数理解析研究所講究録
第 20 巻 1967 年 58-71

Geodesic Flows On Homogeneous Spaces

京大 理　吉沢尚明
辰馬伸彦

§1　Geodesic flow と semisimple Lie group

1　Geodesic flow の定義

X を Riemannian metric をもった完備，可符号，連結の manifold とし，$x \in X$ における tangent space を $T^{(x)}$，$v(x) \in T^{(x)}$ で $|v(x)| = 1$ なるものの全体を $T_0^{(x)}$ とかく。

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ v \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix},\ v(x) \in T_0^{(x)},\ x \in X \right\}$$

とおく。$v \in \mathcal{B}_0$ に，X の点 x から $v(x)$ の正方向へのびる geodesic $l(v)$ に沿って距離 s の点 $y(v, s)$ と，そこにおける $l(v)$ の長さ 1 の接ベクトル $\partial y(v, s)$ を考えて $(y(v, s), \partial y(v, s))$ を対応させる；

$$\sqcup_s : \mathcal{B}_0 \ni v = \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \sqcup_s v = \begin{pmatrix} y(v,s) \\ \partial y(v,s) \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_0$$

$\sqcup_s$ は $\mathcal{B}_0$ から $\mathcal{B}_0$ の上への変換で $\mathcal{U} = \{\sqcup_s ; -\infty < s < +\infty\}$ は $\mathcal{B}_0$ 上の 1-parameter の transformation group となる。

<u>def.</u> $\mathcal{U}$ を X 上の geodesic flow という。

μ_1 を X 上の metric による measure とする。

$T_0^{(x)} \sim S^{n-1}$ ($n = \dim X$) だから $T_0^{(x)}$ には S^{n-1} 上の uniform measure μ_2 と同じ measure $\mu_2^{(x)}$ が入る。このとき

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2^{(x)} \sim \mu_1 \times \mu_2$$

は $\sqcup_s$ 不変で $\mathcal{U}$ は measure space $(\mathcal{B}_0, \mu)$ 上の metrical な flow となる。

2. <u>Semi-simple Lie group の factor space.</u>

G を non-compact, connected な semi-simple Lie group, K を G の maximal compact subgroup とする。G, K の Lie algebra を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とおく。$G/K = \{gK\}$ は Riemannian manifold で、$G/K \ni \tilde{g} = gK$ での tangent space を $T(\tilde{g})$ とすると

$$T(\tilde{g}) \cong \mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{k}} \cong \tilde{\mathfrak{k}}^{\perp} \overset{\text{put}}{\equiv} \mathfrak{n} \qquad (\text{同型})$$

ここで $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing form による $\tilde{\mathfrak{k}}$ の直交補空間である。

homogeneous space G/K では次がなりたつ

(1). $\tilde{g} = gK \in G/K$ を通る geodesic $l(v)$ は

$$l(v) = \{ y(v, s) = g \exp(s v) \cdot K \mid -\infty < s < +\infty \}_{v \in \mathfrak{n}}$$

とあらわされ

$$\partial y(v, s) = g \exp(s v) \cdot v$$

(2). G/K 上の Riemannian metric による measure $\tilde{\mu}$ は G が semi-simple なことよりその両側不変な Haar measure からみちびかれたものである。

Γ を G の discrete subgroup とする。double coset space (Γ の fundamental domain)

$X = \Gamma \backslash G / K \ni x = \{\Gamma g K\}$ において $T^{(x)} = \{\Gamma_g v\}$

となる筈である。すなわち，$gK \in G/K$，$\gamma \in \Gamma$ とするとき，対応

$$T^{(gK)} \overset{\gamma}{\longleftrightarrow} T^{(\gamma g K)}$$

で接ベクトルを同一視する。$\gamma g K = gK$ のとき $\gamma g v \neq g v$

ならば $\Gamma g v$ は X の tangent vector と考えられないので、Γ の仮定 1) Γ は $T^{(x)}$ の vector の同一視を well-define するをおく。 更に Γ の仮定 2) $\tilde{\mu}$ から induce した measure μ_1 で X は finite volume をもつ。

をおく。

<u>Example</u> $n-1$ 次元の完備な負の定曲率空間で finite volume をもつ X は Labachevsky 空間がその universal covering space である。

$$1^{n-1} = \left\{ x = (x_1 \cdots x_n) \in R^n \; [x, x] = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n-1}^2 - x_n^2 = -c^2 \atop x_n > 0 \right\},$$

（半径 $c > 0$ の pseudo sphere の上半部）

は metric

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2$$

で $n-1$ 次元の負の定曲率空間 — Lobachevsky 空間 — になる。 $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \in GL(n, R)$ とし

$$g \in GL(n, R), \; : \; {}^t g J g = J, \; g_{nn} > 0 \; \det g = 1$$

の全体は n 次元の proper Lorentz group G をつくる。
$G \ni g$ で x_n を不変にするものの全体

$$K = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} u & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right);\ u \in SO(n-1) \right\} \sim SO(n-1)$$

は maximal compact subgroup で $\Lambda^{n-1} \sim G/K$ である。従ってある Γ; discrete subgroup があって、

$$X \sim \Gamma \backslash G/K$$

となる。

§2 Geodesic flow の群論的取扱い.

