

## Combinatorial Prebundle

都立大

加藤 十吉

### 1. Prebundle.

定義:  $P$  を多面体,  $p \in P$  の一点とする.  $(P, p)$  が prebundle とは, 次から成る triple  $E = \{E, K, \Sigma\}$  のことである.

- (1)  $E$  ; 多面体 (全空間)
- (2)  $K$  ; 複体 (底複体)
- (3)  $\Sigma$  ; 次の4つの条件 (a)~(d) をみたす対  $(A, f)$  の集まり. ( $A$  上の自明化とよばれる)
  - (a) 各対  $(A, f)$  は  $K$  の単体  $A$  と, PL embedding  $f$  ;  $A \times P \rightarrow E$  から成る.
  - (b) 各単体  $A \in K$  に対し, 少なくとも1つの対  $(A, f)$  が存在し,  $\bigcup_{(A, f) \in \Sigma} f(A \times P) = E$  となる.
  - (c)  $(A, f), (B, g) \in \Sigma$  で,  $A \cap B$  が空でない単体  $C$  なら,  $f(C \times P) = g(C \times P)$  かつ  $f|_{C \times \{p\}} = g|_{C \times \{p\}}$ .

(d)  $\Sigma$  は (c) に関して最大である。

もう1つの  $(P, p)$  prebundle  $E' = \{E', K, \Sigma'\}$  が、 $E$  に同型とは、PL 同相写像  $h: E \rightarrow E'$  が存在し、 $\forall (A, f) \in \Sigma, \forall (A, g) \in \Sigma'$  に対して  $h \circ f(A \times P) = g(A \times P)$  かつ、 $h \circ f|_{A \times \{p\}} = g|_{A \times \{p\}}$  となるときをいう。(詳しくは [5] 参照のこと)

(例) 積 prebundle.

積多面体  $|K| \times P$  は、 $(\forall A \in K) A \times P \subset |K| \times P$  なる包含写像をとれば、これを  $A$  上の目明化として、prebundle の構造をもつことになる。これを積 prebundle と呼び、単に、 $K \times (P, p)$  と表わす。

$P$  prebundle という概念も、 $(P, p)$  prebundle と同様に (但し、 $p$  に関する条件をとり去って) 定義される。上の例からわかるように、prebundle とは積多面体の抽象である。以前から考えられていた fibre bundle は fibre structure (即ち、projection) をも抽象しているが、prebundle ではそれまで抽象しない。むしろ prebundle は常に fibre bundle となるかという点に興味がある。念のため、PL-category の fibre bundle を次に定義しておく。 $(P, p)$  bundle とは、図式  $B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$  で、

(i)  $E, B$  は多面体で、全空間、底空間と呼ばれ、

(2) PL 写像  $j; E \rightarrow B$  は PL 写像  $i; B \rightarrow E$  に関し

て次の局所自明条件を満たす。

$B$  の各点  $x_0$  に対し,  $x_0$  の  $B$  における近傍  $U$  及び

PL 同相写像  $f; U \times P \rightarrow j^{-1}(U)$  が存在し,  $j \circ f(x,$

$$y) = x, \quad f(x, p) = i(x) \quad (\forall x \in U, \forall y \in P)$$

$(P, p)$  bundle の理論では, induced bundle, covering homotopy theorem 等の general theory が成立している。

とくに,  $B$  のある単体分割  $K$  に関して, その underlying prebundle が得られる。この逆が可能か? 即ち, いかなる  $(P, p)$  prebundle もある  $(P, p)$  bundle の underlying prebundle となるか? という問題は後でわかるように否定される。

$(P, p)$  bundle の主 bundle の作り方は, Milnor の microbundle の C.S.S. 主 bundle の作り方と全く同様にして,

(isomorphism germ を isomorphism そのものにおきかえて) 定義される。prebundle の主バンドルは, C.S.S. bundle ではなく, 抽象複体の bundle (a.s. bundle) を考えることにより定義される。

定義;  $(P, p)$  prebundle の構造群  $PR(P, p)$  .

$PR(P, p)$  の  $k$  simplex とは, 積 prebundle  $\Delta_k \times (P, p)$  の同型写像  $h; \Delta_k \times (P, p) \rightarrow \Delta_k \times (P, p)$  であり,  $\Delta_k$  の

face  $\Delta'$  に対し対応する face  $\mathfrak{R}|\Delta' \times (P, p)$  をもつとする。  
 但し,  $\Delta_k$  は標準的な単体および, それを cover する複体を表  
 わすとする。この様にして,  $PR(P, p)$  は抽象複体の構造を  
 もつ。しかし, degeneracy operator は自然には決らぬ。  
 ぶつうのやり方では, standard mistake により PL cate-  
 gory を出してしまふからである。幸いなことに,  $PR(P, p)$   
 の特殊性から, homotopy group  $\pi_k(PR(P, p))$  が定義で  
 きる。即ち, Kan の combinatorial method を模倣すれば  
 良い [4]。そのとき, Kan の拡大条件が  $PR(P, p)$  に対し  
 成立し, Kan が degeneracy operator を使っているところ  
 が初等的な trick によって PL 同相写像の性質で書きか  
 えられぬのを見ればよい。

prebundle の主 bundle は a.s.  $PR(P, p)$  bundle とし  
 て定義される。そして, prebundle を trivialize するた  
 めの障害の理論が係数群  $\pi_k(PR(P, p))$  で論じられる。

