数理解析研究所講究録
第 21 巻 1967 年 28-36

From homotopy to homeomorphy

九大 工　　田尾 鷄三

"多様体を位相的に分類する問題はどの程度 homotopy 論の範囲で解決されるか？"ということが話の主題であります。"Hurewicz の予想（= homotopy 型のひとしい多様体は同相か）"以来の伝統的問題でありますが"Hurewicz の予想が否定的に解かれている現在，我々はより精密な議論をする必要があるわけです。さて，多様体に何らかの"構造"がないと現在では中々扱いにくい状態なので我々は Combinatorial structure（= piecewise linear structure 略して PL-structure）を入れ，それを媒介として問題を二つの段階に分けて考えることにします。

問題 1. 位相多様体には PL-structure が入るか？更に一意的に入るか？（triangulation problem と Hauptvermutung）

問題 2. PL-manifold を PL-equivalence で分類せよ。

問題1が肯定的ならば勿論問題2の分類は"位相多様体の位相的分類"と同値になります。我々の問題は"問題1，2をどのようにしてhomotopy論の問題に帰着させるか？"ということですが，最初問題2を説明し，ついで問題1に対するD. Sullivanのobstruction theoryを紹介したいと思います。

さて，問題2をhomotopyの問題に帰着するためには次の二つの問題が解ければよいわけです。

問題A．PL-manifoldのhomotopy型を持つ複体をhomotopyの範囲でcharacterizeすること。

問題B．PL-manifoldのhomotopy型Kが与えられたとき，Kとhomotopy型を同じくする全てのPL-manifoldを（PL-isomorphismを同一視して）homotopicalに数え上げること。

問題Aからはじめます。先ず気付くことは，複体Kがmanifold（simply connected，closedとする。）のhomotopy型を持つと必然的にPoincaré dualityに相当するものが成立しなければなりません。即ち，或る正の整数nに対してKのn次元（整係数）homology groupがinfinite cyclic group Zに同型であり，そのgeneraterをgとすれば，$\cap g\,;\ H^i(K;Z) \longrightarrow H_{n-i}(K;Z)$が全ての$i$に対し

て isomorphism を引きおこしています。このような複体を我々は n 次元 Poincaré 複体とよぶことにします。さて，K 上の一般の spherical fibre space ξ に対し Thom isomorphism Φ ; $H_n(K) \longrightarrow H_{n+k}(T(\xi))$ が考えられますが，特に K が simply connected な Poincaré complex の場合には Φ_ξ が spherical な stable spherical fibre space が一意的に存在することが M. Spivak により知られています。このことは次の様に言い換えてもよいわけです。即ち，B_G を stable spherical fibre space の classifying space とするときに，K から B_G への Φ_g が spherical になるような（homotopy を無視して）唯一つの写像 f ; $K \longrightarrow B_G$ が存在する。こゝに Φ は f より induce される K 上の spherical fibre space の Thom isomorphism であります。さて，この f を Poincaré complex K の Spivak 写像と名付けることにします。この Spivak 写像を用いますと問題Aは次の様な形で解決されます。

定理A. K を単連結 n 次元 Poincaré 複体（$n > 5$）とし，f ; $K \rightarrow B_G$ を K の spivak 写像とする。K が閉ぢた n 次元 PL-manifold の homotopy 型を持つための必要十分条件は，K から B_G への或る写像 g ; $K \rightarrow B_{PL}$ が存在して次の diagram が homotopy commutative なことである。

$$
\begin{tikzcd}
 & B_G \\
K \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & B_{PL} \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

こゝで B_{PL} は stable PL-bundles の classifying space である。

次に問題Bについてですが，simply connected PL closed n-manifold $(n>5)$ をMとし，Mと同じ homotopy 型をもつ PL-manifold の全体を PL(M) とかきます。このとき次の定理が成り立ちます。

定理B. $PL(M) = [M_0, G/PL]$

こゝで $M_0 = M - \mathrm{Int}(D)$ (DはM内に埋入したn次元disk) であり G/PLは $B_{PL} \longrightarrow B_G$ の fibre とします。又 $[X, Y]$ は space X から space Y への写像全体の homotopy 類を意味します。

