数理解析研究所講究録
第22巻 1967年 53-64

発展方程式の解の $t \to \infty$ における漸近的性質

増田 久弥 (東大理)

§1

記号

$X_j \; (j=0,1)$; ノルム $\|\cdot\|_j$ をもつ反射的バナッハ空間.

$\langle \cdot , \cdot \rangle_j$; X_j とその strong dual X_j' の間の pairing.

A_j ; X_j の中稠密に定められた線形閉作用素

T ; X_0 から X_1 への有界作用素 $T \in L(X_0, X_1)$

結果

X_j の中で次の方程式を考えます。

$$(1)_j \qquad a\frac{d^2u_j}{dt^2} + b\frac{du_j}{dt} + A_j u_j = 0, \qquad -\infty < t < \infty$$

ここで, a と b はある複素数である。

定理

$$(2) \qquad \rho(A_0) \cap \rho(A_1) \cap \{a\xi^2 + b\xi i \; ; \; \xi \in (-\infty, \infty)\} \neq \phi$$

と仮定する。 u_j を次の性質 (3) をもつ $(1)_j$ の弱解とする;

$$(3) \qquad \|u_j(t)\|_j \leq c_1, \quad -\infty < t < \infty$$

ここで, c_1 は正の定数. f を次の性質 (4) をもつ X_1' の元とする;

(4) $$|\langle Tu_0(t) - u_1(t),\ f\rangle_1| \leq c_2 e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

ここで，c_2 は正の定数

しかるば

$$\langle Tu_0(t) - u_1(t),\ f\rangle_1 = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

§3の中で，上の定理を，Klein-Gordon 波動方程式やSchödinger方程式の2つの解の $t \longrightarrow \infty$ における接近の様子をしるために，応用しよう

§2. 定理の証明.

証明に先だって，いくつかの補題をのべる。

<u>補題 1</u> $$A_j = A_j'' \; (= (A_j')')$$

<u>証明</u> 条件(2)によって，$\rho(A_j)$ は，ある複素数 z_0 を，含んでいる。それ故に，$(A_j - z_0)^{-1} \in L(X_j, X_j)$。$X_j$ は，仮定によって，反射的であるから，$((A_j - z_0)^{-1})'' = (A_j - z_0)^{-1}$.
Phillipsの定理（[1] P.224）によって，$(A_j'' - z_0)^{-1} = (A_j - z_0)^{-1}$.
故に，$A_j'' = A_j$ をえる。

<u>補題 2</u> $u_j(t)$ の Fourier-Laplace 変換を次の如く定める；

(5) $$\hat{u}_j^{+}(z) = \int_0^{\infty} e^{izt} u_j(t)\,dt, \quad \hat{u}_j^{-}(z) = \int_{\infty}^{0} e^{izt} u_j(t)\,dt.$$

このとき，以下の事柄が成立する。

(a) $\hat{u}_j^+(z)$ は，$\{z;\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ で，正則，又 $\hat{u}_j^-(z)$ は $\{z;\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ で正則である。

(b) $\hat{u}_j^+(z) \in D(A_j)$ 且 $(A_j - az^2 - bzi)\,\hat{u}_j^+(z) = a u_j'(0) - azi\, u_j(0) + b u_j(0)$ が $\mathrm{Im}\, z > 0$ なる z に対して成立し又 $\hat{u}_j^-(z) \in D(A_j)$ 且 $(A_j - az^2 - bzi)\,\hat{u}_j^-(z) = -a u_j'(0) + azi\, u_j(0) - b u_j(0)$ が $\mathrm{Im}\, z < 0$ なる z に対し成り立つ

(c) $\langle \Pi \hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z),\ f \rangle_1$ は $\{z;\ \mathrm{Im}\, z > -\varepsilon\}$ まで正則に延長されえる。

証明　(a) は，(3)と(5)から明らか。(b) を示そう。

$\psi(s)$ を次の如き $C_0^\infty(R^1)$ ー函数

$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & ;\ |s| > 2 \\ 1 & ;\ |s| \le 1. \end{cases}$$

