数理解析研究所講究録
第 22 巻 1967 年 65-76

散乱の理論における定常的方法について

浅野 潔 (京大数研)

§1. 問題と結果.

我々が考察する問題は,自己共役作用素の絶対連続スペクトルの摂動論,およびいわゆる散乱理論の抽象的取扱いに関するものである。ここでは,文献[1]-[4]において,Birman 等により述べられた結果(の1部)について解説する。

Hilbert space $\mathfrak{H}$ における2つの自己共役作用素 H_0, H_1 を考える。H_j $(j=0,1)$ の spectre 分解を $\int \lambda dE_\lambda^j$ とし,また $R_z^j = (H_j - zI)^{-1}$ とかく。E_λ^j から作られる spectral measure を $E^j(\Delta)$ (Δ は,R の Lebesgue 可測集合)とし,$\mathfrak{G}_j = \{ f \in \mathfrak{H}$; $(E^j(\Delta)f, f)$ が R 上の絶対連続測度$\}$ とする。$\mathfrak{G}_j$ は H_j を reduce する $\mathfrak{H}$ の閉部分空間である。$\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{G}_j$ への正射影を P_j とかく。

我々の目的は,H_0 と H_1 とが適当な意味で'近い'ときに,

(I) H_0 と H_1 の絶対連続な部分(i.e. H_0P_0 と H_1P_1)の unitary equivalence を示す。

(II) Wave operator $W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0$ の存在を示す。

(III) Scattering operator $S = W_+^* W_-$ の性質を調べる

などである。

$\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}_\beta$ を任意の Hilbert space とするとき,$\mathfrak{H}_\alpha$ から $\mathfrak{H}_\beta$ への nuclear

operator の全体を $C_1(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$，*Hilbert-Schmidt operator* の全体を $C_2(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta)$ とかくことにする。$C_p(\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\alpha)$ を，たんに $C_p(\mathfrak{H}_\alpha)$ とかく。また $\mathfrak{H}_\alpha$ における *bounded operator* の全体を，$\mathcal{B}(\mathfrak{H}_\alpha)$ で表わす。
問題 (I) および (II) に関して，次の定理が成立つ。

定理 1. 次の条件：

(I) $\quad H_1 - H_0 = V \in C_1(\mathfrak{H})$

を仮定する。このとき，次の条件をみたす $W_\pm \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ が存在する：

1) $\quad W_\pm E_0(\Delta) = E_1(\Delta) W_\pm, \qquad W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm,$

$\quad W_\pm^* W_\pm = P_0, \qquad W_\pm W_\pm^* = P_1 \quad$ &

$\quad W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm.$

2) $\quad W_\pm = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0 \quad$ &

$\quad W_\pm^* = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH_1} P_1.$

上の定理の内容自体は，よく知られた結果である。証明には，大別して，"時間を含む方法" と "時間を含まない方法（定常的方法）" とがある（文献 [5]，[7] － [10] 参照）。ここでは，[3] においてスケッチされた方法で証明を与えよう。

簡単な考察により，条件 (I) のもとでは，$\mathfrak{H}$ を *separable* と仮定しても一般性を失わないことがわかる。従って，$\mathfrak{H}_j$ をいわゆる " *direct integral* " の形で表わすことにより，$H_j P_j$ を "対角化" することができる。$\mathfrak{H}_j = \int_{\Lambda_j} \oplus\, \mathfrak{H}_\lambda^j \, d\lambda$ としよう。定理 1 により，$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda$。かつ，$\mathfrak{H}_\lambda^0$ から $\mathfrak{H}_\lambda^1$ への *unitary* (*i.e. isometric & onto*) *operator*

$W_\pm(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(W_\pm f)(\lambda) = W_\pm(\lambda)f(\lambda)$ $\in\mathfrak{g}_1$ が a.e. $\lambda\in\Lambda$ に対して成立つ。

$S = W_+^* W_-$ により scattering operator S を定義しよう。S は $\mathfrak{g}_0$ における unitary operator となり，かつ，$\mathfrak{h}_\lambda^0$ における unitary operator S_λ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(Sf)(\lambda) = S_\lambda f(\lambda)$ が a.e. $\lambda\in\Lambda$ に対して成立つ。S_λ を S-matrix とよぶ。

