数理解析研究所講究録
第 23 巻 1967 年 1-13

乱流の分布汎函数方程式について

京大 理　江田紀人

§1. 緒論

乱流の問題の定式化は次の様にできるであろう。非圧縮粘性流体における乱流は、Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u, \tag{1.1}$$

及び連続の方程式

$$\nabla\cdot u = 0, \tag{1.2}$$

によって支配されているが，ある初期時刻において流れの場に対する条件が統計的に与えられたとき，以後の任意時刻における流れの場を統計的に決定すること。

流れの場を統計的に決定するためには，次の二つの量のいずれかが得られればよい。但しこれら二つの量に関する知識は本質的には同等である。

I.　空間の任意の n 点における流体速度の結合確率分布の完全な系．

II.　実現されうるあらゆる速度場 $u(x)$ に対する実現の確率 $P(u(x))$.

これらの量を得るためには，それぞれ次の様な取り扱いが必要である．

I を得るためには (1.1), (1.2) から，各種平均値の時間的変化を支配す

る方程式の完全な系を導く．

II　を得るためには，任意の速度場を初期条件とする(1.1),(1.2) の解を閉じた形で求め，このような解の集合に確率を導入することによって，任意時刻における速度場に対する実現の確率を，初期時刻における確率で表わす。

これらの二つの取り扱いのうち，従来乱流理論で才一の取り扱いによって，数学的定式化がなされてきた．しかし，よく知られている様に，Navier-Stokes 方程式の非線型性の為に，n 次平均値に対する方程式には，必ず $n+1$ 次平均値があらわれ，方程式系が閉じない，という難点がある。

これに対して，Hopf[(1)]によって始められた才二の取り扱いは，分布汎函数方程式によって乱流を数学的定式化するものであるが，これはむしろ直観的には，個々の速度場の時間的発展に対する完全な知識を用いずに，任意時刻の確率を初期時刻での確率と結びつける取り扱いであると考えてもよい。

§2.　特性函数に対する方程式

はじめに，以後の便宜の為に若干の記法を導入する．

「連続の方程式を満たす任意函数 $u(x, t_0)$ を初期条件とする様な Navier-Stokes 方程式の解を $u(x, t)$ と表わす．これら二つの函数に対して，函数空間をそれ自身に移す作用素 T_{t-t_0} を，

$$u(x, t) = T_{t-t_0}[u(x, t_0)]. \tag{2.1}$$

で定義する。但し $t_0 \leqq t$. 作用素 T_{t-t_0} は次の性質を持つ:

$t_0 < t_1 < t$ なる t_1 に対して　$T_{t-t_0} = T_{t-t_1} \cdot T_{t_1-t_0}$,

$T_{t_0-t_0}$ は恒等変換.

次に, $u(x)$ を有限次元ベクトル空間の点 x で近似的に代表させる。x のとり方は $u(x)$ をよく表わしているものであれば何でもよいが, 例えば, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を物理空間の異る n 点とし,

$$u_i(x_j) \qquad i=1,2,3 \quad ; \; j=1,2,\cdots\cdots,n$$

を成分とする $3n$ 次元ベクトルは, $u(x)$ を近似的に表わしている.

$u(x, t_0)$ を x_{t_0}, $u(x, t)$ を x_t と書くと, 先の記法を用いれば, これらの二つのベクトルの間には

$$x_t = T_{t-t_0}[x_{t_0}]. \tag{2.2}$$

なる関係が成立する.」

x の空間 Ω で確率分布を考える。この確率分布は Ω の適当な部分集合の族に対して定義された集合函数 $P(A)$ であるが, 更に確率分布函数を持っている事を仮定して, 点函数 $P(x)$ で表わすものとする. もちろん, 各時刻に於いて異った分布を考える事が可能であるから, その意味で $P_t(A)$, $P_t(x)$ と書く. $P_t(x)$ の時間的変化を支配する関係は, 次の確率保存の関係である。

$$P_t(A) = \int_A P_t(x)\,dx = \int_{T_t^{-1}[A]} P_0(x)\,dx = P_0(T_t^{-1}[A]). \tag{2.3}$$

但し, T_t^{-1} は T_t の逆演算.