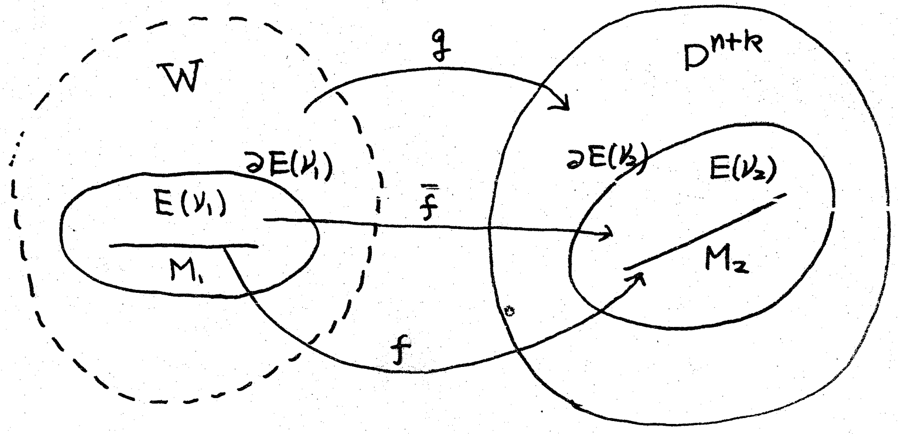
定理A，Bにより問題2は simply connected closed PL-manifold $(n>5)$ に対して解かれたと考えられます。さて，次に問題1に対する D.Sullivan の obstruction theory を説明するわけですが，それは次の Browder-Hirsch による Browder-Novikov の定理の PL-analogy の精密化でもあるわけです。

定理 (Browder-Hirsch) M_i $(i=1,2)$ を closed simply connected PL・n-manifolds とする。($n \geqq 5$)。M_1 と M_2 が PL-isomorphic である必要十分条件は M_i の embedding $M_i \subset S^{n+k}$ ($i=1,2$) と normal equivalence b ; $(M_1; \nu_1) \to (M_2; \nu_2)$ が存在して $T(b)_*(c_1) = c_2$ を満足することである。こゝに c_i は $M_i \subset S^{n+k}$ ($i=1,2$) の normal invariants, 即ち $T(\nu_i)$ ($i=1,2$) を $M_i \subset S^{n+k}$ の normal PL-bundle ν_i の *Thom complex* とするとき $c_i \in \pi_{n+k}(T(\nu_i))$ は collapsing 写像 $S^{n+k} \to T(\nu_i)$ の homotopy 類, $T(b)_*$ は b により引きおこされる自然な homomorphism $T(b)_*$; $\pi_{n+k}(T(\nu_1)) \to \pi_{n+k}(T(\nu_2))$ とします。この Browder-Hirsch の定理の系として Hauptvermutung に対する次の結果を得る。

定理 (Browder-Hirsch) M を simply connected closed PL n-manifold ($n \geqq 5$) とする。今, 次の自然な写像 $k_{PL}(M) \to k_{TOP}(M)$ が injective で更に $k_{PL}(\Sigma M) \to k_{TOP}(\Sigma M)$ が surjective ならば, M に対して Hauptvermutung が成立する。こゝに ΣM は M の suspension とする。

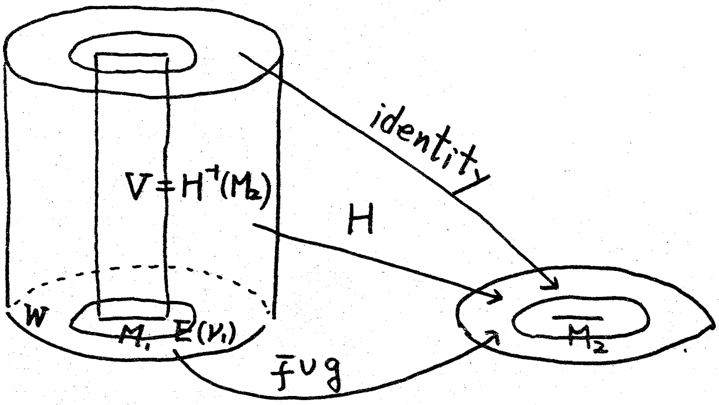
さて, Browder-Hirsch の定理をより幾何学的に考察することにより Hauptvermutung の問題は実は或種の cobordism construction の問題に reduce することがわかります。