条件 (I) の下で，$T_z = P_0(I-VR_z)VP_0 \in C_1(\mathfrak{g}_0)$。故に，$\mathfrak{g}_0 = \int_\Lambda \oplus \mathfrak{h}_\lambda^0\, d\lambda$ において，T_z は"核表示"をもつ，すなわち $T_z(\lambda,\mu)\in C_1(\mathfrak{h}_\mu^0, \mathfrak{h}_\lambda^0)$ $(\lambda,\mu\in\Lambda)$ が存在して，$f(\lambda)\in\mathfrak{g}_0$ に対して $(T_z f)(\lambda) = \int_\Lambda T_z(\lambda,\mu) f(\mu)\,d\mu$ (a.e. $\lambda\in\Lambda$)。$T_z(\lambda,\mu)$ は，(λ,μ) の（強）可測函数であり，さらに $T_z(\lambda,\lambda)$ も λ の（強）可測函数である。S_λ に関して，次の定理が成立つ。

定理2.　条件 (I) のもとで，

1)　$t\text{-}\lim_{z\to\nu\pm i0} T_z(\lambda,\mu) \equiv T_{\nu\pm i0}(\lambda,\mu)$ が，a.e. $\nu\in R$，a.e. $\lambda\in\Lambda$，a.e. $\mu\in\Lambda$ に対して存在する（$t\text{-}\lim$ は，$C_1(\mathfrak{h}_\mu^0, \mathfrak{h}_\lambda^0)$ の位相に関する収束の意），

2)　$S_\lambda = I_\lambda - 2\pi i\, T_{\lambda+i0}(\lambda,\lambda)$　(a.e. $\lambda\in\Lambda$)，

3)　$K(\lambda)\in C_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ (a.e. $\lambda\in\Lambda$) が存在して，$S_\lambda = e^{-2\pi i K(\lambda)}$，かつ $\int_\Lambda |K(\lambda)|_1\, d\lambda \leq \|V\|_1$。ただし，$|K(\lambda)|_1$ は $C_1(\mathfrak{h}_\lambda^0)$ における trace norm，$\|V\|_1$ は，$C_1(\mathfrak{h})$ における trace norm とする。

条件 (I) のもとで，$VR_z^0\in C_1(\mathfrak{h})$ $(\mathrm{Im}\, z\neq 0)$。従って，matrix の

determinant の拡張として，$\Delta(z) = \det(I + VR_z^0)$ なる函数が定義される。$\Delta(z)$ は，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ で解析的であり，かつ $\Delta(\bar{z}) = \overline{\Delta(z)}$。$\Delta(z)$ と S_λ の間には，次の関係がある。

定理3．条件 (I) のもとで，

1) $\Delta(z) = e^{\int_\Lambda \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda}$，ここに $\xi(\lambda) = \mathrm{tr}\, K(\lambda)$。故に，$\lim_{z \to \lambda \pm i0} \Delta(z) \equiv \Delta(\lambda \pm i0)$ が a.e. $\lambda \in R$ に対して存在する。

2) $\det S_\lambda = e^{-2\pi i \xi(\lambda)} = \frac{\Delta(\lambda - i0)}{\Delta(\lambda + i0)}$ （a.e. $\lambda \in \Lambda$）。

定理2および3にどんな数理物理的な意味があるかは，筆者にはわからないが，たとえば H_0 と H_1 とが適当な固有函数展開をもつ場合には，これらの結果は，いわゆる phase shift formula や，S の相互作用表示などと関係がつくようである。また，条件 (I) は非常に強い制限なので，これをもっと緩い条件におきかえることが応用上望ましいが，この問題については，§3 でふれたい。応用上は，$\mathfrak{H} = L^2(R_x^n)$，$H_0 = -(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$ であることが多いが，この場合 H_1 が固有函数展開をもつと，いろいろと好都合である。§3 にあげるたいていの条件のもとで，H_1 の絶対連続な部分は，一般化された固有函数をもつけれども，H_1 が特異連続な部分をもたないことを保証する条件は，別に課さなければならない（[9] 参照）。

