数理解析研究所講究録
第 20 巻 1967 年 100-118

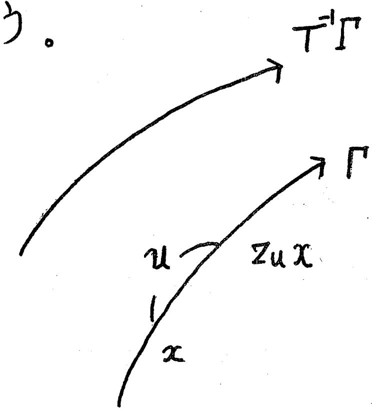
圧縮性の流れと transversal field.

東工大 応物 久保 泉

§1. 序

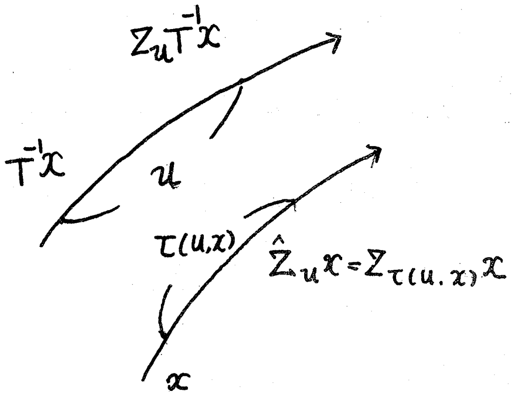
Ya. G. Sinai [1] は古典力学系の flow (automorphism) の研究に transversal field の概念が有効なことを示した。同じ論文の§7 において、その考え方のある部分は一般の Lebesgue 空間の automorphism T の研究に適用出来ることを指摘し、可測変換の一径数群 $\{Z_u\}$ が admissible という条件を入れ、それが一次元の transversal field (T の) であることを定義して、T と $\{Z_u\}$ の関係を調べている。その方法を考察してみれば本質的な点は、$\{Z_u\}$ が測度の絶対連続性は保っているが、保測でなくてよい可測変換の一径数群であることと、$\{TZ_uT^{-1}\}$ が $\{Z_u\}$ の time change になっていることの二点であることがわかる。 この二点を基礎として Sinai の議論を構成しなおしてみることがこの報告の一つの目的である。

因に、Riemann manifold M上の automorphism T の一次元 transversal field（この報告集 押川元重氏の項参照）は前記の如くみなせる。何故ならば、今 Z の要素 Γ は向づけられており T はその向を不変にするとしよう。



各 Γ 上の Riemann metric $d\rho_\Gamma$ を考え、各 $x \in M$ に対し、$Z_u x$ を $\Gamma(x)$ にそってその正の向きに u の距離の点とする。

Z が可測ファイバー構造であることから $Z_u : x \longrightarrow Z_u x$ はM上の測度を絶対連続に保つ可測変換の一径数群であることが容易にわかる。$\hat{Z}_u x \equiv T Z_u T^{-1} x$ と $\{\hat{Z}_u\}$ を定義すれば、$\{\hat{Z}_u\}$ も又測度を絶対連続に保つ可測変換の一径数群であり、Z が T の transversal field であることから $x \in \Gamma$ ならば、$\hat{Z}_u x \in \Gamma$ 即ち、$\{Z_u x\}$ $\{\hat{Z}_u x\}$ は同じ軌道 Γ をもつ、このことは、$\{\hat{Z}_u\}$ が $\{Z_u\}$ の time change であることを指唆する。即ち、$\exists\, \tau(u,x)$,



$\hat{Z}_u x = Z_{\tau(u,x)} x$ であるが、この $\tau(u,x)$ が、

$$\tau(s_1+s_2, x) = \tau(s_1, x) + \tau(s_2, \hat{Z}_{s_1} x)$$

を充すことは見やすい。今 $s = \tau(s', x)$ とおくとき、

$\lim_{s \to 0} \frac{s'}{s} = \lim_{s' \to 0} \frac{s'}{\tau(s', x)} = \lambda(x)$ は Z が transversal field であることにより，存在する。　このことは，$\{\hat{Z}_u\}$ が $\{Z_u\}$ の $\lambda(x)$ による time change であることを意味している。

§ 2.　圧縮性の流れ

定義 2.1.　$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ をある Lebesgue 空間とするとき，Ω 上の可測変換の一径数群 $\{Z_t\}$ が圧縮性の流れとは，次の二条件を充すときにいう。

(i)　$(t, \omega) \longrightarrow Z_t\omega$ が $(-\infty, \infty)\times\Omega$ から Ω への可測写像．