1. 問題点

geodesic flow $\mathcal{U} = \{U_s\}$ が $L^2_\mu(\mathcal{B}_0)$ 上にひきおこす unitary 表現 $\mathcal{D} = \{U_s, L^2_\mu(\mathcal{B}_0)\}$ の既約分解で、

1). $\mathcal{U}$ の trivial な表現が唯1つ含まれる $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$ ergodic

2). $\mathcal{D} \ominus \mathbb{1}$ の既約分解の measure を multiplicity もこめてみること. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}$ の spectral type をみること

なる仕方で、flow $\mathcal{U}$ の ergod 性, spectral type を群論的に取扱う。

$\mathcal{U}$ の orbitwise な $\mathcal{B}_0$ の分解はこまかすぎるので、次のようにしてアライ分解を考える。

3). $\mathcal{B}_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{U}_g} \begin{pmatrix} \Gamma g_0 g K \\ \Gamma g_0 g v \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_0, \quad v \in \mathcal{N}$

なる $\mathcal{B}_0$ の変換群 $\{\tilde{U}_g\}$ を考える。(1) より $g = \exp(sv) \in G$ のとき $\tilde{U}_g = U_s$ であるから

。$\{\tilde{U}_g\}$ orbit は geodesic flow $\{U_s\}$ の orbits からなるアライものである。

。$\{\tilde{U}_g\}$ orbit は K が compact なことより，$\mathcal{B}_0$ で closed 従って $\mathcal{B}_0$ 上の measure μ は 各 $\{\tilde{U}_g\}$ orbit θ 上の G - invariant measure μ_0 で

$$\mu = \int_{S = \{\text{orbit space}\}} \mu_0 \, d\nu(\theta)$$

(4) $$L^2_\mu(\mathcal{B}_0) = \int_S \oplus L^2_{\mu_\theta}(\theta) \, d\nu(\theta)$$

と分解される。(μ_θ は a.e $d\nu$ で G - invariant)

◎ K が $T_0^{(gK)}$ で transitive $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}_0$ はある単一の $\tilde{U}_g$ - orbit と一致。

(Lobachevsky のときは $K \cong SO(n-1)$ より transitive.)

(4) より $L^2_{\mu_\theta}(\theta)$ で ergodicity，spectrum を考えればよい。

orbit θ を固定し，G は θ に作用していると考える。

$$\tilde{U}_g ; \underset{v_0}{\overset{\mathcal{O}}{\Psi}} = \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{U}_g v_0 = \begin{pmatrix} \Gamma g_0 g K \\ \Gamma g_0 g v \end{pmatrix}; \quad v \in \mathfrak{n}$$

$$\therefore \quad \tilde{U}_g v_0 = v_0 \iff [g \in K, \ g v = v]$$

$$\therefore \quad K_0 = \{ k \in K ; \quad k v = v \} ;$$

とおくと

$$\tilde{U}_g v_0 = v_0 \iff g \in K_0$$

$\therefore$

$$\mathcal{O} \sim \Gamma \backslash G / K_0$$

よって μ' を G の Haar measure からきまる measure とすれば

$$L^2_{\mu}(\mathcal{O}) \sim L^2_{\mu'}(\Gamma \backslash G / K_0)$$

一方　$g = \exp(s v)$ ならば $\tilde{U}_g = U_s$. よって $\mathcal{U}$ は double coset space では

$$U_s : \begin{pmatrix} \Gamma g_0 K_0 \\ \Gamma g_0 v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Gamma g_0 \exp(s v) K_0 \\ \Gamma g_0 \exp(s v) v \end{pmatrix}$$

だから

$$H = \{ \exp(s v) ; \ -\infty < s < +\infty \}$$

は$\mathfrak{U}$を$\mathcal{O}$に制限した変換群となる。

以上によって　Hが$L^2_{\mu}(\Gamma\backslash G/K_0)$上にひきおこす表現の既約分解を求めることを考えればよい。そのために次のことに注意する

。$K\supset K_0$はvの stability group で compact だから

$$(5)\qquad L^2(\Gamma\backslash G/K_0)\subset L^2(\Gamma\backslash G)$$

とみてよい

$$\because\quad f\in L^2(\Gamma\backslash G/K_0)\Longleftrightarrow f(m)=f(mk_0),\quad \forall m\in\Gamma\backslash G,\ \forall k_0\in K_0$$