Notation :

$J^n$  ; n-cube ( $[-1, 1] = J$  の  $n$  重積)

$0 = (0, \dots, 0) \in J^n$

とおき, prebundle の構造群を次の様にかく。

$$PR(J^n, 0) = PR_n$$

$$PR(\dot{J}^n, 0) = \dot{PR}_n$$

$$PR(j^n, (0^{n-1}, 1)) = \dot{PR}_{*n}$$

$$PR(\dot{j}^n, 0) = \dot{PR}_n$$

( $j^n$  は  $J^n$  の境界  $(n-1)$  sphere,  $\dot{j}^n$  は  $J^n$  の内部 ( $R^n$  と PL 同相))

これらの間に次の関係がある。

$$PR_n \simeq \dot{PR}_n \quad (\simeq \text{は weak homotopy equivalence})$$

これは, join extension argument で示される。

$$\dot{PR}_{*n} \simeq PR_{n-1}$$

これは, relative regular neighborhood の一意性により示される。

$\pi_k(\dot{PR}_n, \dot{PR}_{*n}) \cong 0 \quad (k \leq n-2)$  がすべての  $n$  についていえる。この場合は  $n \geq 4$  or  $k \geq 2$  のときは, Zeeman の unknotting theorem で,  $k=1, n=3$  のときは Gluck の結果 [1] による。

かくて, 安定定理

$$\pi_k(PR_n) \cong \pi_k(PR_{k+2}) \quad (\forall n \geq k+2)$$

が得られる。

## 2. 法 prebundles

$(J^n, 0)$  prebundle を  $n$  prebundle と呼ぼう。PL-embedding  $f: M \rightarrow W$  ( $M, W$ ; PL-manifolds) が  $M$  の単体分割  $K$  に対して法 prebundle をもつとは,  $n$  prebundle

$N; K \xrightarrow{f} N(\Sigma)$  ( $f$  の  $K$  上の法 prebundle) が,  $N$  が  $f(M)$  の  $W$  における近傍となる様に存在するときをいう。このとき,  $N$  は  $f(M)$  の  $W$  における regular neighborhood で,  $f$  は locally flat である。次の法 prebundle の存在定理 theorem 1 は locally flat PL manifold pair の regular neighborhood の dual cell pair decomposition に目をつけ, 更に, relative regular neighborhood の理論から出る球面上の法 prebundle の一意性定理 theorem 2 を使って証明される。

Theorem 1.

PL-embedding  $f; M \rightarrow W$  ( $M, W$ ; PL-manifolds) がいかなる  $M$  の単体分割に対しても法 prebundle をもつための必要十分条件は,  $f$  が locally flat であることである。

Theorem 2.

$K$  を PL- $m$  sphere  $S^m$  の任意の単体分割とする。いかなる PL embedding  $f; S^m \rightarrow W$  も, 次の意味で高々一意的に法 prebundle をもつ。

もし,  $N_i; K \xrightarrow{f} N_i(\Sigma_i)$ ,  $i=1, 2$  が  $f$  の  $K$  上の法 prebundle なら, PL ambient isotopy  $F; W \rightarrow W$  が存在して,  $F/N_i$  は  $N_1$  から  $N_2$  への同型写像となる。

theorem 1 により, locally flat PL embedding に対する

る法 prebundle の存在は、係数群  $\pi_k(PR_n, \pi L_n)$  の障害の理論で論じられる。(但し、 $\pi L_n$  は  $(J^n, 0)$  bundle の構造群を表わす。)

次の対  $(PR_n, \pi L_n)$  の homotopy exact sequence を眺めながら、theorem 2 を使うと、 $k+1$  sphere の locally flat embedding に対する法 prebundle の存在および一意性の判定条件が準同型写像  $i_k; \pi_k(\pi L_n) \rightarrow \pi_k(PR_n)$  により記述できる。

$$\cdots \xrightarrow{j_{k+1}} \pi_{k+1}(PR_n, \pi L_n) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \pi_k(\pi L_n) \xrightarrow{i_k} \pi_k(PR_n) \xrightarrow{j_k} \pi_k(PR_n, \pi L_n) \rightarrow \cdots$$

Theorem 3.