(ii)　任意の t に対して，$P(A) = 0 \Leftrightarrow P(Z_t A) = 0$。

次に圧縮性の流れ $\{Z_t\}$ に対し flow の special flow による表現と類似の表現を考える。

定義 2.2.　圧縮性の流れ $\{Z_t\}$ が S－表現をもつとは，

Case 1.　Lebesgue 空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ とその上の可測函数 $f(x)$ (>0) が存在して，$\Omega = \{(x, u),\ 0 \leq u < f(x),\ x \in X\}$ $dP(x, u)$ は $d\mu(x)\times du$ と互に絶対連続であり．　X 上の bi-measurable な one-to-one onto な変換 S が存在して $P(A) = 0 \Leftrightarrow P(SA) = 0$，且，次の式を充すときにいう。

$$(2.1)\quad Z_t(x, u) = \left(S^n x,\ t+u-\sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x)\right) \quad \text{for } f(S^n x) > t+u-\sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x) \geq 0.$$

$$= (\bar{S}^{n}, t+u+\sum_{j=1}^{n} f(S^{-j}x)) \quad \text{for } 0 > t+u+\sum_{j=1}^{n-1} f(S^{j}x) \geq -f(S^{-n}x)$$

Case 2.　Case 1 の type の Lebesgue 空間 $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, P_1)$ と圧縮性の流れ $\{Z'_t\}$ が存在し，Ω から Ω_1 への同型写像 (mod 0) T が存在して $TZ_tT^{-1} = Z'_t$ を充すときにいう。

実は，この S－表現を考えることが局所可測ファイバー構造を考えることに対応しており，この§の目的は，S－表現の存在を証明することである。その準備としてやさしい Lemma を示しておく。

Lemma 2.1.　$\{Z_t\}$ を圧縮性の流れとするとき，任意の有界可測函数 $f(\omega)$ に対して

$$(2,2)\qquad \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^a f(Z_t\omega)\,dt = f(\omega) \qquad \text{a.e.}$$

Lemma 2.2.　$\{Z_t\}$ を圧縮性の流れ，$f(\omega)$ を有界可測函数 $|f(\omega)| \leq K$ とすれば，$f_a(\omega) \equiv \frac{1}{a}\int_0^a f(Z_t\omega)\,dt$ は

$$(2.3)\qquad |f_a(Z_t\omega) - f_a(Z_s\omega)| \leq \frac{2K}{|a|}|t-s|$$

を充す。

（証明）　$g(u,\omega) \equiv f(Z_u\omega)$ とおけば，$g(u,\omega)$ は $(-\infty,\infty)\times$ $\times\,\Omega$ 上の有界可測函数である。従ってほとんど全ての ω に対し $g(u,\omega)$ は u の函数として有界可測，よって

$$(2.4)\qquad \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_0^a g(u+t,\omega)\,dt = g(u,\omega) \qquad \text{a.e. } u, \quad \text{a.e. } \omega.$$

$g(u.\omega)$の可測性から Fubiniの定理を使って $\exists u_0$, $\exists N_0 \subset \Omega, P(N_0)=0$.

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^a f(Z_t Z_{u_0}\omega)\,dt = f(Z_{u_0}\omega) \qquad \omega \in N_0$$

Z_{u_0} が 絶対連続性を保つ可測変換だから $P(Z^{-1}_{u_0} N_0)=0$.

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^a f(Z_t\omega)\,dt = f(\omega) \qquad \omega \in N = Z_{-u_0}N_0$$

以上で Lemma 2.1. が示された。次に Lemma 2.2. を示す。

$$|f_a(Z_t\omega) - f_a(Z_s\omega)| = \frac{1}{|a|}\left|\int_{a+s}^{a+t} f(Z_u\omega)\,du - \int_s^t f(Z_u\omega)\,du\right| \le \frac{2k}{|a|}|t-s|$$

Lemma 2.3. $\{Z_t\}$ を不動点をもたぬ圧縮性の流れとすれば, $\{Z_t\}$ は S-表現をもつ。

(証明) flow の special flow による表現定理に準ずる。[3] を参照して以下の証明の概略を補って頂きたい。

1°. 不動点の不存在から, $\exists B \in \mathcal{B}$, $\exists t_0$. $P(B^c \cap Z_{t_0}B) > 0$.
Lemma 2.1. により, $\psi_a = \frac{1}{a}\int_0^a \chi_B(Z_t\omega)\,dt \longrightarrow \chi_B(\omega)$ a.e.
従って $a>0$ が存在して, $B_1 = \{\omega\,;\, \psi_a(\omega) < \frac{1}{4}\}$, $B_2 = \{\omega\,;\, \psi_a(\omega) > \frac{3}{4}\}$ は, $P(B_1 \ominus B^c) < \frac{1}{2}P(B^c \cap Z_{t_0}B)$
$P(Z_{t_0}B_2 \ominus Z_{t_0}B) < \frac{1}{2}P(B^c \cap Z_{t_0}B)$ を充す。そのような a を固定しておけば $P(B_1 \cap Z_{t_0}B_2) > 0$, 又 Lemma 2.2. から $|\psi_a(Z_t\omega) - \psi_a(Z_s\omega)| \le \frac{2|t-s|}{a}$ である。

$$\bar{\varphi}(\omega) \equiv \begin{cases} \sup\{u\,;\, Z_u\omega \in B_1 \cap Z_{t_0}B_2\} \\ -\infty \quad \text{上の如き}u\text{が存在せぬ}, \end{cases} \qquad \underline{\varphi}(\omega) \equiv \begin{cases} \inf\{u\,;\, Z_u\omega \in B_1 \cap Z_{t_0}B_2\} \\ \infty \quad \text{上の如き}u\text{が存在せぬ} \end{cases}$$