$\psi_k(s) = \psi(k^{-1}s)$ とおく。$D(A_j')$ の中の任意の φ に対して，

$$\langle \hat{u}_j^+(z),\ A_j'\varphi \rangle_j = \int_0^\infty e^{izt} \langle u_j(t),\ A_j'\varphi \rangle_j\, dt$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \int_0^{2k} \langle u_j(t),\ A_j'(e^{izt}\psi_k(t)\varphi(t)) \rangle_j\, dt$$

が，$\mathrm{Im}\, z > 0$ なる任意の z に対して，成り立つ。

$u_j(t)$ は $(1)_j$ の弱解であることから，

$$\langle \hat{u}_j^+(z),\ A_j'\varphi \rangle_j = \langle \hat{u}_j^+(z),\ (az^2 + bzi)\varphi \rangle_j + \langle u_j'(0),\ a\varphi \rangle_j - \langle u_j(0),\ azi\varphi \rangle_j + \langle u_j(0),\ b\varphi \rangle_j.$$

それ故に，

$$\langle \hat{u}_j^+(z),\ (A_j' - az^2 - bzi)\varphi \rangle_j = \langle a u_j'(0) - azi\, u_j(0) + b u_j(0),\ \varphi \rangle_j.$$

Lemma 1 によって,

$$\begin{cases} \hat{u}_j^+(z) \in D(A_j - az^2 - bzi) \\ (A_j - az^2 - bzi)\,\hat{u}_j^+(z) = a u_j'(0) - azi u_j(0) + b u_j(0) \end{cases}$$

が, $\mathrm{Im}\, z > 0$ なる z に対して成りたつ。

同様にして, (b) の後半を示すことができよう。 次に $\mathrm{Im}\, z > 0$ なる z に対して,

$$(6) \quad \langle T\hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z), f \rangle_1 = \int_0^\infty e^{izt} \langle Tu_0(t) - u_1(t), f \rangle_1 dt$$

をえるけれど, (4) によって

$$|\langle Tu_0(t) - u_1(t), f \rangle_1| \leq c_2 e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

が成りたつから, (6) の右辺は, $\{ z \,;\, \mathrm{Im}\, z > -\varepsilon \}$ で正則である。 故に (c) が示された。

<u>定理の証明</u>. 仮定 (2) によって, 次のような実数 ξ_0 が存在する;

$$a\xi_0^2 + b\xi_0 i \in \rho(A_0) \cap \rho(A_1).$$

$\rho(A_0) \cap \rho(A_1)$ が, 開集合であるから, 次の如き $\delta > 0$ が存在する.

$$\{ az^2 + bzi \,;\, |z - \xi_0| < \delta \} \subset \rho(A_0) \cap \rho(A_1).$$

X_j の中で, 次の方程式を考えよう

$$(7) \quad (A_j - az^2 - bzi)\, v_j(z) = a u_j'(0) - azi u_j(0) + b u_j(0)$$

但し, z は, $|z - \xi_0| < \delta$ をみたす。

(7) は、$|z-\xi_0|<\delta$ なる z に対して、一意的な解をもち ($v_j(z)$ とかく) $v_j(z)$ は $|z-\xi_0|<\delta$ で正則である。他方補題2によって $\hat{u}_j^+(z)$ は、$\mathrm{Im}\, z>0$ なる z に対して、(8) をみたしている。それ故に、$v_j(z)=\hat{u}_j^+(z)$ が $\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z>0,\ |z-\xi_0|<\delta\}$ の中の z に対し成りたつ。だから、

(8) $$\langle T\hat{u}_0^+(z)-\hat{u}_1^+(z), f\rangle_1 = \langle T v_0(z)-v_1(z), f\rangle_1$$

が、$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z>0,\ |z-\xi_0|<\delta\}$ の中の z に対し成りたつ。しかるに、補題2 (c) によって、(8) の左辺は、$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z>-\varepsilon\}$ の中に正則に延長され且 (8) の右辺は $\{z\,;\ |z-\xi_0|<\delta\}$ の中で正則であるから

(9) $$\langle T\hat{u}_0^+(z)-\hat{u}_1^+(z), f\rangle_1 = \langle T v_0(z)-v_1(z), f\rangle_1$$

