)=(\Omega|C_1E(0)\pi(AB)E(0)C_2|\Omega)$$

$$=(\Omega|\pi(A_1)E(0)\pi(AB)E(0)\pi(A_2)|\Omega)+\delta\qquad\|\delta\|<2\varepsilon$$

と $E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)$ の形になって、これは補題2.より可換で、また ε は任意であるから C_1, C_2 が可換である事が証明された。

故に (8.5.2) より $H_\phi = \int^{\oplus} H_\lambda d\mu(\lambda)$ $\hat{\pi} = \int^{\oplus} \hat{\pi}_\lambda d\mu(\lambda)$ $\Omega = \int^{\oplus} \Omega_\lambda d\mu(\lambda)$ と書け、<u>$\hat{\pi}_\lambda$は既約</u>

となるので (8.8.1) より $\hat{\Phi}(X) = \int \Phi_\lambda(X) d\mu(\lambda)$ $\Phi_\lambda(X) = (\Omega_\lambda | \hat{\pi}_\lambda(X) | \Omega_\lambda)$ と書け、

<u>$\hat{\Phi}_\lambda$はpure state</u>になる。これから対応式⑧より積分と極限を入れかえると、

$\Phi(A) = \int \Phi_\lambda(A) d\mu(\lambda)$ 定理1.より $\Phi_\lambda \in \mathcal{E}(E\cap\mathcal{L}_+)$ となる。 ┘

<u>条件 2.</u> $\mathfrak{A}$が単位元を持ち、$\mathfrak{A}$の部分代数の可算個の族$\{\mathfrak{A}_\alpha\}$及び$\mathfrak{A}$の点列$\{A_i\}$が存在して、$^\forall\rho \in \mathfrak{F} \equiv \{\rho \in E\cap\mathcal{L}_+ ;\ ^\forall\alpha$に対し $\sup_{A\in\mathfrak{A}_\alpha} \frac{|\rho(A)|}{\|A\|} = 1\}$ と $^\forall\sigma \in E\cap\mathcal{L}_+$ が$\{A_i\}$によりseparate (ie $^\exists A_{i_0}$ $\rho(A_{i_0}) \neq \sigma(A_{i_0})$ if $\rho\neq\sigma$) されて、$\phi \in \mathfrak{F}$。

これは[2]におけるやり方で、単位元のあることを除いては条件1.よりゆるい。

$A\in\mathfrak{A}$に対し $\hat{A} : \rho \in E\cap\mathcal{L}_+ \longrightarrow \rho(A)$ によって$E\cap\mathcal{L}_+$上の函数と考え

$$(\hat{A}_1\hat{A}_2)(\rho) = \hat{A}_1(\rho)\hat{A}_2(\rho) \equiv \rho(A_1)\rho(A_2) \qquad (c_1\hat{A}_1 + c_2\hat{A}_2)(\rho) = c_1\hat{A}_1(\rho) + c_2\hat{A}_2(\rho)$$

によって積と和を定義すれば$\hat{A}$ $(A\in\mathfrak{A})$による多項式が形成され、その上の線形汎函数を

$$\hat{\mu}_\phi(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_\ell) = \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_\ell} \int dx_1 \cdots dx_\ell\, f_{\alpha_1}(x_1) \cdots f_{\alpha_\ell}(x_\ell)\, \phi(A_1(x_1) \cdots A_\ell(x_\ell))$$
$$= (\Omega | E(0)\pi(A_1)E(0) \cdots E(0)\pi(A_\ell)E(0) | \Omega) \quad (\because \text{補題1より})$$

で定義する。($E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)$ abelianだからconsistent。) これが連続線形正値でノルム1つまりstateになることは後に示す。Stone-Weierstrassの近似定理より、この多項式が$E\cap\mathcal{L}_+$上の連続函数$C(E\cap\mathcal{L}_+)$で一様ノルムでdenseであることからこの上のstateに拡張される。すると$\hat{\mu}_\phi$は$E\cap\mathcal{L}_+$上のpositive normalized measureとして表わされる。ie $F\in C(E\cap\mathcal{L}_+)$ $\hat{\mu}_\phi(F) = \int F(\rho) d\mu_\phi(\rho)$

今$F = \hat{A}$とすればこの式の左辺は定義より $(\Omega|E(0)\pi(A)E(0)|\Omega) = \Phi(A)$ に等しく、右辺の積分記号内は$\hat{A}(\rho) = \rho(A)$となる。故に

$$\Phi(A) = \int \rho(A)\, d\mu_\phi(\rho) \qquad \text{と書ける。}$$

ここでこのmeasure μ_ϕを調べてみると$\mathcal{E}(E\cap\mathcal{L}_+)$に集中している事がわかる(後述)ので $\rho\in\mathcal{E}(E\cap\mathcal{L}_+)$ で分解できたことになる。分解の一意性も示される。