。$\mathfrak{H}=L^2(\Gamma\backslash G)$,　$\mathfrak{H}_0=L^2(\Gamma\backslash G/K_0)$　とおく。

$\mathfrak{H}$上へのGの operation $=$ $\mathfrak{H}$上のG − right translation R_g, G の表現 $D=\{R_g,\mathfrak{H}\}$:

$$\mathfrak{H}\ni f(m)\longrightarrow R_gf(m)=f(mg),$$

を考えると(5)より

。$\mathfrak{H}_0$上へのHの operation $=R_g\ (g\in H)$の$\mathfrak{H}_0$の制限となるから

問題：　表現 $D=\{R_g,\mathfrak{H}\}$で$g\in H$, $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_0$としたもの，すなわち$H$の$\mathfrak{H}_0$上での表現

$$D(H, \mathfrak{z}_0) \equiv D|H|\mathfrak{z}_0 = \{R_h, \mathfrak{z} : (h \in H)\}\big|\mathfrak{z}_0$$

の既約分解を求める。

について考えればよい。このとき §2.1 の 1), 2) に対応して

1) $\mathcal{O}$ で ergodic $\Leftrightarrow$ $D(H, \mathfrak{z}_0)$ が唯一つの trivial $\mathbb{1}_H$ な表現をもつ

2) $\mathcal{O}$ での spectrum $\Leftrightarrow$ $D(H, \mathfrak{z}_0)$ の既約分解の spectrum

なる対応を通してしらべることになる。

2. <u>Example</u>

§.1. の Example の場合には

G = proper Lorentz group of dim n = Lor(n)

$$K = \left\{\left(\begin{array}{c|c} u & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right) : u \in SO(n-1)\right\} \sim SO(n-1),$$

$\mathcal{B}_0$ は1つの $\widehat{\Box}_g$ - orbit と一致, $v = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$ としてよい。

$$K_0 = \left\{\left(\begin{array}{c|c} \gamma & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right) ; \gamma \in SO(n-1)\right\}$$

$$H = \left\{\left(\begin{array}{c|c} 1_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \mathrm{ch}s & \mathrm{sh}s \\ \mathrm{sh}s & \mathrm{ch}s \end{matrix} \end{array}\right) : -\infty < s < +\infty\right\}$$

3. <u>注意</u> S.S. Lie algebra $\mathfrak{g}$ の simple component への分解

$$\mathfrak{g} = \sum_i \oplus \mathfrak{g}_i$$
$$\Downarrow$$
$$v = \sum_i v_i$$

において $\exists v_i = 0$ ならば v からきまる $\mathcal{B}_0$ 中の G - orbit は lower dimension となるから $\forall j: v_j \neq 0$ としてよい。

§.3. Gelfand - Fomin, Mautner, Hirai の方法.

1. §.2. の reduction より §.2.1 の問題 1), 2) は

問題: G の表現 $D = \{R_g, \mathfrak{H} = L^2(\Gamma\backslash G)\}$ の制限

$$D(H, \mathfrak{H}_0) = D|_H|\mathfrak{H}_0$$ の H - 既約分解を求める。

$$(\ \mathfrak{H}_0 = L^2(\Gamma\backslash G/K_0)\ )$$

の如く，表現論の問題に帰着する.

①目的の分解を

$$D(H, \mathfrak{H}_0) \sim \int_\Sigma \chi_\sigma d\nu(\sigma), \quad \chi_\sigma = H \text{ の一次元の表現} \tag{1}$$

② D の既約分解を

$$D \sim \int_\Omega w_\rho \, d\tau(\rho) \tag{2}$$

とする。

$\mathfrak{h}(\rho)$； w_ρ の表現空間,

$\Omega_0 = \{ w_\rho \in \Omega \mid K_0 - \text{invariant vector をもつ} \}$

$\mathfrak{h}(\rho)$ = 表現 $w_\rho\ (\in \Omega_0)$ 中の K_0 − invariant vector の set

i.e. $\quad = \{ v \in \mathfrak{h}(\rho) \,;\, w_\rho \in \Omega_0,\ U_{k_0} v = v \quad \forall k_0 \in K_0 \}$

とおくと

$$\mathfrak{h} \sim \int_\Omega \mathfrak{h}(\rho)\, d\tau(\rho), \qquad \mathfrak{h}_0 \sim \int_{\Omega_0} \mathfrak{h}_0(\rho)\, d\tau(\rho).$$

③ $$D|_{(H,\, \mathfrak{h}_0)} \sim D_0|_{(H\ \mathfrak{h}_0)} \sim \int_{\Omega_0} w_\rho|_{(H,\, \mathfrak{h}_0^{(\rho)})}\, d\tau(\rho) \quad {}^{*)}$$