又は,

$$P_t(T_t[A]) = P_0(A). \tag{2.4}$$

各時刻における各種平均量は,

$$\bar{F} = \int_\Omega F(\mathbf{x})\, P_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

$$\bar{F}_t = \int_\Omega F(\mathbf{x})\, P_t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.6}$$

確率保存の関係により,

$$\bar{F}_t = \int_\Omega F(\mathbf{x})\, P_t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega F(T_t(\mathbf{x}))\, P_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.7}$$

$P_t(\mathbf{x})$ のFourier 変換として, 次の特性函数を考える:

$$\phi(\mathbf{y}, t) = \int_\Omega e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\, P_t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.8}$$

ここで, $\mathbf{y}$ はΩの任意のベクトルであり, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ は内積を表わす. $\phi(\mathbf{y}, t)$が次の性質を持つことは, 定義から明らかである:

$$\phi(0, t) = 1, \quad \phi^*(\mathbf{y}, t) = \phi(-\mathbf{y}, t), \quad |\phi(\mathbf{y}, t)| \leq 1. \tag{2.9}$$

$P_t(\mathbf{x})$ と $\phi(\mathbf{y}, t)$とは一対一に対応するが, $\phi(\mathbf{y}, t)$ を考える事の利点は, 各種平均値が $\phi(\mathbf{y}, t)$ から容易に求められる事である. すなわち,

$$\overline{(X_i)_t} = \int_\Omega X_i\, P_t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{\partial}{i\,\partial Y_i} \phi(\mathbf{y}, t)\Big|_{\mathbf{y}=0}, \tag{2.10}$$

$$\overline{(X_i X_j)} = \int_\Omega X_i X_j\, P_t(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{\partial^2}{(i\,\partial Y_i)(i\,\partial Y_j)} \phi(\mathbf{y}, t)\Big|_{\mathbf{y}=0}. \tag{2.11}$$

従って, $\phi(\mathbf{y}, t)$ を $\phi(\mathbf{y}, 0)$ を初期条件として求める事は $\bar{F}_t = \overline{F(u(\mathbf{x}, t))}$に対する方程式系を解く事と同等である.

$\phi(\mathbf{y},t)$ の時間的変化に対する方程式を導く.

$$\phi(\mathbf{y},t)=\int_\Omega e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}P_t(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_\Omega e^{iT_t[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}}P_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$=\iint_{\Omega\,\Omega} e^{i(T_t[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}')}\phi(\mathbf{y}',0)\,d\mathbf{y}'d\mathbf{x}, \qquad (2.12)$$

ここで $P_0(\mathbf{x})=\int e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}'}\phi(\mathbf{y}',0)\,d\mathbf{y}'$ を用いた。

流体力学では $T_t[\mathbf{x}]$ はexplicit には表わされていないで, 微分形だけが

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt}=\frac{dT_t[\mathbf{x}]}{dt}=Q[\mathbf{x}], \qquad (2.13)$$

の形で与えられている. $\phi(\mathbf{y},t)$ の t についての微分を考えれば,

$$\phi(\mathbf{y},t+\Delta t)-\phi(\mathbf{y},t)=\int_\Omega\left(e^{iT_{\Delta t}[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}}-e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\right)P_t(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$=\int_\Omega e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\left(e^{iQ[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}\Delta t}-1\right)P_t(\mathbf{x})d\mathbf{x}+O(\Delta t^2)$$

$$=\int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\,iQ[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}\Delta t\,P_t(\mathbf{x})d\mathbf{x}+O(\Delta t^2) \qquad (2.14)$$

$\Delta t\to 0$ の極限をとり,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y},t)=i\int Q[\mathbf{x}]\cdot\mathbf{y}\,e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}P_t(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad (2.15)$$

ここで, $Q[\mathbf{x}]$ が $\mathbf{x}$ の多項式の場合には, 上の式はつぎの形に書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y},t)=i\mathbf{y}\cdot Q\left[\frac{\partial}{i\partial\mathbf{y}}\right]\phi(\mathbf{y},t). \qquad (2.16)$$