が、$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z>-\varepsilon,\ |z-\xi_0|<\delta\}$ の中の z に対して、成立する。他方，補題 2 と (8) によって、

(10) $$(A_j - a z^2 - b z i)\,(\hat{u}_j^-(z) + v_j(z)) = 0$$

が、$\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z<0,\ |z-\xi_0|<\delta\}$ の中の z に対し成立しているのであるから、

$$\{a z^2 + b z i\,;\ |z-\xi_0|<\delta\} \subset \rho(A_0)\cap\rho(A_1)$$

と (10) を考えに入れれば、

(11) $$\hat{u}_j^-(z) + v_j(z) = 0, \quad z\in\{z\,;\ \mathrm{Im}\, z<0,\ |z-\xi_0|<\delta\}$$

をえる。かくして、

$$z \in \{ z;\ -\varepsilon < \mathrm{Im}\, z < 0 \ \text{且}\ |z - \zeta_0| < \delta \}$$

に対して、

$$\langle \mathbb{T}\hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z) + \mathbb{T}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_1^-(z),\ f \rangle_1$$

(12) $$\overset{(9)\text{より}}{=} \langle \mathbb{T}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_0^-(z) + \mathbb{T}v_0(z) - v_1(z),\ f \rangle_1$$

$$\overset{(11)\text{により}}{=} 0$$

をえる。(13)の左辺は、帯領域 $\{ z;\ -\varepsilon < \mathrm{Im}\, z < 0 \}$ の中で正則であるから、一意接続定理（複素函数論における）によって、

$$\langle \mathbb{T}\hat{u}_0^+(z) - \hat{u}_1^+(z) + \mathbb{T}\hat{u}_0^-(z) - \hat{u}_1^-(z),\ f \rangle_1 = 0$$

が、$\{ z;\ -\varepsilon < \mathrm{Im}\, z < 0 \}$ の中の z に対して、常に成立せざるをえぬ。かくして、積分表示(6)と(7)によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \langle \mathbb{T}u_0(t) - u_1(t),\ f \rangle_1\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathrm{Re}\, z\cdot t}\, e^{-\mathrm{Im}\, z\cdot t} \langle \mathbb{T}u_0(t) - u_1(t), f \rangle_1\, dt$$

$$= 0$$

が、帯領域 $\{ z;\ -\varepsilon < \mathrm{Im}\, z < 0 \}$ の中の z に対して成立することをみる。他方(4)によって、評価

$$\left| e^{-\mathrm{Im}\, z\cdot t} \langle \mathbb{T}u_0(t) - u_1(t),\ f \rangle_1 \right| \le c_1 e^{-\mathrm{Im}\, z\cdot t} e^{-\varepsilon t}, \quad t \ge 0$$

又、(3)によって、評価

$$\left| e^{-\mathrm{Im}\, z\cdot t} \langle \mathbb{T}u_0(t) - u_1(t),\ f \rangle_1 \right| \le c_3 e^{-\mathrm{Im}\, z\cdot t}, \quad t \le 0$$

（但し、c_3 は正の定数）

をえるのであるから

$$e^{-\mathrm{Im}\,z\cdot t}\langle \mathbb{T}u_0(t)-u_1(t),\ f\rangle_1 \in L^2(R^1)$$

が，$\{z\,;\,-\varepsilon<\mathrm{Im}\,z<0\}$ の中の z に対して成立する．従って，(13) と Fourier 変換の1意性から，

$$e^{-\mathrm{Im}\,z\cdot t}\langle \mathbb{T}u_0(t)-u_1(t),\ f\rangle_1 = 0\ ,\quad -\infty<t<\infty,$$

が，したがう。かくして，$\langle \mathbb{T}u_0(t)-u_1(t),\ f\rangle_1 = 0$ ，$-\infty<t<\infty$，をえた。　証了.