∴ $$w_\rho|_{(H\ \mathfrak{h}_0^{(\rho)})} \sim \int_{\Sigma_\rho'} \chi_\sigma\, d\gamma_\rho'(\sigma)$$

とすると

$$^{*)} \sim \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{\Sigma_\rho'} \chi_\sigma\, d\gamma_\rho'(\sigma) \right\} d\tau(\rho) \tag{3}$$

∴ (1) より

$$\begin{cases} \Sigma \sim \Omega_0 \times (\Sigma_\rho') \\ \gamma \sim \tau \times (\gamma_\rho') \end{cases}$$

2 ergod 性　$\forall w_\rho \in \Omega_0$ について

$$\begin{cases} w_\rho|_H \sim \int_{\Sigma_\rho} \chi_\sigma \, d\gamma_\rho(\sigma), \\ w_\rho|_{(H, g_0(\rho))} \sim \int_{\Sigma'_\rho} \chi_\sigma \, d\gamma'_\rho(\sigma) \end{cases}$$

がわかっているものとする。

w_ρ の仮定 1)

$$w_\rho|_H > {}^\exists \mathbb{1}_H \text{ (H-invariant vector が或る)} \Longleftrightarrow w_\rho = \mathbb{1}_G$$

がみたされるならば

$D_{(H, g_0)}$ の H-invariant vectors の次元

$=$ 分解 (3) より D での $\mathbb{1}_G$ の multiplicity

$= 1$

i.e. ergodic.

結果

∘ (Mautner). $v = \sum_j v_j$　$\forall j$, $v_j \neq 0 \Rightarrow w_\rho$ の仮定 1) がなりたつ。

従ってこれを含む θ で ergodic

∘ Gelfand - Fomin (Lor (3), Lor (4)), Hirai (任意 Lor(n)) は

全ての K_0 - class 1 の表現をかぞえ上げて w_ρ の仮定 1) のなり

たつことを示した。

3. *Spectrum*

$$(*)\begin{cases} H\text{の同じ表現 } \varphi\sim\varphi_\rho \text{ の連続和 } \int_{\Omega'}\varphi_\rho\, d\sigma(\rho) \text{ は} \\ [\dim L^2_\sigma(\Omega')]\ \varphi \text{ と同値} \end{cases}$$

w_ρ の仮定 2) $w_\rho|(H,\mathfrak{z}_0(\rho))$ は $w_\rho \neq \mathbb{1}_G$ に対して multiple Lebesgue をみたすならば (*) より分解 (3) で

$$D_{(H\ \ \mathfrak{z}_0)} \ominus \mathbb{1} \text{ は } [\dim L^2_\sigma(\Omega_0)+\alpha]\text{-Lebesgue}$$

○ Gelfand－Fomin, Hirai は仮定 2) と $\dim L^2_\sigma(\Omega_0)=\infty$ を示し，従って σ-Lebesgue を示した。

4. Examples

§2.2 の Examples で

1. $n=3 \Rightarrow$

$$G=\mathrm{Lor}(3) \qquad K=\left\{\begin{pmatrix} u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ u\in SO(2)\right\}$$

$$\mathcal{B}=0 \qquad v=\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1\\ & 1 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$

$$K_0=\{e\} \qquad H=\left\{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & ch\,s & sh\,s\\ & sh\,s & ch\,s\end{array}\right) : -\infty < s+\infty\right\}$$

$\downarrow$

$\therefore\ \mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0$

$\forall w_\rho$ は $\neq \mathbb{1}_G$ なる既約表現で

$$w|_H : \text{simply Lebesgue (discrete series で)}$$
$$: \text{doubly Lebesgue (cont. s)}$$

$$\dim L^2(\Gamma\backslash G) = \infty$$

i.e. 仮定1) 仮定2) がなりたち, $\mathcal{U}$ は σ-Lebesgue.

2. $n = 4$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in SO(3) \right\}$$

$$\mathcal{B}_0 = \theta, \qquad v = \left(\begin{array}{c|c} O_2 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \sim SO(2), \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & \\ \hline & \begin{matrix} chs & shs \\ shs & chs \end{matrix} \end{array} \right) \right\}$$

$\Omega = \Omega_0$ の $\forall w_\rho$ ($\neq \square_G$ 既約) で $w|_{(H\ \mathfrak{z}_0(\rho))}$ は simply Lebesgue

$$\dim L^2(\Gamma\backslash G/K_0) \geqq \dim L^2(\Gamma\backslash G/K) = \dim \{ f : f(\gamma g k) = f(g) \}$$

$\Gamma g K$ は closed で $\dim(\Gamma g K) \lneqq \dim G$

$$\therefore \quad \dim L^2(\Gamma\backslash G/K) = \infty$$

で仮定 1) 2) がなりたつ.