とおけば, $\bar{\varphi}(\omega)$, $\underline{\varphi}(\omega)$ は共に可測であって, $\bar{\varphi}(Z_t\omega) = \bar{\varphi}(\omega) - t$

$\underline{\varphi}(Z_t\omega) = \underline{\varphi}(\omega) - t$ が成立する。 このことから

$\Omega_1 = \{\omega;\ \bar{\varphi}(\omega) = \infty,\ \underline{\varphi}(\omega) = -\infty\}$, $\Omega_2 = \{\omega;\ -\infty < \bar{\varphi}(\omega) < \infty\}$

$\Omega_3 = \{\omega;\ \bar{\varphi}(\omega) = \infty,\ \underline{\varphi}(\omega) > -\infty\}$, $\Omega_4 = \{\omega;\ \bar{\varphi}(\omega) = -\infty\}$

とおけば, 各 Ω_j $(j=1,2,3,4)$ は $\{Z_t\}$-不変な可測集合で, $\Omega = \sum_{j=1}^{4}\Omega_j$, $B_1 \cap Z_{t_0}B_2 \subset \sum_{j=1}^{3}\Omega_j$, $\Omega_j \cap \Omega_k = \phi$ $j \neq k$ が成立することと $P(B_1 \cap Z_{t_0}B_2) > 0$ から, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ のいずれかの測度は正となる。

2°. $P(\Omega_1) > 0$ の場合. [3] 71 p. と同様だから簡単に描写する。 $\Omega_1^* \equiv \Omega_1 \cap \{\omega;\ \psi_a(\omega) = \frac{1}{2},\ \psi_a(Z_t\omega) > \frac{1}{2},\ 0 < t < \frac{a}{8}\}$ とおくとき $\omega^* \in \Omega_1^*$ に対し, $f(\omega^*) \equiv \inf\{t > 0,\ Z_t\omega^* \in \Omega_1^*\}$, $S\omega^* \equiv Z_{f(\omega^*)}\omega^*$ と定義すると, Ω_1 は $\{Z_t\}$ の軌道の有限線分 $\{Z_t\omega^*;\ 0 \leq t < f(\omega^*)\}$ に分割される. $\bar{\Omega}_1 = \{(\omega^*, u);\ 0 \leq u < f(\omega^*),\ \omega^* \in \Omega_1^*\}$ と Ω_1 との自然な対応 H を $H(\omega^*, u) = Z_u\omega^*$ で与え, P, $\{Z_t\}$ を H で $\bar{\Omega}_1$ 上にうつしたものを $Z \cdot \bar{P}$, $\{\bar{Z}_t\}$ とおけば, $\{\bar{Z}_t\}$ は $f(\omega^*)$ と S でもって (2.1) の型をしている。 $\bar{\Omega}_1$ の縦線への分割が可測なことと $f(\omega^*)$ が可測なことは, $C_{\omega^*} = \{(\omega^*, u);\ 0 \leq u < f(\omega^*)\}$. $dm_{C_{\omega^*}}(u) = du / f(\omega^*)$ が [3] p.52 の測度の標準系の条件 (C.1), (C.2) を充すことからわかる。 上の dm_{C^*} は flow の場合と異なり 実際の測度の標準系とは異なっているが, 実際の測度の標準系の形は次の Lemma から得られる。

Lemma 2.4. $\Omega = \{(x, u);\ 0 \le u < f(x),\ x \in X\}$. において，$\Omega$の縦線への分割$\zeta$は可測，$f(x)$はLebesgue空間$(X, \mu)$上の正値可測函数であるとし，$dP_\zeta(C_\zeta(x)) = d\mu(x)$ $dP(u \mid C_\zeta(x)) = p(x, du)$であり，更に$\Omega$上の圧縮性の流れ$\{Z_t\}$が(2.1)の型をしているならば，$^\exists p(x, u) > 0$

(2.5) $\qquad p(x, du) = p(x, u)\,du$

(2.6) $\qquad \mu(A) = 0 \iff \mu(SA) = 0.$

(証明) $\{Z_t\}$の絶対連続性，$P(B) = 0 \iff P(Z_tB) = 0$，により密度函数$\infty > \alpha_t(\omega) = \alpha_t(x, u) > 0$ a.e. が存在して