$k+1$  sphere  $S^{k+1}$  の  $k+1+n$  sphere  $S^{k+1+n}$  の standard PL embedding は trivial な法 cell bundle しか持たない。  $\Leftrightarrow \text{Ker}(i_k) = 0$

Theorem 4.

$k+1$  sphere の codimension  $n$  をもついかなる locally flat PL embedding に対して法 cell bundle が存在する。

•  $\Leftrightarrow \text{Coker}(i_k) = 0.$

例 1. (N.H. Kuiper and R.K. Lashof)

Kuiper-Lashof より、準同型写像  $t_k^n; \pi_k(O_n) \rightarrow \pi_k(\pi L_n)$  は  $\forall k; n \leq 4$  に対して monomorphism

である。[7]. - 5, J. Levineにより differentiable knots  $\chi_R$  in  $\mathbb{R}^{R+4}$ ,  $R = 7, 8, 9, 11$  で  $\partial'_R(\chi_R) \neq 0$  となるものが存在する。(但し,  $\partial'_R(\chi_R) = \chi_R$  の法 vector bundle)  $\chi_R$  を smooth triangulate  $L$  として, Zeeman の unknotting theorem, および theorem 2 を使って,  $(\Delta_{R+1}, \partial \Delta_{R+1})$  上の relative  $(PR_4, \pi L_4)$  bundles  $\sigma_R$ ,  $R = 7, 8, 9, 11$  が得られる。 $\sigma_R$  は  $\pi_R(PR_4, \pi L_4)$  の元とみなしたとき,  $\partial_R(\sigma_R) = t_R^+ \partial'_R(\chi_R)$  となっている。 $t_R^+$  は monic だから,  $\partial'_R(\chi_R) \neq 0$  より,  $\partial_R(\sigma_R) \neq 0$ , よって  $\text{Ker } i_{R-1} \neq 0$  for  $R = 7, 8, 9, 11$  かくて,  $S^R$  ( $R = 7, 8, 9, 11$ ) の  $S^{R+4}$  の中への standard な PL embedding は non trivial 法 cell bundle をもつ。

例 2. (M. W. Hirsch) [2]

或る種の differentiable knot  $\chi_7$  in  $\mathbb{R}^{11}$  を smooth triangulate  $L$ , relative  $(PR_4, \pi L_4)$  bundle  $\sigma$  over  $(\Delta_8, \partial \Delta_8)$  で,  $\sigma \neq 0$  in  $\pi_7(PR_4, \pi L_4)$  だが,  $\partial_7(\sigma) = 0$  となるものが得られる。よって,  $\text{Ker } \partial_7 = \text{Coker } i_7 \neq 0$ . かくて,  $S^8$  上の 4 prebundle で, cell bundle の underlying prebundle とはならぬものが存在する。(勿論この prebundle a zero-section は法 cell bundle の存在しない locally flat embedding の例でもある。)



3.  $S^p \times S^q$  の pseudo-isotopy group の応用.

$PL(S^p \times S^q) = \{f; S^p \times S^q \rightarrow S^p \times S^q, PL \text{ homeomorphism}\}$   
とおく。  $f, g \in PL(S^p \times S^q)$  が pseudo-isotopic とは、  
 $\exists h \in PL(I \times S^p \times S^q)$  such that

$$h(0, x) = (0, f(x)), \quad h(1, x) = (1, g(x))$$

( $\forall x \in S^p \times S^q$ ) のときをいう。 pseudo-isotopy と  
いう関係は同値関係で、 pseudo-isotopy 類の全体は、群  
 $\pi PL(S^p \times S^q)$  をなす。このとき、  $p > q \geq 2$ , 或いは、  
 $p > 4, q = 1$  のとき、集合として  $\pi PL(S^p \times S^q)$  は、  
 $\pi_p(PR_{q+1}) \times \pi_q(PR_{p+1}) \times Z_2 \times Z_2$  と 1対1 に対応  
する。とくに、  $\pi PL(S^p \times S^1) \cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$  ( $p \geq 4$ )  
がいえるので、 Gluck の結果 [1] を pseudo-isotopy の  
意味で拡大できたことになる。 [6].

### 参考文献

- [1] H. Gluck, the embedding of two sphere in the  
four sphere, Trans. Amer. Math. Soc. 104. (1962)  
303 - 333
- [2] M.W. Hirsch, On tubular neighborhoods of  
manifolds I, II, Proc. London. Math. Soc.

62 (1966) 177-181, 183-185.

- [3] J. F. P. Hudson, Concordance and isotopy of PL embeddings, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 534-535
- [4] D. M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups. Ann. of Math., 67 (1958) 282-312
- [5] M. Kato, Combinatorial prebundles, Part 1 (to appear)
- [6] M. Kato, A pseudo isotopy classification of PL automorphisms of  $S^p \times S^q$ , (to appear)
- [7] N. H. Kuiper and R. K. Lashof, Microbundles and bundles, Part C, (mimeographed)