§2．定理1の証明．

[3] による証明では，次の補題が重要な役割を演ずる。

補題．A を $\mathfrak{H}$ における自己共役作用素（$A = \int \lambda dF_\lambda$），$\Gamma_z =$

$(A-zI)^{-1}$, $D \in \mathbb{C}_2(\mathfrak{H})$ とする。このとき，

1) 任意の $f \in \mathfrak{H}$ に対して，$DF_\lambda f$ は λ の（強）有界変動函数であり，従って，a.e. λ に対して（強）微分 $\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ が存在する。$\frac{d}{d\lambda}(DF_\lambda f)$ は，λ の（強）可測函数である；

2) 任意の $f \in \mathfrak{H}$ に対して，$s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0} D\Gamma_z f \equiv D\Gamma_{\mu\pm i0} f$ が a.e. μ で存在し，かつ p.v. $\int \frac{1}{\lambda-\mu} d(DF_\lambda f)$ も a.e. μ で存在して，a.e. μ で

$$D\Gamma_{\mu\pm i0} f = \text{p.v.} \int \frac{1}{\lambda-\mu} d(DF_\lambda f) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(DF_\mu f),$$

3) $D^*F_\lambda D$ は $\mathbb{C}_1(\mathfrak{H})$ の位相で（強）有界変動函数である。従って，a.e. λ で $\frac{d}{d\lambda}(D^*F_\lambda D) \equiv K_\lambda \in \mathbb{C}_1(\mathfrak{H})$ が存在し，（強）可測となる。

4) $s\text{-}\lim_{z\to\mu\pm i0} D^*\Gamma_z D \equiv D^*\Gamma_{\mu\pm i0} D \in \mathbb{C}_2(\mathfrak{H})$ が a.e. μ で存在し，かつ p.v. $\int \frac{1}{\lambda-\mu} d(D^*F_\lambda D)$ も a.e. μ で存在して，a.e. μ で

$$D^*\Gamma_{\mu\pm i0} D = \text{p.v.} \int \frac{1}{\lambda-\mu} d(D^*F_\lambda D) \pm \pi i \frac{d}{d\mu}(D^*F_\mu D),$$

ここに $s\text{-}\lim$ は $\mathbb{C}_2(\mathfrak{H})$ における収束を意味する。

定理1の証明にかかろう。$Q_z^0 = I + VR_z^0$，$Q_z^1 = I - VR_z^1$ とおく。簡単な計算により，

(1) $\quad Q_z^1 Q_z^0 = Q_z^0 Q_z^1 = I$,

(2) $\quad R_z^0 - R_{\bar z}^0 = Q_z^{0*}(R_z^1 - R_{\bar z}^1) Q_z^0$,

(3) $\quad Q_z^{1*}(R_z^0 - R_{\bar z}^0) = (R_z^1 - R_{\bar z}^1) Q_z^0$.

(2), (3) より，任意の $f, g \in \mathfrak{H}$ に対して，

(4) $\quad ((R_z^0 - R_{\bar z}^0) f, g) = ((R_z^1 - R_{\bar z}^1) Q_z^0 f, Q_z^0 g)$

(5) $\quad ((R_z^0 - R_{\bar z}^0) f, Q_z^1 g) = ((R_z^1 - R_{\bar z}^1) Q_z^0 f, g)$.

(4), (5) において，$z\to\mu\pm i0$ として両辺の極限を考える。そのために いくつかの記号を定義する： V が自己共役であることに注意すると，$B=|V|^{\frac{1}{2}}$, $\Theta=\mathrm{sgn}\,V$ とおいて，$V=B\Theta B$ とかくことができる．ここに，$B\in C_2(\mathfrak{H})$, $\Theta\in B(\mathfrak{H})$。$f\in\mathfrak{H}$ に対して，$BR^j_{\mu\pm i0}f$ が存在して補題 2) の等式が成立する μ の全体を Λ^j_f で表わす。また，$BR^j_{\mu\pm i0}B$ が存在して補題 4) の等式が成立する μ の全体を Λ^j で表わす．最後に，f, $g\in\mathfrak{H}$ に対して，$\lim\limits_{z\to\mu\pm i0}((R^j_z-R^j_{\bar z})f,g)=\pm 2\pi i\frac{d}{d\mu}(E^j_\mu f,g)$ となる μ の全体を $\Lambda^j_{f,g}$ で表わす。明らかに，Λ^j_f，Λ^j, $\Lambda^j_{f,g}$ 等の補集合は，測度0の集合である。$C\in B(\mathfrak{H})$ とすると $CB\in C_2(\mathfrak{H})$ であるが，$(CB)R^j_{\mu\pm i0}f=C(BR^j_{\mu\pm i0}f)$ であるから，我々はこれを $CBR^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。また，$s\text{-}\lim\limits_{z\to\mu\pm i0}Q^j_z f=s\text{-}\lim\limits_{z\to\mu\pm i0}(I+(-1)^j VR^j_z)f=f+(-1)^j\times VR^j_{\mu\pm i0}f=f+(-1)^j B\Theta BR^j_{\mu\pm i0}f$ を $Q^j_{\mu\pm i0}f$ とかく。