(2.7) $\qquad P(Z_tB) = \int_B \alpha_t(\omega)\,dP = \iint_B \alpha_t(x, u)\,p(x, du)\,d\mu(x)$

一方，$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} f(S^j x)$ $(n \ge 1)$，$= 0$ $(n = 0)$，$= -\sum_{j=1}^{-n} f(S^j x)$ $(n \le -1)$

とおくと，$P(Z_tB) = \iint_{Z_tB} p(x, du)\,d\mu(x) =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \iint_{Z_tB,\ Z_t\{(x,u);\ f(S^n x) > u + t - f_n(x) \ge 0\}} p(x, du)\,d\mu(\cancel{x})$$

$$= \sum_n \iint_{B,\ \{(x,u);\ f(S^n x) > u + t - f_n(x) \ge 0\}} p(S^n x, d(u + t - f_n(x)))\,d\mu(S^n x)$$

(2.7)式と合せて

(2.8) $\qquad \alpha_t(x, u)\,p(x, du)\,d\mu(x) = \sum_n \chi_{\{f(S^n x) > t + u - f_n(x) \ge 0\}} p(S^n x, du + t - f_n(x))\,d\mu(S^n x)\,du$

を得る。$f(x) > t + \mu \ge 0$なるtに対して(2.8)より

$$\alpha_t(x, u)\,p(x, du) = p(x, du + t), \qquad \text{a.e. } \mu$$

即ち，ほとんどすべてのxに対し$p(x, du)$と$p(x, du + t)$は絶対連続，従って$p(x, du)$はduと互に絶対連続であるから$p(x, u) = \dfrac{p(x, du)}{du}$をとれば(2.5)が成立する。

$$(2.8)' \quad \alpha_t(x,u)p(x,u)d\mu = \sum_n \chi_{\{f(S^n x) > t+u-f_n(x) \geq 0\}} P(S^n x, u+t-f_n(x))\, d\mu(S^n x)$$

を得る。もし $A \subset X$ が存在して $\mu(A) > 0$, $\mu(SA) = 0$ ならば、

$f(Sx) > t + u - f(x) \geq 0$ なる t を考えると, $d\mu(x) = \dfrac{P(Sx, u+t-f(x))}{p(x,u)}$

$\times\ d\mu(Sx)$ a.e. u から $\mu(A) = \displaystyle\int_A \frac{P(Sx, u+t-f(x))}{p(x,u)} d\mu(Sx) = 0$ となり

矛盾を生ずる。同様に $\mu(A) = 0$, $\mu(SA) > 0$ も成立しない

から (2.6) を得る。

Lemma 2.3 の証明に戻って, Lemma 2.4. から Ω_1

上では, S-表現をもっていることがわかった。

3°. $P(\Omega_2) > 0$ の場合. $\Omega_2^{(n)} \equiv \{\omega ; n+1 > \xi(\omega) \geq n\}$

とおけば, $\{\Omega_2^{(n)}\}$ は Ω_2 の可測な可算分割. $\Omega_2^{*(n)} \equiv \{\omega$

$; \ \xi(\omega^*) = n\}$ とおくと $Z_1 \Omega_2^{*(n)} = \Omega_2^{*(n-1)}$ である。今

$\Omega_2^* = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_2^{*(n)}$, $f(\omega^*) \equiv 1 \quad \omega^* \in \Omega_2^*$, $S\omega^* \equiv Z_1 \omega^* \quad \omega^* \in \Omega_2^*$

と定義すれば, $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2^* \times [0, 1)$ と Ω_2 の自然な対応

$$H(\omega^*, u) = Z_u \omega^*. \qquad \omega^* \in \Omega_2^* \qquad 0 \leq u \leq 1$$

により, P. $\{Z_t\}$ を $\overline{\Omega}_2$ 上へうつした $\overline{P} = P(H\ \cdot\ )$,

$\{\overline{Z}_t = H^{-1} Z_t H\}$ が Ω_2 上の $\{Z_t\}$ の S-表現 になってい

ることは, 2° の証明と同様にわかる。

4°. Ω_3 においては, $\Omega_3^{(n)} = \{\omega ; n+1 > \xi(\omega) \geq n\} \cap \Omega_3$

について 3° と同様に考えればよい。

5° Ω_4 に対しては, Ω に対して行ったのと同様の議論

1°) ～ 4°) を繰返す

この 1°) ～ 5°) の過程は可算回で完了し，S-表現を得る。

§ 3. Automorphism の transversal field.

定義 3.1. $\{Z_t\}$ を圧縮性の流れとするとき，$(-\infty, \infty) \times \Omega$ 上の可測函数 $\varphi(t, \omega)$ が additive functional とは

(A.1) $\varphi(t, \omega)$ は全ての t に対して有限値.