§3 定理の応用

例 1

G を局所的に class C^2 なる有界な $(n-1)$ 次元超曲面の外部とする。u_0 を $L^2(R^n)$ の中の Klein-Gordon 波動方程式の有限なエネルギーをもつ（一般化された）解とする：

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\Delta u_0+m^2u_0=0\ ,\quad -\infty<t<\infty,\ x\in \mathbb{R}^n.$$

u_1 を $L^2(G)$ の中の Klein-Gordon 波動方程式の有限なエネルギーをもつ（一般化された）解とする：

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\Delta u_1+m^2u_1=0\ ,\quad -\infty<t<\infty,\ x\in G$$

$$u_1=0 \qquad G\text{の境界上}.$$

もし次の性質(16)をもつ（空でない）G の開部分集合 U が存在すれば，任意の t に対して，$u_0(\cdot,t)=u_1(\cdot,t)$ a.e. in $x\in G$;

(16) $\quad \| u_0 - u_1 \|_{L^2(U)} \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$

但し，Cとεは正の定数．

証明

定理の中のX_j，T，A_jを次の如く定めよう：$X_0 = L^2(R^n)$；$X_1 = L^2(G)$；任意の$v \in L^2(R^n)$に対して$(Tv)(x) = v(x) \quad x \in G$；$A_0$は$\mathcal{A}_0$のフリードリックスの拡大，ここに$\mathcal{A}_0$は次の如く定めた。$D(\mathcal{A}_0) = C_0^\infty(R^n)$，$\mathcal{A}_0 \psi = -\Delta \psi + m^2 \psi$，$\psi \in D(\mathcal{A}_0)$；

A_1を$\mathcal{A}_1$のフリードリックスの拡大，ここに$\mathcal{A}_1$は次の如く定めた。$D(\mathcal{A}_1) = C_0^\infty(G)$，$\mathcal{A}_1 \psi = -\Delta \psi + m^2 \psi$，$\psi \in D(\mathcal{A}_1)$

A_0とA_1のスペクトル集合は，$[m^2, \infty)$の中にふくまれるのであるから

$$\rho(A_0) \cap \rho(A_1) \cap \{\xi^2 ; \xi \in (-\infty, \infty)\} \neq \emptyset.$$

このことは，仮定(2)がみたされていることを示している。解u_0とu_1は，有限なエネルギーをもつから，エネルギー保存則より条件(3)がみたされていることがわかる。又(11)によって，任意の$f \in C_0^\infty(U)$に対して，仮定(4)がみたされている。かくして，われわれの定理を適用すると，

$$\langle u_0(\cdot, t) - u_1(\cdot, t), f \rangle = 0$$

が，任意の$f \in L^2(U)$且任意のtに対して成立することがわかる

ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$は，$L^2(G)$のスカラー積である。

それ故に，任意のtに対して，

$$u_0(x,t) = u_1(x,t) \quad \text{a.e. in } x \in U.$$

u_0 と u_1 を x について mollify して Holmgren の一意性定理を適用することによって，任意の t に対して，

$$u_0(x,t) = u_1(x,t) \quad \text{a.e. in } x \in G.$$

注意：u を $L^2(R^n)$ の中の (15) の有限なエネルギーをもつ解とする。もし，R^n の中の開集合 $U(\neq \emptyset)$ が存在して

$\|u\|_{L^2(U)} \leq c\, e^{-\varepsilon t}$, $t \geq 0$ （c と ε は正の定数）

をみたすならば，任意の t に対して $u(x,t) = 0$ a.e. in $x \in R^n$。

しかしながら，我々は次の例をもつ。

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot y + it\sqrt{y^2+m^2}} \varphi(y)\, dy$$

ここで，m は正の定数，$\varphi(y)$ は，support を $(1, 2)$ にもつ C_0^∞-函数。$u(x,t)$ は，$L^2(R^1)$ の中の $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 u = 0$ の有限なエネルギーをもつ解であり，

任意のコンパクト集合 K と任意の正の整数 N に対して，正の数 $C = C(K, N)$ が存在して，

$$\sup_{x \in K} |t^N u(x,t)| \leq C, \quad t \geq 0$$

が成立する。

例 2

u_0 を $L^2(R^3)$ の中のシュレディンガー方程式

(18) $$\frac{1}{i}\frac{\partial u_0}{\partial t} - \Delta u_0 = 0$$

の解とし，u_1 を $L^2(R^3)$ の中の，ポテンシャルの摂動項をもつシュレディンガー方程式

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + q(x) u_1 = 0$$

の解とする。ここに $q(x)$ は次の条件をみたすとする。

(19) $q(x)$ は有限個の特異点をのぞいて局所的に Hölder 連続な実数値函数．さらに，$q(x)$ は $L^2(R^3)$ に属しており，∞ において $O(|x|^{-2-h})$ $(h>0)$ の如くふるまう．