(4) において $z\to\mu\pm i0$ としよう。(4) の左辺は，$\mu\in\Lambda^0_{f,g}$ ならば $\pm 2\pi i\frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f,g)$ に近ずく。次に

$$
\begin{aligned}
(4)\text{ の右辺} &= ((R^1_z-R^1_{\bar z})(I+VR^0_z)f,(I+VR^0_z)g)\\
&= ((R^1_z-R^1_{\bar z})f,g)+(\Theta BR^0_z f, B(R^1_{\bar z}-R^1_z)g)\\
&\quad +(B(R^1_z-R^1_{\bar z})f,\Theta BR^0_z g)\\
&\quad +(B(R^1_z-R^1_{\bar z})B\cdot\Theta BR^0_z f,\Theta BR^0_z g)
\end{aligned}
$$

より，次のことがわかる： $z\to\mu\pm i0$ のとき，

第1項 $\longrightarrow \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f,g)$ $\quad(\mu\in\Lambda^1_{f,g})$,

第2項 $\longrightarrow (\Theta BR^0_{\mu\pm i0}f,\mp 2\pi i\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g))$ $\quad(\mu\in\Lambda^0_f\cap\Lambda^1_g)$,

第3項 $\longrightarrow (\pm 2\pi i\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f),\Theta BR^0_{\mu\pm i0}g)$ $\quad(\mu\in\Lambda^1_f\cap\Lambda^0_g)$,

第4項 → $\left(\pm 2\pi i\, \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot \Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right)$

$$(\mu \in \Lambda^1 \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^0_g).$$

故に (4) の右辺は，$\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_f \cap \Lambda^0_g \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1 \cap \Lambda^1_{f,g} = \Sigma^1_{f,g}$ ならば，

$$(6) \qquad \pm 2\pi i \left\{ \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu f, g) + \left(\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu g)\right) + \left(\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu f),\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right) + \left(\frac{d}{d\mu}(BE^1_\mu B)\cdot\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g\right)\right\}$$

$$= \pm 2\pi i\, \frac{d}{d\lambda}\Big[(E^1_\lambda f, g) + (\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ BE^1_\lambda g) + (BE^1_\lambda f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g) + (BE^1_\lambda B\cdot\Theta B R^0_{\mu\pm i0} f,\ \Theta B R^0_{\mu\pm i0} g)\Big]_{\lambda=\mu}$$

に近ずく。一方 (6) の [ ] の中は ($\mu \in \Lambda^0_f \cap \Lambda^0_g$ ならば存在して)，$(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f,\ Q^0_{\mu\pm i0} g)$ に等しい。(6) の [ ] 内の形から，$\lambda \in \Lambda^1_{f,g} \cap \Lambda^1_f \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f,\ Q^0_{\mu\pm i0} g) = \frac{d}{d\lambda}[\quad]$ が存在する。そして $\mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば，$\frac{d}{d\lambda}[\quad]$ において $\lambda=\mu$ とおくことができ，(6) が得られる。結局，$\lambda, \mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f,\ Q^0_{\mu\pm i0} g)$ が存在し，$\lambda=\mu$ とおくと (6) が得られることがわかった。

以上のことから，

$$(7) \qquad \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g) = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f,\ Q^0_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} \quad (\mu \in \Lambda^0_{f,g} \cap \Sigma^1_{f,g}).$$

(7) の右辺は明らかに μ の可測函数である ((6) の形にかけるから)。

同様に (5) において $z \to \mu \pm i0$ とすることにより，

$$(8) \qquad \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f,\ Q^1_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} = \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f,\ g)\Big|_{\lambda=\mu}$$

$$(\mu \in \Lambda^0_{f,g} \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g \cap \Lambda^1_{f,g}).$$