(A.2) $\varphi(t, \omega)$ は t に関し連続非減少

(A.3) $\varphi(t+s, \omega) = \varphi(s, \omega) + \varphi(t, Z_s \omega)$

(A.5) $\varphi(0, \omega) = 0$, $\lim_{t \to \pm\infty} \varphi(t, \omega) = \pm\infty$.

を充すときにいう。

仮定 1. additive functional $\varphi(t, \omega)$ に対し，可積分函数 $\lambda(\omega) > 0$ が存在して，

(3.1) $\varphi(t, \omega) = \int_0^t \lambda(Z_s \omega) ds.$

定義 3.2. $\{Z_t\}$ の additive functional $\{\varphi(t, \omega)\}$ による time change $\{\tilde{Z}_t\}$ とは，$\tau(t, \omega) \equiv \sup\{s ; \varphi(s, \omega) \leq t\}$ でもって，$\tilde{Z}_t \omega \equiv Z_{\tau(t, \omega)} \omega$ として定義される可測な変換の一径数群をいう。

定義 3．3．　Tを Lebesgue 空間Ωの automorphism $\{Z_t\}$ を圧縮性の流れとするとき，$\{Z_t\}$がTの transversal field とは，　仮定1　を充す$\{Z_t\}$の additive functional $\varphi(t,\omega)=\int_0^t \lambda(Z_s\omega)ds$　が存在して，$\{\varphi(t,\omega)\}$による$\{Z_t\}$の time change $\{\hat{Z}_t\}$が

$$TZ_tT^{-1}\omega = \hat{Z}_t\omega \tag{3.2}$$

を充すときにいう。　又，

$\lambda(\omega)>1$　$(\lambda(\omega)<1)$　のとき$\{Z_t\}$を拡大（縮少）する transversal field，　$\lambda(\omega)\geq{}^{\exists}\lambda_0>1$　$(\lambda(\omega)\leq\lambda_0<1)$　のとき strict に拡大（縮少）する transversal field と呼び $\lambda(\omega)$を伸張係数と呼ぶことにする。

定理 1．　Tを automorphism，$\{Z_t\}$をその拡大又は縮少する transversal field とし，ξをTの ergodic part への可測分割，　ν_Z　を$\{Z_t\}$の軌道への分割の可測被覆とすれば，

$$\xi < \nu_Z \tag{3.3}$$

系 1．　Tを automorphism．$\{Z_t^\alpha\}_\alpha$　を縮少又は拡大している transversal field の族とすれば，

$$\xi < \bigwedge_\alpha \nu_{Z^\alpha} \tag{3.3$'$}$$

定義 3.4. 圧縮性の流れ $\{Z_t\}$ において，$\{Z_t\}$-不変な可測集合 A の測度は全て $P(A)=0$ or $P(A^c)=0$ のときに $\{Z_t\}$ を *metrically transitive* という。 この条件は，ν_Z が *tribial* な分割れであることと一致する。

系 2. automorphism T が拡大又は縮少する *metrically transitive* な *transversal field* をもてば，T は ergodic.

（定理１の証明） $\{Z_t\}$ を拡大している *transversal field* としよう。 Lemma 2.2 により $|f(Z_t\omega)-f(Z_s\omega)|\le K|t-s|$ を充す $f(\omega)$ は $L^1(\Omega)$ で *dense* である。 このような $f(\omega)$ に対して，$\bar{f}_+(\omega)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T^k\omega)$ がほとんどいたるところ存在して $\mathcal{B}(\nu_Z)$-可測である。 何故ならば，$\tau^n(t,\omega)$ $=\int_0^t\frac{1}{\lambda(TZ_s\omega)\cdots\lambda(T^nZ_s\omega)}ds$ とおけば，$\lambda(\omega)>1$ だから $\lim_{n\to\infty}[\lambda(\omega)\cdots\lambda(T^{n-1}\omega)]^{-\frac{1}{n}}=\exp\{E[\log\lambda(\omega)|\xi]\}>1$ a.e. が成立することから $\lim_{n\to\infty}\tau^n(t,\omega)=0$ a.e. を得て，

$$|f(T^nZ_t\omega)-f(T^n\omega)|=|f(Z_{\tau^n(t,\omega)}T^n\omega)-f(T^n\omega)|$$

$$\le K|\tau^n(t,\omega)|\longrightarrow 0\quad \text{a.e.}\quad (n\to\infty)$$ に注意すれば，

$$\bar{f}_+(Z_t\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T^kZ_t\omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T^k\omega)=\bar{f}_+(\omega)\ \text{a.e.}$$

が成立することによる。 以上のことから T-不変可測集合は $\{Z_t\}$-不変となり，$\xi<\nu_Z$ を意味する。

縮少している場合も同様である。　　　（証明終）

定理 2.　エルゴード的な automorphism T が strict に拡大している transversal field $\{Z_t\}$ を持てば $\{Z_t\}$ の軌道の線分への可測分割 ζ が存在して

i) $T\zeta > \zeta$

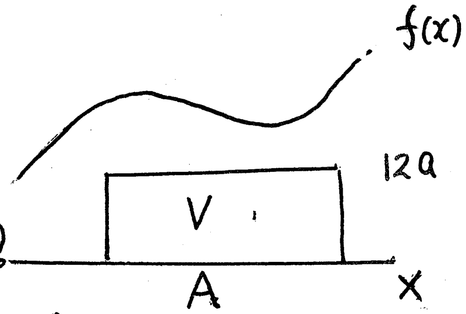
ii) $\bigvee T^k\zeta = \varepsilon$

iii) $\bigwedge T^k\zeta = \nu_Z$

iv) $H(T\zeta|\zeta) = E\{\log\lambda(\omega)\}$.