もし，R^3 の中の任意のコンパクト集合 K に対して，正の定数 $C=C(K)$ と $\varepsilon=\varepsilon(K)$ が存在して

(20) $$\| u_0(\cdot,t) - u_1(\cdot,t) \|_{L^2(K)} \leq C e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0$$

が成立していれば，任意の t に対して，$L^2(R^3)$ の元として，$u_0(\cdot,t)$ と $u_1(\cdot,t)$ は，等しい。

証明　X_j，T，A_j を次の如く定めよう：

$X_0 = X_1 = L^2(R^3)$； $T =$ 恒等写像 $\in L(X_0, X_1)$ ；

A_0 を $-\Delta$ の $L^2(R^3)$ の中の自己共役な拡大； A_1 を $-\Delta + q(x)$ の $L^2(R^3)$ の中の自己共役な拡大（[2] をみよ）。負の実軸の中には，A_0 と A_1 の連続スペクトルはないしあっても高々離散的な固有値があるだけであるから（[2] をみよ），$\rho(A_0) \cap \rho(A_1) \cap \{\xi;\ \xi \in (-\infty, \infty)\} \neq \phi$。このことは，仮定(2) がみたされていることを示している。

$\| u_j(\cdot,t) \|_{L^2(R^3)}$ $(j=0,1)$ は，t について定数であるから，条件(3) がみたされている。(20) によって，任意の $\varphi \in C_0^\infty(R^3)$ に対し

条件 (4) がみたされているから，我々の定理を適用して，

$$(u_0(\cdot,t) - u_1(\cdot,t),\ \varphi) = 0$$

が，任意の t と任意の $\varphi \in C_0^\infty(R^3)$ に対し成立する。このことから

$u_0(\cdot,t) = u_1(\cdot,t)$ が，任意の t に対し $L^2(R^3)$ の元として成立することをみる。

注意

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cdot\sqrt{y} - ity}\, g(y)\,dy$$

ここで，$g(y)$ は C_0^∞-函数で support を $(0,\infty)$ の中にもつものとする。この函数 $u(x,t)$ は，$L^2(R^1)$ の中のシュレディンガー方程式の解である．その上に，任意のコンパクト集合 K と，任意の正整数 N に対して正の定数 $C = C(K,N)$ が存在して，

$$\sup_{x \in K} |t^N u(x,t)| \leq C \quad , \quad t \geq 0$$

が成立する．

文　献

[1] Yosida, K ; Functional analysis, Springer, 1965

[2] Ikebe, T ; Eigenfunction Expansions Associated with the Schrödinger Operators and their Application to Scattering theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960)

[補足] 定理の中でいわれている u_j が $(1)_j$ の弱解であるとは，次の性質をもつ函数 u_j のことである。

(a) $t \in (-\infty, \infty)$ に対して $u_j(t)$ は値を X_j にもち，連続的微分可能

(b) 任意の $s \in (-\infty, \infty)$ に対して，

$$\int_0^s \langle u_j(t), a\varphi''(t) - b\varphi'(t) + A_j'\varphi(t) \rangle_j \, dt$$

$$- \langle u_j(0), b\varphi(0) - a\varphi'(0) \rangle_j - \langle u_j'(0), a\varphi(0) \rangle_j = 0$$

ここで，$\varphi(t)$ は次の性質をもつ X_j' に値をもつ任意の函数である：

(i) 各 t に対して $\varphi(t) \in \mathcal{D}(A_j')$

(ii) $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ 且 $A_j'\varphi(t)$ は，$(-\infty, \infty)$ の中で強連続である。（もし $a = 0$ ならば $\varphi''(t)$ の条件は，落ちる）

(iii) $\varphi(s) = 0$