§3. 汎函数微分

前節で用いた $3n$ 次元ベクトルは，本来は連続無限次元ベクトル $u(x)$ で表わされるべきものである．従って，$\psi(r,t)$ の方程式にあらわれた微分演算 $\frac{\partial}{\partial r}$ は，$3n$ 次元ベクトルから連続無限次元ベクトルに拡張し，汎函数微分の形にしておく必要がある．

簡単の為に一次元スカラー函数の汎函数 $\Phi[y(x)]$ を考える．$\eta(x)$ を微少な函数とするとき，$y(x)$ が $y(x)+\eta(x)$ に変った時の Φ の変化 $\Phi[y(x)+\eta(x)]-\Phi[y(x)]$ は，$\eta(x)$ の線型汎函数であるから，

$$\Phi[y(x)+\eta(x)]-\Phi[y(x)]=\int A(x)\eta(x)\,dx \tag{3.1}$$

と書ける．この $A(x)$ を，汎函数 Φ の $y(x)$ による汎函数微分といい，$\frac{\delta\Phi}{\delta y(x)}$ と書く．この形と，$y(x)$ をベクトル $y(x_i)$ $(i=1,\cdots,3N)$ で近似した時にあらわれる形式はつぎのように対応づけられる．$\Phi[y(x)]$ を函数 $\Phi(y(x_i))$，但し $x_{i+1}=x_i+\varepsilon$，でおきかえると，

$$\Phi(y(x_i)+\eta(x_i))-\Phi(y(x_i))=\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial\Phi}{\partial y(x_i)}\eta(x_i) \tag{3.2}$$

従って $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi}{\partial y(x_i)}$ が存在する時には，それを $A(x_i)$ と書けば，

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_i\frac{\partial\Phi}{\partial y(x_i)}\eta(x_i)\varepsilon \longrightarrow \int A(x)\eta(x)\,dx$$

であるとすると，$A(x)$ は $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi}{\partial y(x)}$ に相当する．その意味で，

$$A(x)=\frac{\delta\Phi}{\delta y(x)}=\frac{\partial\Phi}{\partial y(x)dx} \tag{3.3}$$

と書く．

§4. Navier-Stokes方程式に対する特性汎函数方程式

Navier-Stokes方程式自身について§2の形を導くよりも，Fourier変換されたNavier-Stokes方程式について考える方が便利である．$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$のFourier変換を$\mathbf{v}(\mathbf{k},t)$と書く．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\int \mathbf{v}(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,d\mathbf{k}$$

Navier-Stokes 方程式をFourier 変換し，圧力項を消去すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{k},t)=-\nu k^2\mathbf{v}(\mathbf{k})-i\int \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left\{\mathbf{v}(\mathbf{k}')-\frac{\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k}))\right\}d\mathbf{k}' \qquad (4.1)$$

連続の方程式のFourier変換は，

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{k})=0 \qquad (4.2)$$

(4.1) の右辺を(2.16)に代入すれば，汎函数方程式を導く事が出来るが，式の形をきれいにする為に次の取扱いを行う．(4.1)の両辺の共役複素数をとり，$\mathbf{z}(\mathbf{k})$なるベクトルとのスカラー積をとる．但し，$\mathbf{z}(\mathbf{k})$は$\mathbf{z}^*(\mathbf{k})=\mathbf{z}(-\mathbf{k})$　かつ，$k\to\infty$　の時，$\mathbf{z}(\mathbf{k})$は十分速く0になるという性質を持つ以外は任意でよい．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)(\mathbf{z}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k},t))=i\int(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k}-\mathbf{k}',t))(\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k}',t))\,d\mathbf{k}' \qquad (4.3)$$

ここで $\tilde{\mathbf{z}}=\mathbf{z}-\frac{\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z})$　は$\mathbf{z}$の$\mathbf{k}$に垂直な成分であり，$\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{k})=0$ である．$\tilde{\mathbf{z}}$は $\tilde{z}_i=\Delta_{ij}(\mathbf{k})\,z_j$，但し $\Delta_{ij}(\mathbf{k})=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}$　と書ける．内積を$(\mathbf{z},\mathbf{v})=\int \mathbf{z}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$　で定義する．両辺を$\mathbf{k}$で積分すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{z},\mathbf{v})+\nu\int k^2(\mathbf{z}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k}))\,d\mathbf{k}=i\iint(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k}-\mathbf{k}',t))(\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}^*(\mathbf{k}',t))\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}' \qquad (4.4)$$