系　更に $\{Z_t\}$ が metrically transitive ならば (T, ζ) は K-system である。

（証明） Sinai [1] 定理 5.1. と同様に出来る。S-表現を考え, $V = A \times [0, 12a] \subset \Omega$, $\lambda(\omega) \geq \lambda_0 > 1$, $\omega \in V$ $\mu(V) > 0$ となるよう A, a を定める（定理の条件をゆるめて, "strict" の代に上の如き V の存在を仮定すればよい）。



今, b_1, b_2, $c > 0$ を適当に定めれば, $8a > b_1 > 7a$, $5a > b_2 > 4a$, $B \equiv \{x ; \int_{-4a}^{4a} \log\frac{1}{|u|} \cdot p(x, b_1+u)\,du \leq c$, $\int_{-4a}^{4a} \log\frac{1}{|u|} \cdot p(x, b_2+u)\,du \leq c\} \cap A$.　$\mu(B) > 0$ が

充されるように出来る。 $V_1 \equiv B \times (b_2, b_1)$ とおいて，以後は [1]の定理5.1の証明をたどればよい。 （証明終）

Proposition 3.1. Tをautomorphism，$\{Z_t\}$をその transversal field で伸張係数は$\lambda(\omega)$とするとき，正値函数 $\mu(\omega)$による$\{Z_t\}$の time change $\{\tilde{Z}_t\}$は，再びTの transversal field であり，その伸張係数$\tilde{\lambda}(\omega)$は，

(3, 4) $$\tilde{\lambda}(\omega) = \lambda(\omega)\, \mu(T^{-1}\omega)/\mu(\omega)$$

（証明） $\psi(t,\omega) \equiv \int_0^t \mu(Z_s\omega)\,ds$，$\sigma(t,\omega)$ を $\psi(t,\omega)$の逆函数としよう。 $\tilde{Z}_t = Z_{\sigma(t,\omega)}\,\omega$ だから， $T\tilde{Z}_t T^{-1}\omega = T Z_{\sigma(t,T^{-1}\omega)} T^{-1}\omega = Z_{\tau(\sigma(t,T^{-1}\omega),\omega)}\,\omega = \tilde{Z}_{\psi(\tau(\sigma(t,T^{-1}\omega),\omega),\omega)}\,\omega$ が成立することから明らか。 （証明終）

Proposition 3.2. Tをautomorphism，$\{Z_t\}$をその transversal field で伸張係数は$\lambda(\omega)$とし更に，$\{Z_t\}$は絶対連続で有限の確率測度Q をもつとしよう。即ち， $P \sim Q$， $Q(Z_tA) = Q(A)$ $\forall t, \forall A \in \mathcal{B}$を充すとすれば次のことが成立する。

(i) $g(\omega) = \frac{dQ}{dP}$ とおけば，任意のtに対し

$$K(\omega) \equiv \lambda(\omega)\, g(T^{-1}\omega)/g(\omega) = \lambda(TZ_tT^{-1}\omega)\, g(Z_tT^{-1}\omega)/g(TZ_tT^{-1}\omega)$$

ii) $\{Z_t\}$の entropy は

$$h(\{Z_t\}) = h(\{\hat{Z}_t\}) = \kappa\, h(\{Z_t\}) \qquad \kappa = \int \lambda(\omega)\, dQ$$

従って． $\kappa \neq 1$ ならば $h(\{\hat{Z}_t\}) = 0$ or ∞.

iii) $\{Z_t\}$ が *metrically transitive* ならば

$$\kappa(\omega) = \kappa \quad \text{a.e.} \qquad \log \kappa = \int \log \lambda(\omega)\, dP$$

（証明） 省略 H. Totoki [2] 定理4.2． 定理10.1．から直に導かれる結果である。

§4 Flow の transversal field.