残された証明すべき事は

• $\hat{\mu}_\phi$ が $\hat{A}$ $(A\in\mathfrak{A})$ で生成される多項式 $\mathcal{P}(E\cap\text{上弓})$ 上の state である。

∵) $P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell)\in\mathcal{P}(E\cap\text{上弓})$ に対し、先ず連続性（一様ノルムで）

$$|\hat{\mu}_\phi(P)|\leq\|P\|\equiv\sup_{\sigma\in E\cap\text{上弓}}|\{P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell)\}(\sigma)|=\sup_{\sigma\in E\cap\text{上弓}}|P(\hat{A}_1(\sigma),\cdots,\hat{A}_\ell(\sigma))|$$
$$=\sup_{\sigma\in E\cap\text{上弓}}|P(\sigma(A_1),\cdots,\sigma(A_\ell))|$$
を示す。

ここで $A_1,\cdots A_\ell$ は self-adjoint として一般性を失なわない。

$A_1,\cdots A_\ell$ を固定して考えると、$\hat{\mu}_\phi(P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell))$ は R^ℓ での多項式 $P(t_1,\cdots,t_\ell)$ に対する線形汎函数と考えられる。$P\in C(\prod_{j=1}^{\ell}[-\|A_j\|,\|A_j\|])$ としてのこの汎函数の連続性は、$E(0)\pi(A_i)E(0)$ が互いに可換で self-adjoint なことから、可換なスペクトル分解ができて、

$$\mu_\phi(P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell))=(\Omega\,|\,P(E(0)\pi(A_1)E(0),\cdots,E(0)\pi(A_\ell)E(0))\,|\,\Omega)$$
$$=\int P(t_1,\cdots,t_\ell)\,(\Omega\,|\,dE_1(t_1)\cdots dE_\ell(t_\ell)\,|\,\Omega)$$

となることからわかる。これを $C(\prod_{j=1}^{\ell}[-\|A_j\|,\|A_j\|])$ に拡張すれば positive normalized functional となるので、$\prod_{j=1}^{\ell}[-\|A_j\|,\|A_j\|]$ 上の positive normalized measure $m_{A_1\cdots A_\ell}$ と表わされる。この measure の support を Δ とすると、下式が成り立つ。

$$|\mu_\phi(P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell))|\leq\sup_{x\in\Delta}|P(x_1,\cdots,x_\ell)| \quad\cdots\cdots\circledast$$

$x\in\Delta$ に対して　χ : compact support を持つ R^ℓ 上の連続函数で $\chi(x)\neq 0$ とする。

すると $\alpha\equiv m_{A_1\cdots A_\ell}(\chi^*\chi)>0$

$$\phi_\chi(A)\equiv\alpha^{-1}(\Omega\,|\,\chi^*(E(0)\pi(A_1)E(0),\cdots,E(0)\pi(A_\ell)E(0))\,E(0)\pi(A)E(0)\,\chi(E(0)\pi(A_1)E(0),\cdots)\,|\,\Omega)$$

は $\mathfrak{A}$ 上の線形汎函数として連続で、かつ positive normalized である。また

$\phi_\chi(A(x))=\phi_\chi(A)$　故に　$\underline{\phi_\chi\in E\cap\text{上弓}}$

ところが（χ の support）$\longrightarrow x$ のとき $|\phi_\chi(A_i)-x_i|=\left|\dfrac{\int\chi^*(t_1,\cdots,t_\ell)(t_i-x_i)\chi(t_1,\cdots,t_\ell)\,dm_{A_1\cdots A_\ell}}{\int\chi^*(t_1,\cdots,t_\ell)\,\chi(t_1,\cdots,t_\ell)\,dm_{A_1\cdots A_\ell}}\right|$

$\longrightarrow 0$。故に $(\phi_\chi(A_1),\cdots,\phi_\chi(A_\ell))\longrightarrow x$ となって $\circledast$ より連続性、つまり

$$|\mu_\phi(P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_\ell))|\leq\sup_{\sigma\in E\cap\text{上弓}}|P(\sigma(A_1),\cdots,\sigma(A_\ell))|$$
が証明できた。