$\mathbb{K}-\mathbb{K}'=\mathbb{K}''$ とおくと，

$$\text{右辺} = i\iint (\mathbb{K}\cdot\mathbb{V}^*(\mathbb{K}-\mathbb{K}',t))(\tilde{\mathbb{z}}(\mathbb{K}+\mathbb{K}'')\cdot\mathbb{V}^*(\mathbb{K}',t)\,d\mathbb{K}'d\mathbb{K}''. \qquad (4.5)$$

両辺に $\exp[i(\mathbb{z},\mathbb{V})]$ をかけて確率平均をとれば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbb{z},t)+\nu\int K^2 Z_i(\mathbb{K})\frac{\partial\Phi(\mathbb{z})}{\partial Z_i(\mathbb{K})d\mathbb{K}}d\mathbb{K}$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial Z_i(\mathbb{K}'')d\mathbb{K}''}\left[\int K_i' Z_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\frac{\partial\Phi(\mathbb{z})}{\partial Z_j(\mathbb{K}')d\mathbb{K}'}d\mathbb{K}'\right]d\mathbb{K}''. \qquad (4.6)$$

$\dfrac{\partial}{\partial Z_i(\mathbb{K})d\mathbb{K}}=\Delta_{ij}(\mathbb{K})\dfrac{\partial}{\partial\tilde{Z}_j(\mathbb{K})d\mathbb{K}}$ を用いて $\tilde{\mathbb{z}}$ のみの式に書き直すと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tilde{\mathbb{z}},t)+\nu\int K^2\tilde{Z}_i(\mathbb{K})\frac{\partial\Phi(\tilde{\mathbb{z}})}{\partial\tilde{Z}_i(\mathbb{K})d\mathbb{K}}d\mathbb{K}$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial\tilde{Z}_m(\mathbb{K}'')d\mathbb{K}''}\left[\int K_i'\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\Delta_{jl}(\mathbb{K}')\Delta_{im}(\mathbb{K}'')\frac{\partial\Phi(\tilde{\mathbb{z}})}{\partial\tilde{Z}_l(\mathbb{K}')d\mathbb{K}'}d\mathbb{K}'\right]d\mathbb{K}''.$$

(4.7)

§5. 特性汎函数方程式の解

方程式（4.7）の解は次の２つの極限の場合に，Hopf[1]，Hopf-Titt[2] によって求められている．

(i) 弱い乱れの場合

慣性項を無視すると，(4.7) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tilde{\mathbb{z}})+\nu\int K^2\tilde{Z}_i(\mathbb{K})\frac{\partial\Phi(\tilde{\mathbb{z}})}{\partial\tilde{Z}_i(\mathbb{K})d\mathbb{K}}d\mathbb{K}=0. \qquad (5.1)$$

となる．

$$X(\tilde{\mathbb{z}})=\iint a_{ij}(\mathbb{K},\mathbb{K}')\tilde{Z}_i(\mathbb{K})\tilde{Z}_j(\mathbb{K})\exp[-\nu(K^2+K'^2)t]\,\delta(\mathbb{K}+\mathbb{K}')\,d\mathbb{K}d\mathbb{K}'$$

$$=\int a_{ij}(\mathbb{K},-\mathbb{K})\tilde{Z}_i(\mathbb{K})\tilde{Z}_j(-\mathbb{K})\exp[-2\nu K^2 t]\,d\mathbb{K}. \qquad (5.2)$$

は(5.1)の一つの解である．但し，a_{ij}は$a_{ij}(\mathbb{K},\mathbb{K}')=a_{ij}(\mathbb{K}',\mathbb{K})$　及び
$\mathrm{Re}[\sum_{ij} a_{ij}\tilde{z}_i(\mathbb{K})\tilde{z}_j(-\mathbb{K})]=\mathrm{Re}\,a_{ij}\tilde{z}_i\tilde{z}_j \geq 0$ を満たすものとする．
しかし，$X(\tilde{z})$は特性汎函数の性質を満たさない．