定義 4．1． 圧縮性の流れ $\{Z_s\}$ が可測な flow $\{T_t\}$ の transversal field であるとは，$\{Z_s\}$ の additive functional（t を固定して）の系 $\varphi(s, t, \omega)$ が存在して，$\{T_t Z_s T_{-t}\}$ が $\{Z_s\}$ の $\varphi(s, t, \omega)$ による time change であり $\varphi(s, t, \omega)$ は $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times \Omega \longrightarrow (-\infty, \infty)$ への可測写像であって

$$(4,1) \qquad \varphi(s, t_1 + t_2, \omega) = \varphi(\varphi(s, t_1, \omega), t_2, T_{-t_2}\omega)$$

を充すものとする。

定義 4．2． $\{Z_s\}$ を $\{T_t\}$ の transversal field とするとき， 可測函数 $\alpha(\omega)$ が存在して，

$$(4,2) \qquad \lambda(t, \omega) = \exp\left[\int_{-t}^{0} \alpha(T_u \omega)\, du\right]$$

(4.3) $\varphi(s, t, \omega) = \int_0^s \lambda(t, Z_v \omega) dv$

と表わされ

$\alpha(\omega) > 0$ (<0) のとき，$\{Z_t\}$ は拡大（縮少）するといい，$\alpha(\omega) \geq {}^\exists\alpha_0 > 0$ ($\alpha(\omega) \leq {}^\exists\alpha_0 < 0$) のとき $\{Z_t\}$ は，strict に拡大（縮少）する transversal field という。

定理 3. $\{Z_s\}$ を flow $\{T_t\}$ の拡大又は縮少する transversal field，ξ を $\{T_t\}$ の ergodic part への可測分割とすれば，

(4.4) $\xi < \nu_Z$

（証明） 定理1の証明と同様に，$|f(Z_{s_1}\omega) - f(Z_{s_2}\omega)| \leq K|s_1 - s_2|$ なる有界可測函数 $f(\omega)$ に対して，$\bar{f}_+(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N f(T_t\omega)\,dt$ は，殆んど全ての ω に対して存在し，(4.1) から $\tau(s, t, T_t\omega) = \varphi(s, -t, \omega)$ を得ることに注意すれば，殆んど全ての ω に対し

$|f(T_t Z_s \omega) - f(T_t\omega)| = |f(Z_{\varphi(s,-t,\omega)} T_t \omega) - f(T_t\omega)|$

$\leq K|\varphi(s, -t, \omega)| \longrightarrow 0 \qquad t \to \infty$ が成立することから，$\bar{f}_+(\omega) = \bar{f}_+(Z_s\omega)$ for ${}^\forall s$, ${}^\forall\omega$，Lemma 2.1, 2.2 から (4.4) を得る。

定理 4. $\{T_t\}$ を可測な flow，$\{Z_s\}$ をその拡大している transversal field で strict に拡大しているならば

可測分割 ζ が存在して

(i) $T_t\zeta > \zeta$

(ii) $\bigvee T_t\zeta = \varepsilon$

(iii) $\bigwedge T_t\zeta = \nu_Z$

(iv) $H(T_t\zeta|\zeta) = -|t|\int \alpha(\omega)dP.$

定理 5. $\{Z_s\}$ を flow $\{T_t\}$ の metrically transitive で，不変測度 Q をもつ transversal field とすれば，定数 $\kappa > 0$ が存在して，

(i) $\kappa^t = \int \lambda(t,\omega)\,dQ$

(ii) $\log\kappa = \int \alpha(\omega)\,dP$

(iii) $R\{Z_t\} = 0$ or ∞, 又は $\kappa = 1$.

§ 5. 例

1°. 一般化したパイコネと Bernoulli automorphism

$\Omega = \{(x,y)\ ;\ 0 \le x, y < 1\}$, $dP = dx\cdot dy$ とし．

p_j $(j=1,\cdots,N)$ を $0 < p_j$ $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$ なる数として Ω 上の automorphism T を，$T(x,y) = (x', y')$

$$x' = \frac{1}{p_k}\left(x - \sum_1^{k-1} p_j\right),\quad y' = p_k y + \sum_1^{k-1} p_j \qquad \text{if } \sum_1^{k-1} p_j \le x < \sum_1^{k} p_j$$

と定義すれば，これは $\bmod 0$ で Bernoulli automorphism と isomorphic である。$\{Z_s\}$ を $f(x)\equiv 1$，$[0,1)$ 上の ~~可測変換~~ S；$Sx=\left(\frac{p_1}{p_N}\right)^m\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}(x-g_{k-1})+g_k\right.$ if $1-p_N^m+p_N^m g_{k-1}\leq x<1-p_N^m+p_N^m g_k$　$k=1,2,\cdots,N-1$，$m=0,1,2,\cdots$

但し．$g_k=\sum_1^k p_j$　$g_0=0$，とおく．でもって S－表現される圧縮性の流れとすれば，$\{Z_s\}$ は T の transversal field であって，その伸張係数は

(5.1)　　$\lambda(x,y)=1/p_k$　　$\sum_1^{k-1}p_j\leq y<\sum_1^k p_j$.