(8) の両辺が μ の可測函数になることも，各辺を (6) のような形に分解してみればわかる。

$\lambda, \mu \in \Lambda^1_{f,g} \cap \Lambda^0_f \cap \Lambda^1_g \cap \Sigma^1_{f,f} \cap \Lambda^0_{f,f} \cap \Lambda^1_{g,g}$ とすると，

$$(9) \qquad \left| \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g) \right| \leq \left\{ \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} f) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda g, g) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立つ。(9) において $\lambda=\mu$ とおけば，(7) より

$$\left| \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} \right| \leq \left\{ \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, f) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{d\mu}(E^1_\mu g, g) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

故に

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} \right| d\mu \leq \| P_0 f \| \, \| P_1 g \| .$$

我々は次の式によって operator $W_\pm$ を定義しよう：

$$(11) \qquad (W_\pm f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f, Q^1_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

(10) によって $W_\pm$ を定義する積分が収束し，$|(W_\pm f, g)| \leq \|P_0 f\| \|P_1 g\|$ より $W_\pm \in B(\mathfrak{H})$ がわかる。$W_\pm$ の第2の表示式は (8) による。

$W_\pm P_0 = P_1 W_\pm = W_\pm$ は，(11) より明らか。$\Delta = (a, b]$ に対して，

$$\begin{aligned}
(W_\pm E^0(\Delta) f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda E^0(\Delta) f, Q^1_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_\Delta \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda f, Q^1_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_\Delta \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1(\Delta) g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= (W_\pm f, E^1(\Delta) g) \\
&= (E^1(\Delta) W_\pm f, g) .
\end{aligned}$$

故に $W_\pm E^0(\Delta) = E^1(\Delta) W_\pm$。これより $W_\pm H_0 P_0 = H_1 P_1 W_\pm$ も得られる。

最後に $W_\pm^* W_\pm = P_0$（複号同順）を示そう。やや形式的に計算すると

$$\begin{aligned}
(W_\pm f, W_\pm g) &= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, W_\pm g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu \\
&= \int d\mu \frac{d}{d\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)\Big|_{\xi=\eta} d\eta \right]_{\lambda=\mu}
\end{aligned}$$

$$= \int d\mu \; \frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)\Big|_{\xi=\eta=\mu}$$
$$= \int \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu\pm i0} f, Q^0_{\mu\pm i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int \frac{d}{d\mu}(E^0_\mu f, g)\, d\mu$$
$$= (P_0 f, g)。$$

これより $W_\pm^* W_\pm = P_0$ を得る。ただし上の計算を合理化するためには，

$$(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)$$
$$= (E^1_\xi f, g) + (\textcircled{H} B R^0_{\mu\pm i0} f, B E^1_\xi g)$$
$$+ (B E^1_\xi f, \textcircled{H} B R^0_{\eta\pm i0} g) + (B E^1_\xi B \; \textcircled{H} B R^0_{\mu\pm i0} f, \textcircled{H} B R^0_{\eta\pm i0} g)$$

より，ξ，η，$\mu \in \Sigma^1_{f,g}$ ならば $\frac{d}{d\xi}(Q^0_{\mu\pm i0} f, E^1_\xi Q^0_{\eta\pm i0} g)$ が存在し，かつ $\xi = \eta = \mu$ とおくことができることに注意すればよい。

同様の計算より $W_\pm W_\pm^* = P_1$ が得られる。これで 1) の証明は完了した。

2) は，Fourier 変換と Hilbert 変換を用いて簡単に証明される（[5] 参）。

§3. 補足.