また $P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_l)\geqq 0$ ($E\cap L_T^+$ 上の函数として) なら $P(\sigma(A_1),\cdots,\sigma(A_l))\geqq 0$ $\sigma\in E\cap L_T^+$ であるから、前と同様にして $x\in\Delta$ に対しては $P(x_1,\cdots,x_l)\geqq 0$ となって、$\mu_\phi(P(\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_l))=m_{A_1\cdots A_l}(P)\geqq 0$ となる。故に positive で、$\mu_\phi(\hat{1})=1$ だから normalized である。

○ 次の証明のための準備として $\phi\in\mathfrak{F}$ ならば measure μ_ϕ は $\mathfrak{F}$ 上に集中している事を示す。

$\mathfrak{F}_\alpha\equiv\{\rho\in E\cap L_T^+\ ;\ \sup_{A\in\mathfrak{A}_\alpha}\frac{\rho(A)}{\|A\|}=1\}$、ここで sup を $\mathfrak{A}_\alpha$ の self-adjoint なものだけに制限してもよい。$\mathfrak{B}_\alpha\equiv\{A\in\mathfrak{A}_\alpha\ ;\ A=A^*,\ \|A\|\leq 1\}$ $V_{m,\alpha}\equiv\bigcup_{A\in\mathfrak{B}_\alpha}\{\rho\in E\cap L_T^+\ ;\ \rho(A)>1-\frac{1}{m}\}$ とすれば $\mathfrak{F}_\alpha=\bigcap_{m\,\text{自然数}}V_{m,\alpha}$ となる。また $\mathfrak{F}=\bigcap_\alpha\mathfrak{F}_\alpha\left(=\bigcap_{\alpha m}V_{m,\alpha}\right)$。$V_{m,\alpha}$ は開集合だから、共通部分の $\mathfrak{F}_\alpha$ は可測である。

$\phi\in\mathfrak{F}_\alpha$ とし、$\mu_\phi=\mu'+\mu''$ のように μ_ϕ を $V_{m,\alpha}$ 上にあるものと、$E\cap L_T^+-V_{m,\alpha}$ 上にあるものとに分ける。$\|\mu'\|+\|\mu''\|=\|\mu_\phi\|=1$ が成り立つ。$^\forall A\in\mathfrak{B}_\alpha$ に対し

$\mu''(\hat{A})\leq\|\mu''\|(1-\frac{1}{m})$ が成り立つから

$$\phi(A)=\mu_\phi(\hat{A})=\mu'(\hat{A})+\mu''(\hat{A})\leq\|\mu'\|+\|\mu''\|(1-\tfrac{1}{m})=1-\tfrac{1}{m}\|\mu''\|$$

A に関する sup をとれば $\|\mu''\|=0$ でなくてはならない。故に μ_ϕ は V_m に集中している。m 任意だから $\mathfrak{F}_\alpha$ に集中していることになる。$\phi\in\mathfrak{F}$ であれば μ_ϕ は $\mathfrak{F}$ に集中していて、かつ $\mathfrak{F}$ は可測である。

○ μ_ϕ は $\mathcal{E}(E\cap L_T^+)\cap\mathfrak{F}$ に集中している。

∵) $\rho\in E\cap L_T^+$ に対して数列 $\{\rho(A_i)\}$ を考える。($\{A_i\}$ は条件2中にある $\mathfrak{A}$ の列。) これは $E\cap L_T^+$ から $R^{\text{countable}\,\infty}$ への mapping で、($\{A_i\}$ self adjoint としてよい) これを π と書く。π は連続で $K\equiv\pi(E\cap L_T^+)$ は compact である。$\psi\in C(K)$ なら $\psi\circ\pi\in C(E\cap L_T^+)$ であるから、$\nu_\phi(\psi)=\mu_\phi(\psi\circ\pi)$ により K 上の measure ν_ϕ を定義する。$\pi\phi\in K$。K における $\pi\phi$ での point measure を $\delta_{\pi\phi}$ とすると、$f\in C(K)$ が linear なら $f\circ\pi\in C(E\cap L_T^+)$ も linear だから、

$\nu_\phi(f) = \mu_\phi(f\circ\pi) = (f\circ\pi)(\varphi)$ 一方 $\delta_{\pi\phi}(f) = f(\pi\phi) = (f\circ\pi)(\phi) = \nu_\phi(f)$

$\delta_{\pi\phi}$ は point measure だから $\psi \in C(K)$ が convex function であれば $\nu_\phi(\psi) \geqq \delta_{\pi\phi}(\psi)$ 。

convex function $\psi \in C(K)$ に対し $\nu(\psi) \geqq \delta_{\pi\phi}(\psi)$ となる他の ν があれば $\forall\varepsilon > 0$ に対し $\nu' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{\sigma_i}$ $\alpha_i > 0$ $\sum \alpha_i \sigma_i = \pi\phi$ $|\nu(\psi) - \nu'(\psi)| < \varepsilon$ なる ν' がとれる(脚注)。