$\Phi(\tilde{z})=\exp(-X)$とおくと，$\Phi(\tilde{z})$は特性汎函数の性質を満たし，求める解になっている．これから二重速度スペクトル $\Phi_{ij}(\mathbb{K},t)$を求めると，
$\Phi_{ij}(\mathbb{K},t)=\Phi_{ij}(\mathbb{K},0)\exp[-2\nu\mathbb{K}^2t]$ となり積平均値に対する方程式から得られる結果と一致する．

(ii) 非粘性の極限

非粘性の極限では乱れのエネルギーの粘性による消散が存在しないから，乱れが統計的平衡状態にある事が可能であり，場に対する確率分布は時間的に定常となるから，(4.7)は，時間微分，粘性の項を落すことにより

$$\int \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_m(\mathbb{K}'')d\mathbb{K}''}\left[\int K_i' \Delta_{j\ell}(\mathbb{K})\Delta_{im}(\mathbb{K}')\tilde{z}_j(\mathbb{K}+\mathbb{K}')\frac{\partial\Phi(\tilde{z})}{\partial\tilde{z}_\ell(\mathbb{K})d\mathbb{K}'}d\mathbb{K}'\right]=0 \tag{5.3}$$

となる．

$$X(\tilde{z})=\iint a_{ij}(\mathbb{K},\mathbb{K}')\tilde{z}_i(\mathbb{K})\tilde{z}_j(\mathbb{K}')\delta(\mathbb{K}+\mathbb{K}')\,d\mathbb{K}\,d\mathbb{K}'$$

$$=\int a_{ij}(\mathbb{K},-\mathbb{K})\tilde{z}_i(\mathbb{K})\tilde{z}_j(-\mathbb{K})\,d\mathbb{K}, \tag{5.4}$$

はこの方程式の一つの解である．但し，$X(\tilde{z})$は特性汎函数の性質を満たさないから，Wを2回連続的微分可能な函数として，

$$\Phi(\tilde{z})=W\left(\int\tilde{z}_i(\mathbb{K})\tilde{z}_j(-\mathbb{K})\,d\mathbb{K}\right), \tag{5.5}$$

を考えると，これが方程式の解である事が次の様にして示される．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{Z}_\ell(\mathbb{K}')d\mathbb{K}'} = 2\,\overline{W}'\,\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}'). \tag{5.6}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\partial}{\partial \tilde{Z}_m(\mathbb{K}'')d\mathbb{K}''}\left[\int K_i'\Delta_{j\ell}(\mathbb{K}')\Delta_{im}(\mathbb{K}'')\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\,2\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')\overline{W}'d\mathbb{K}'\right]d\mathbb{K}'' \\ &= 2\overline{W}'\int \frac{\partial}{\partial \tilde{Z}_m(\mathbb{K}'')d\mathbb{K}''}\left[\int K_i'\Delta_{j\ell}(\mathbb{K}')\Delta_{im}(\mathbb{K}'')\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')d\mathbb{K}'\right]d\mathbb{K}'' \\ &\quad +4\overline{W}''\iint\left[K_i'\Delta_{j\ell}(\mathbb{K}')\Delta_{im}(\mathbb{K}'')\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')\tilde{Z}_m(-\mathbb{K}'')\right]d\mathbb{K}'d\mathbb{K}''. \end{aligned} \tag{5.7}$$

オ1項は，$\Delta_{j\ell}(\mathbb{K}')\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')$ の存在の為に0となる．オ2項は，

$$K_i'\Delta_{im}(\mathbb{K}'') = K_i'\left(\delta_{im}-\frac{K_i''K_m''}{K''^2}\right) = K_m' - \frac{(\mathbb{K}'\cdot\mathbb{K}'')}{K''^2}K_m'' \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{j\ell}(\mathbb{K}')\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'') &= \tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')\tilde{Z}_\ell(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'') - \frac{K_\ell\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')}{K'^2}K_j\tilde{Z}_j(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'') \\ &= \tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}')\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'') \end{aligned} \tag{5.9}$$