このとき，定理2の分割 ζ は．具体的に．Ω の縦線への分割として与えられ．$h(T)=h(T\zeta|\zeta)=E[\lambda(x,y)]=-\sum_{k=1}^N p_k\log p_k$ は良く知られている。

更に，$p_1=\cdots=p_N=\frac{1}{N}$ の時．$\{Z_t\}$ は flow であって．その spectre は，N－進小数全体のなす discrete 体であり $h\{Z_t\}=0$．例えば，$N=p^m$　$m=1,2,\cdots$．のとき，対応する automorphism T_m は同じ spectre type の transversal flow をもつ。このような事実は．この報告．小和田氏の項と比較して興味深い。（実は T_m は T_1^m と同型）

又，上の場合以外は．$\{Z_s\}$ は不変測度をもたない。

2° 二次元 Brown 運動の flow の transversal field.

$(B^{(1)}(x), B^{(2)}(x))$ を2次元Brown 運動 $(-\infty < x < \infty)$, $\{T_t\}$ をその shift の flow, 即ち, $B^{(j)}(x, T_t\omega) - B^{(j)}(y, T_t\omega) = B^{(j)}(x+t, \omega) - B^{(j)}(y+t, \omega)$ $j=1.2.$ とする。この二次元Brown 運動から Ornstein-Uhlenbeck の Brown運動 $(X_\lambda^{(1)}, X_\lambda^{(2)})$ を作り, $\{T_t\}$ がその shift の flow であるようにする。

$$X_\lambda^{(j)}(x,\omega) \equiv \sqrt{\frac{\log\lambda}{2}}\,\lambda^{-\frac{x}{2}}\int_{-\infty}^{x} \lambda^{\frac{u}{2}}\, dB^{(j)}(u,\omega) \qquad j=1.2. \qquad \lambda>1$$

と定義すれば, 求めるものが得られる。 更にこれから, 別の一次元Brown 運動 $B_\lambda(y,\omega)$ を.

$$B_\lambda(y,\omega) \equiv \begin{cases} y^{\frac{1}{2}} X_\lambda^{(1)}\left(\dfrac{\log y}{\log\lambda}, \omega\right) & y>0 \\ (-y)^{\frac{1}{2}} X_\lambda^{(2)}\left(\dfrac{\log(-y)}{\log\lambda}, \omega\right) & y<0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

で定義する。 これが一次元 Brown 運動であることは容易に確られ, 又良く知られている。 この Brown 運動の shift の flow を $\{Z_s\}$ とすると.

(5,2) $\qquad T_t Z_s T_{-t} = Z_{\lambda^{-t}s}$

を得て, $\{Z_s\}$ は $\{T_t\}$ の伸張係数 λ をもつ transversal flow であることがわかる。 この例は定理5 で示した $h\{Z_s\} = \infty$ の場合の例を与えている。 (5,2) の証明は, 例えば, $y>0$, $s>0$ のときには,

$$B(y, T_t Z_s T_{-t}\omega) = y^{\frac{1}{2}} X_\lambda^{(1)}\left(\frac{\log y}{\log\lambda} + t, Z_s T_{-t}\omega\right) = \lambda^{\frac{t}{2}}[B(\lambda^{+t}y + s, T_{-t}\omega) - B_\lambda(s, T_{-t}\omega)] = B_\lambda(y+\lambda^{-t}s, \omega) - B_\lambda(\lambda^{-t}s, \omega) =$$

$= B_\lambda(y, Z_{\lambda^t s}\omega)$, により示される。

上の例を、$\mathcal{S}'$ 上の Gaussian whitenoise の空間で言えば

T_t^* ; $\varphi \longrightarrow \lambda^{-\frac{t}{2}}\varphi(\lambda^{-t}x)$; $\varphi \in \mathcal{S}$, T_t は T_t^* の dual

Z_s^* ; $\varphi \longrightarrow \varphi(x-s)$; $\varphi \in \mathcal{S}$, Z_s は Z_s^* の dual.

とおけば、$\{T_t\}$, $\{Z_s\}$ は $\mathcal{S}'$ 上の flow であって

$$T_t^* Z_s^* T_t^{*-1}\varphi(x) = \lambda^{-\frac{t}{2}}(Z_s^* T_t^{*-1}\varphi)(\lambda^{-t}x) = \lambda^{-\frac{t}{2}} T_t^*\varphi(\lambda^{-t}x - s)$$

$$= \varphi(x - \lambda^t s) = Z^*_{\lambda^t s}\varphi(x)$$

なことから　$T_t Z_s T_t^{-1} = Z_{\lambda^{-t}s}$ を充す。ことに対応している。

文献

[1] Я. Г. Синай ; Классичеекие динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II. Известия. Акad. Наук. СССР Серия Мат 30 (1966)

[2] H. Totoki ; Time changes of flows. Memoirs. Fac. Sci. Kyushu. Univ. 20. No. 1. (1966)

[3] 十時　東生 ; Flow とエントロピー. Sem. on Prob.