我々は $S = W_+^* W_-$ によって S を定義した。$(Sf, g) = (W_- f, W_+ g)$ に，§2 の後半の計算を適用すると，S の表示式が得られる：

(12) $$(Sf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^1_\lambda Q^0_{\mu-i0} f, Q^0_{\mu+i0} g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}(E^0_\lambda Q^1_{\mu+i0} Q^0_{\mu-i0} f, g)\Big|_{\lambda=\mu} d\mu .$$

ここで第1の表示式から第2の表示式を得るために (8) を用いた。定理2の 2) は，(12) の後半の式から証明できる。

定理2および3の証明は省略して，定理1の条件 (I) を緩めることを考えよう。'作用素の函数' なる概念を用いると，条件 (I) は次のように緩

められる（[7]参照）：

(II)　次の条件をみたす'admissible'な函数の列 $\{\phi_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する：

1)　$\phi_n(\lambda)$ は $(-n, n)$ で univalent,

2)　$\phi_n(H_1) - \phi_n(H_0) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

ここに $R = (-\infty, \infty)$ で定義された実数値函数 $\phi(\lambda)$ が'admissible'とは，"有限個の開区間 I_k が存在して，① $R = \cup \bar{I}_k$，② 各 I_k 上で $\phi(\lambda)$ は狭義単調，連続微分可能，$\phi'(\lambda) \neq 0$ かつ $\phi(\lambda)$ は有界変動"なることをいう。

たとえば，次の条件 (II)' から (II) が従う。

(II)'　ある整数 $k > 0$ と z ($\mathrm{im}\, z \neq 0$) に対して $(R^1_z)^k - (R^0_z)^k \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$.

我々はまた，条件 (II) をやや異なる方向に緩めることができる。$\Delta = [a, b]$ に対して，次の条件 (III) は $H_0 P_0 E^0(\Delta)$ と $H_1 P_1 E^1(\Delta)$ との unitary equivalence を与える $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証する（[2]参照）：

(III)　$E^1(\Delta) H_1 E^0(\Delta) - E^1(\Delta) H_0 E^0(\Delta) \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$，かつ $\Delta_n \subset \Delta$ が存在して $\Delta - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は測度 0 の集合で $E^1(\Delta^c) E^0(\Delta_n)$, $E^0(\Delta^c) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$. ここに $\mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$ は，$\mathfrak{H}$ の完全連続作用素の全体を表わす。

条件 (III) のもとで，定理1の結果は，P_0 を $P_0 E^0(\Delta)$ に P_1 を $P_1 E^1(\Delta)$ におきかえた形で 1), 2) とも成立する。特に $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$ なるときには，条件 (III) の後半は，"$E^1(\Delta^c \cap [-N, N]) E^0(\Delta_n)$, $E^0(\Delta^c \cap [-N, N]) E^1(\Delta_n) \in \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{H})$（十分大きな N に対して）"と緩められる。このことから，たとえば次の条件 (III)' が $W_\pm(\Delta)$ の存在を保証することがわかる

(III)'　$\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_1)$，かつ $(R^1_z)^k (H_1 - H_0)(R^0_z)^l \in \mathfrak{C}_1(\mathfrak{H})$　$(k, l > 0)$.

文　献

[1] M. Š. Birman, *Conditions for the existence of wave operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962), 506－509 ; Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 408－411.

[2] M. Š. Birman, *A local criterion for the existence of wave operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 159 (1964), 485－488 ; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 1505－1509.

[3] M. Š. Birman and S. B. Entina, *A stationary approach in the abstract theory of scattering*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 155 (1964), 506－508 ; Soviet Math. Dokl., 5 (1964), 432－435.

[4] M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144 (1962), 475－478 ; Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 740－744.

[5] T. Kato, *On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators*, J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 239－249.

[6] 加藤敏夫, 散乱演算子と連続スペクトルの摂動, 数学, 9 (1957), 75－84.

[7] T. Kato, *Wave operators and unitary equivalence*, Pac. J. Math., 15 (1965), 171－180.

[8] S. T. Kuroda, *Stationary methods in the theory of scattering*, Perturbation theory and its applications in quantum mechanics, 185－214, John Wiley & Sons, New York. 1966.

[9] S. T. Kuroda, *An abstract stationary approach to perturbations of continuous spectra and scattering theory*, to appear.

[10] 黒田成俊，散乱の定常論と固有函数展開，I，数学，18 (1966), 74-85,
II, 18 (1966), 137-144.

付記．

散乱の問題を取扱う定常的方法には，他に黒田氏（[8], [9]）によって開発された興味深い方法がある．Birman 等の方法が direct integral 的であるのに対して，黒田氏の方法は Hellinger-Hahn的であるという感じである．黒田氏の方法は，黒田氏自身が [10] で解説しておられるので，ここでは述べなかった。なお [10] の §1 は，定常的方法に対する入門的解説になっている。