を考慮すると，

$$\begin{aligned} I &= 4\overline{W}''\iint\left(K_m' - \frac{\mathbb{K}'\cdot\mathbb{K}''}{K''^2}K_m''\right)\tilde{Z}_\ell(-\mathbb{K}')\tilde{Z}_\ell(\mathbb{K}'+\mathbb{K}'')\tilde{Z}_m(-\mathbb{K}'')d\mathbb{K}'d\mathbb{K}'' \\ &= 4\overline{W}''\iint(\mathbb{K}'\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}''))(\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}')\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(\mathbb{K}'+\mathbb{K}''))d\mathbb{K}'d\mathbb{K}'' \end{aligned} \tag{5.10}$$

$\mathbb{K}'+\mathbb{K}''=-\mathbb{K}$ によって $\mathbb{K}$ を導入すると，

$$I = 4\overline{W}''\iint_{\mathbb{K}+\mathbb{K}'+\mathbb{K}''=0}(\mathbb{K}'\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}''))(\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}')\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}))\,dv, \tag{5.11}$$

但し，体積積分 dv は，$\mathbb{K}+\mathbb{K}'+\mathbb{K}''=0$ となる様な $(\mathbb{K},\mathbb{K}',\mathbb{K}'')$ 空間の部分集合について行なう．$\mathbb{K}$ と $\mathbb{K}'$ を交換すると，

$$I = 4\overline{W}''\iint(\mathbb{K}\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}''))(\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K})\cdot\tilde{\mathbb{Z}}(-\mathbb{K}'))\,dv. \tag{5.12}$$

(5.11) と (5.12) を加える事により，

$$2I = 4W'' \iint_{\mathbb{K}+\mathbb{K}'+\mathbb{K}''=0} ((\mathbb{K}'+\mathbb{K})\cdot\tilde{Z}(-\mathbb{K}''))(\tilde{Z}(-\mathbb{K})\cdot\tilde{Z}(-\mathbb{K}'))d\nu \qquad (5.13)$$

この積分は，$(\mathbb{K}'+\mathbb{K})\cdot\tilde{Z}(-\mathbb{K}'') = -\mathbb{K}''\cdot\tilde{Z}(-\mathbb{K}'')$ を含んでいるから，$I=0$．

特性汎函数に対する条件を満足させる為に，$W=\exp[-\frac{a}{2}x]$, $a>0$ とおけば，

$$\Phi(\tilde{Z}) = \exp\left[-\frac{a}{2}\int|\tilde{Z}(\mathbb{K})|^2 d\dot{\mathbb{K}}\right]. \qquad (5.14)$$

は非粘性の極限に対する特性汎函数である．これからエネルギースペクトル密度$\Phi(K)$を求めると，

$$\Phi(K) = a. \qquad (5.15)$$

エネルギースペクトル函数 $E(K)$ は，$E(K) = 4\pi K^2 a$， (5.16)

となり，非粘性の極限で等方的正規分布が定常解となり，その時波数空間でエネルギー等分配の状態が実現することが判る．

§6. Path Integral による解

他方，Path Integral による解が Rosen[3] によって求められている．

(2.2) は，$\int e^{i(T_t[X]\cdot Y - X\cdot Y')}dX$ を積分核 $K[Y,Y';t,0]$ とおく事により

$$\Phi(Y,t) = \int_\Omega K[Y,Y';t,0]\Phi(Y',0)dY'. \qquad (6.1)$$

$K[Y,Y';t,0]$ は一般には未知である operator T_t を含んでいるので，このままでは解けたことにはならない．しかし時間間隔$(0,t)$を無数の微少時間間隔に分割し，Kの性質

$$K[Y,Y';t,t'] = \int K[Y,Y'';t,t'']K[Y'',Y';t'',t']dY'', \qquad (6.2)$$

但し，$t' < t'' < t$，

を用いると，積分を既知の operator $Q[X]$ を含む形に書き表わすことがで

ある.

$$K[Y, Y'; t, 0] = \lim_{n\to\infty} \int\cdots\int h[Y^{(1)}, Y'; t^{(1)}, 0] \prod_{m=1}^{n} [Y^{(m+1)}, Y^{(m)}; t^{(m+1)}, t^{(m)}] \, dY^{(m)}, \tag{6.3}$$