$\sigma_i \in K = \pi(E\cap\mathfrak{H})$ より $\exists \phi_i \in E\cap\mathfrak{H}$ $\pi\phi_i = \sigma_i$ すると $\pi(\sum\alpha_i\phi_i) = \sum\alpha_i\sigma_i = \pi\phi$ ゆえに $\phi \in \mathfrak{F}$ であるから $\{A_i\}$ で分離される。ie $\phi = \sum\alpha_i\phi_i$。 μ_ϕ の定義からわかるように、μ_ϕ の特徴は ϕ に関する線形性 $\sum\alpha_i\mu_{\phi_i} = \mu_{\sum\alpha_i\phi_i}$ $(=\mu_\phi)$ である。これに注意すれば、

$$\nu'(\psi) = \sum\alpha_i\delta_{\pi\phi_i}(\psi) = \sum\alpha_i\psi(\pi\phi_i) = \sum\alpha_i(\psi\circ\pi)(\phi_i) = \sum\alpha_i\delta_{\phi_i}(\psi\circ\pi) \leqq \sum\alpha_i\mu_{\phi_i}(\psi\circ\pi)$$

$$= \mu_\phi(\psi\circ\pi) = \nu_\phi(\psi)$$

故に $\nu_\phi(\psi) \geqq \nu(\psi) - \varepsilon$ εは任意だから $\nu_\phi \succ \nu(\psi)$ ν_ϕ はこの意味の order で maximal な measure である。 $K = \pi(E\cap\mathfrak{H})$ は metrizable であるから ν_ϕ は $\mathcal{E}(K)$ に集中している(脚注)。 μ_ϕ は $\pi^{-1}\mathcal{E}(K)$ に集中し、前項と合わせて $\pi^{-1}\mathcal{E}(K)\cap\mathfrak{F}$ に集中している。 $\mathfrak{F}\cap\pi^{-1}\mathcal{E}(K) \subset \mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})$ を証明すれば終りである。

$\because)$ $\rho \in \mathfrak{F}\cap\pi^{-1}\mathcal{E}(K)$ $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ $(0<\lambda<1)$ とすれば $\mathcal{E}(K) \ni \pi\rho = \lambda\pi\rho_1 + (1-\lambda)\pi\rho_2$ 故に $\pi\rho = \pi\rho_1$ $\rho\in\mathfrak{F}$ より $\rho = \rho_1$ $\therefore \rho \in \mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})$

。ϕ を $\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})$ の元で分解する他の measure μ'_ϕ があれば、$\phi\in\mathfrak{F}$ であるから前の証明から μ'_ϕ も $\mathfrak{F}$ に集中している。$\therefore$ 対応する K 上の measure ν'_ϕ は $\mathcal{E}(K)$ に集中している。ie $\pi(\mathfrak{F}\cap\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})) \subset \mathcal{E}(K)$ $(\because \sigma \in \pi(\mathfrak{F}\cap\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H}))$ $\sigma = \lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2$ とすれば $\sigma = \pi\rho$ $\sigma_i = \pi\rho_i$ $\pi\rho = \pi(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2)$ $\rho \in \mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})\cap\mathfrak{F}$ となる。$\rho\in\mathfrak{F}$ より $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ $\rho\in\mathcal{E}(E\cap\mathfrak{H})$ より $\rho = \rho_1$ 故に $\sigma = \sigma_1$ $\sigma \in \mathcal{E}(K)$) 故に ν'_ϕ は maximal になる(脚注)。 ν_ϕ も maximal だから任意の convex ψ に対して、 $\nu'_\phi(\psi) = \nu_\phi(\psi)$。故に $\nu'_\phi = \nu_\phi$。 μ'_ϕ, μ_ϕ は $\mathfrak{F}$ に集中しているから $\mu'_\phi = \mu_\phi$。QED.

(脚注. G. Choquet et P. A. Meyer Ann. Inst. Fourier 13 139 (1963)

・ weakly clustering state の分類

定理2　$T=R^n$ の場合 $\rho\in\mathcal{E}(E\cap L_T^{\perp})$ に応ずる $(\mathfrak{A},T)$ の表現を (π,U) とする。