まずはじめにM_2を十分大きな次元の disk D^{n+k}に埋入しておき，その normal disk bundle をν_2とします。M_1からM_2への homeomorphism fによりν_2からM_1上に induced される PL disk bundle をν_1とします。更に，ν_1の total space $E(\nu_1)$からν_2の total space $E(\nu_2)$へfを cover する様な写像を$\bar{f}$とします。$E(\nu_2)$はD^{n+k}に埋入されていますが，$D^{n+k}-\mathrm{Int}(E(\nu_2))$は$D^{n+k}$の境界である$S^{n+k-1}$と$E(\nu_2)$の boundary $\partial E(\nu_2)$の PL-cobordism を与えています。又$\bar{f}$を$E(\nu_1)$の boundary $\partial E(\nu_1)$に制限した写像は homotopy equivalence



$\partial\bar{f}: \partial E(\nu_1) \to \partial E(\nu_2)$を与えています。さて，今$\partial E(\nu_1)$を boundary とする様な PL-cobordism Wと$\partial\bar{f}$の extension になる様なWから$D-\mathrm{Int}(E(\nu_2))$への homotopy equivalence gが存在したとします。すると$\bar{f}$とgとを合せる

ことにより $W \cup E(\nu_1)$ から D^{n+k} への homotopy equivalence が存在することになりますが，generalized Poincaré conjecture により $W \cup E(\nu_1)$ は $(n+k)$-次元 disk になります。従って f と g とを合せて作った写像は D^{n+k} からそれ自身への homotopy equivalence になり identity に homotopic になります。この homotopy H ; $D^{n+k} \times I \longrightarrow D^{n+k}$ ($I = [0,1]$) を M_2 上で t-regular に修正し $H^{-1}(M_2)$ を考えます。



$H^{-1}(M_2)$ は M_1 と M_2 の PL-cobordism V を与えています。次に V に PL-surgery をほどこして M_1 と M_2 の PL-h-cobordism V' に変形します。そうすれば，PL h-cobordism theorem を用いることにより M_1 と M_2 は PL-isomorph な PL-manifolds になります。こゝで PL-h-cobordism theorem を使うため考えている manifold の次元は 6 次元以上としなければなりません。以上の考察により Hauptvermutung の本質は（少くも simply connected で6次元以上の多様体に対しては）次の cobordism construction problem になったわけです。

cobordism construction problem ; W を二つの PL-manifolds M, M′ 間の PL-cobordism とし，f を PL-manifold N から M への homotopy equivalence とする。このとき，どの様な条件の下に N を boundary とする PL manifold V と V から W への homotopy equivalence F が存在して F が f の extension になるか？

こゝまできますと Hauptvermutung は極めて homotopy 的な問題であることがわかります。D. Sullivan は，この cobordism construction problem に対して或る条件の下に obstruction theory を構成し，かゝる cobordism construction problem の obstruction は framed almost closed manifolds の framed cobordism classes のなす群

$$P_k = \begin{cases} 0 & k \ ; \ \text{odd} \\ Z_2 & k \equiv 2 \pmod 4 \\ Z & k \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

を係数とする cohomology 群 $H^{k+1}(W, M\,;\,P_k)$ の中にあり，従ってこれらの cohomology 群が消える manifolds に対しては Hauptvermutung が成り立つことを示しました。

彼は更に obstruction を計算し次の定理を得ています。

定理（Sullivan） M^n を simply connected closed PL-manifold（$n \geq 5$）とする。Mが次の條件を満足すれば M上の PL-structure は一意的である。

(1) $H^{4i+2}(M^n; Z_2) = 0 \quad 4i+2 < n$

(2) $H^{4i}(M^n; Z) =$ free abelian $\quad 4i < n$

$P_k \cong \pi_k(G/PL)$ であるが obstruction を更に詳しく調べる問題が将来に残されている。

以上，講演の要旨です。

References

[1] W. Browder - M. Hirsch ; Surgery on piecewise linear manifolds and applications, Bull. A.M.S. 72 (1966) 959 - 964.

[2] R. Lashof - M. Rothenberg ; On the Hauptvermutung, triangulation of manifold and h-cobordism 同上 1040 - 1043.

[3] D. Sullivan ; Ph.D. Thesis, Princeton Univ. 1966.

[4] J.B. Wagoner ; Smooth and Piecewise linear surgery

[5] J.B. Wagoner ; Producing PL-homeomorphism by surgery

([4], [5] to appear in Bull. A.M.S.)