但し, $Y^{(n+1)} = Y$, $t^{(n+1)} = t$, $t^{(m+1)} - t^{(m)} = \frac{t}{n+1}$ とする.

$$\begin{aligned} K[Y^{(m+1)}, Y^{(m)}; t^{(m+1)}, t^{(m)}] &= K[Y^{(m+1)}, Y^{(m)}; t^{(m)} + \Delta t, t^{(m)}] \\ &= \int_{\Omega} e^{i[T_{\Delta t}[x]\cdot Y^{(m+1)} - x\cdot Y^{(m)}]} dx \\ &\simeq \int_{\Omega} e^{i[x\cdot Y^{(m+1)} + Q[x]\cdot Y^{(m+1)}\Delta t - x\cdot Y^{(m)}]} dx \\ &= \int_{\Omega} e^{i[x\cdot(Y^{(m+1)} - Y^{(m)}) + Q[x]\cdot Y^{(m+1)}\Delta t]} dx. \end{aligned} \tag{6.4}$$

$\eta(t^{m}) = Y^{(m)}$ とおくと

$$K[Y, Y'; t, 0] = \int_{\eta(0)=Y'}^{\eta(t)=Y} \int e^{i\sum_{m=1}^{n}\left[x^{(m)}\cdot\frac{\partial \eta(t^{(m+1)})}{\partial t} + Q[x^{(m)}]\cdot\eta(t^{(m+1)})\right]\Delta t} \prod_{m=1}^{n} dx^{(m)} \prod_{m=1}^{n} dY^{(m)}. \tag{6.5}$$

$\int \exp[iF[x]]\,dx$ を計算する. xは実は函数であり, この積分は汎函数積分であるが, Fがxについて二次である時, $\int \exp[iF[x]]\,dx = \mathcal{N}\exp[iF[\bar{x}]]$ である事が知られている.[4] 但し, $F[\bar{x}]$は汎函数$F[x]$の停留値, $\mathcal{N}$はnormalizing factorである. 各$x^{(m)}$に対してこの積分を実行すると結果は$\eta(t^{m})$のみの汎函数になるから,

$$K[Y, Y'; t, 0] = \int_{\eta(0)=Y'}^{\eta(t)=Y} \left[\exp i\int_0^t R[\eta(t)]\,dt\right] \mathcal{D}[\eta(t)]. \tag{6.6}$$

ここで$\mathcal{D}[\eta(t)]$ は, $\eta(t) = Y = u(x, t)$, $\eta(0) = Y' = u(x, 0)$ となる様なあらゆるpath についての積分である.

但し，$R[\eta(t)]$ は，

$$R[\eta(t)] = \int dx\, A_\mu B_{\mu\nu} A_\nu . \qquad (6.7)$$

A，B は，

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\mu}\right), \qquad (6.8)$$

$$B_{\alpha\mu}(x,t)\int dx'\,\eta_\nu(x',t)\,\frac{1}{2}\left\{D_{\nu\mu\beta}(x'-x)+D_{\nu\beta\mu}(x'-x)\right\}=\delta_{\alpha\beta}, \qquad (6.9)$$

$$D_{\alpha\beta\mu}(x)=2\pi i\int dK\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{K_\alpha K_\beta}{K_\sigma K_\sigma}\right)K_\nu \exp(2\pi i K_\tau x_\tau), \qquad (6.10)$$

である．

Path Integral による解は，§5の解が極限の場合についてのみ求められているのに反して，きわめて一般的な解である．しかし $R[\eta(t)]$ の形が既にかなり複雑である為に，実際に Path Integral を実行するのは甚だ困難であろう．この形式の解から，より興味ある結論を導き出す為には，何等かの意味で，$R[\eta(t)]$ の形を簡単化して，Path Integral が容易に実行される様な場合に帰着させる事が必要であると思われる．

参考文献

1) E. Hopf, J. Ratl. Mech. Anal. 1, 87 (1952)

2) E. Hopf and E. W. Titt, J. Ratl. Mech. Anal. 2, 587 (1953)

3) G. Rosen, Phys. Fluis. 3, 106 (1960)

4) R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integral. (McGraw-Hill, 1965) pp. 58-61