U は T のユニタリー表現であるから、そのスペクトル分解は、

$$U(x)=\sum_{p_n\in S_D}E(p_n)e^{ip_n\cdot x}+\int_{S_c}dE(p)e^{ip\cdot x}$$

S_D：点スペクトル
S_c：連続スペクトル

となり、$E(p_n)$ は $E(0)$ と同様に一次元で S_D は群をなす。即ち

$p_n\ p_m\in S_D$　ならば　$p_n+p_m\in S_D$　$-p_n\in S_D$

証明略．[3] の Theorem 4

このことから、weakly clustering state を以下のように分類する。

$$\begin{cases} S_D=\{0\} & \text{の場合} & E_{\mathrm{I}}\text{-state} \\ S_D=\{R^n\text{ の格子点}\} & 〃 & E_{\mathrm{II}}\text{-state} \\ \text{それ以外} & 〃 & E_{\mathrm{III}}\text{-state} \end{cases}$$

§3　部分群の extremal invariant state への分解

前の定理で $\phi\in E\cap L_T^{\perp}$ を $\mathcal{E}(E\cap L_T^{\perp})$ に属する状態に分解したが、T の部分群 H を考えると $\rho\in\mathcal{E}(E\cap L_T^{\perp})$ でも一般には $\rho\in\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})$ とはならないから、前と同様にこれに属する状態に分解される。

分解定理Ⅱ　(定義1 のもとで) $\mathfrak{A}$ に単位元があるとする。T の閉部分群 H があって、$K\equiv T/H$ がコンパクトで K の上に T 不変な測度 $d\dot{x}$ が定義されて $\int_K d\dot{x}=1$ であるとする。そのとき $\rho\in\mathcal{E}(E\cap L_T^{\perp})$ は $\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})$ に属する状態で分解できて、特にその形は

$$\rho(A)=\int_K d\dot{x}\,\tilde{\rho}(A(x))\qquad \tilde{\rho}\in\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})\qquad x\in\dot{x}\in K$$

となる。

注) $\tilde{\rho}\in\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})$ であれば $\tau_x\tilde{\rho}\in\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})$ $\left(\tau_x\tilde{\rho}(A)\equiv\tilde{\rho}(A(x))\right)$ になる。故に上の定理は $\rho=\int_K d\dot{x}\,\tau_x\tilde{\rho}$ つまり ρ を $\mathcal{E}(E\cap L_H^{\perp})$ の状態で分解したことを示している。

証明略．[4] の Theorem 1．あるいは予稿集を見よ。

ρ が E_{II}-state のとき、部分群を すべての $p_n \in S_D$ に対し $p_n \cdot x = 2k\pi$ (k：整数) となるような x の集合 T_L（これもやはり R^n の格子点をなす）をとれば、これに対しては S_D に属する vector はすべて invariant になる。すると ρ を分解した時成分の T_L-invariant state について考えてみる。まずこれに応ずる T_L の表現 $U(T_L)$ があるが、$U(T_L)$ の点スペクトルに属する vector は T_L-invariant vector しかあり得ない。（もしそうでないのがあればもとの ρ の S_D の中に T_L-invariant でない vector ができてしまう。）またこれは $\mathcal{E}(E \cap \perp_{T_L})$ に属しているから T_L-invariant vector は一次元（定理 1）である。 故に ρ の成分となる $\mathcal{E}(E \cap \perp_{T_L})$ に属する state は T_L に関して E_I-state。つまり E_{II}-state は分解定理 II よりこのような state に分解できる。

分解定理 II においてもし $\rho \in \mathcal{E}(E \cap \perp_{T_L})$ がもとから $\rho \in (E \cap \perp_H)$ であれば、分解の必要がない。故に下の同値関係により分解の必要が全くない state として E_I-state が特徴づけられる。

i) 任意の T の部分群 H で T/H が compact なものに対して $\rho \in \mathcal{E}(E \cap \perp_H)$

ii) 〃 Ω は唯一の invariant vector

iii) ($T = R^n$ の場合) Ω は唯一の点スペクトルに属する vector (ie ρ は E_I-state)

∵) 定理 1 より i) ⇔ ii)。 iii) ⇒ ii) 明らか。 Ω 以外の固有ベクトルがあれば、E_{II}-state の分解と同様 H を適当にとってそれを H-invariant にできる ii) ⇒ iii)。

E_I-state に対しては $(\psi | U(-x) - E(0) | \varphi) = \int_{S_c} e^{-ip \cdot x} (\psi | dE(p) | \varphi) \xrightarrow{x \to \infty} 0$ が strongly clustering の条件になるが、連続 measure $(\psi | dE(p) | \varphi)$ の性質がよくわからないので成り立たない。ここでは asymptotically abelian をすべて $E(0)\pi(\mathfrak{A})E(0)$ abelian におきかえてだけ使ったが、補題 2 の証明からわかるように weakly つまり平均した意味でしか asympt. abelian を使っていない。だから weakly clustering 以上のことは望み難いように思われる。