数理解析研究所講究録
第23巻 1967年 15-37

無限次元ベクトル空間上の測度

京大数研　山崎泰郎

無限次元ベクトル空間上の測度，特に函数空間上の測度が従来流体力学の分野でどのように用いられて来たか，卒直に言って筆者はあまり知らない。そこで本稿の題材の選び方も或いは適切ではないかも知れぬが，「有限次元的測度の family から無限次元測度へ拡張する」という問題を中心にして解説してみよう。

§1．定義．

まず測度の定義をしておく。

<u>定義1</u>．σ－加法族，有限加法族．

集合Xが与えられたとき，Xの部分集合の集合$\mathcal{B}$で次の性質をみたすものをσ－加法族という。

i)　$X \in \mathcal{B}$

ii)　$E \in \mathcal{B} \Longrightarrow E^c \in \mathcal{B}$　（E^cはEの余集合）.

iii)　$E_n \in \mathcal{B}$　$(n=1,2,\cdots\cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$

上記iii)の代りに，やゝ弱い条件iii)′: $E_n \in \mathcal{B}$ $(n=1,2,\cdots,N)$ $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{N} E_n \in \mathcal{B}$　を考え，$\mathcal{B}$がi) ii) iii)′をみたすことを要請するとき$\mathcal{B}$は有限加法族であるという。

σ－加法族はつねに有限加法族であるが，逆は必ずしも成

りえたない。

<u>定義 2</u>　σ−加法的測度，有限加法的測度

σ−加法族 $\mathcal{B}$ の上で定義され，実数又は $+\infty$ を値とする函数 μ が次の性質をもつとき，μ を $\{X, \mathcal{B}\}$ 上の測度（或いは σ−加法的測度）という．

i)　$\mu(\phi) = 0$　（ϕ は空集合）

ii)　$\forall E \in \mathcal{B}, \quad \mu(E) \geqq 0$

iii)　$E_n \in \mathcal{B}\ (n=1,2,\cdots)$，$E_n \cap E_m = \phi$ for $n \neq m$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

（右辺が $+\infty$ になる場合も含む．又 $\infty \times 0 = 0$ とみなす．すなわち $\mu(E_n) = 0$ for $n=1,2,\cdots \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$．）

上記要請の代りに，μ が有限加法族の上で定義されているとして i) ii) 及び iii)′（＝ iii) で有限和におきかえた条件）をみたすと要請したとき，μ は有限加法的測度であるという．

こうして定義された測度をもとにして積分を定義することができる．その際，測度の σ−加法性の要請があると種々の極限操作が円滑にできる．例えば Lebesgue の項別積分の定理：

「$\forall x \in X$: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$，かつ $\sup_n |f_n(x)|$ が可積分

$$\Longrightarrow \int_X f_n(x)\, d\mu(x) \longrightarrow \int_X f(x)\, d\mu(x)$$」

はσ−加法的測度に対しては成り立つが，有限加法的測度に対しては一般に成立しない．この辺の事情は *Lebesgue* 積分論の本に詳しく説明してある．

函数解析の立場からは，σ−加法性の有難い点として更に次のようなことを強調しておきたい。第一は L^2 空間の完備性である．二乗可積分函数の空間 L^2 を

$$L^2 = \left\{ f \mid f: \mathcal{B}\text{-可測函数 on } X,\ \int_X |f|^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

によって定義し，その位相をノルム $\|f\| = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu(x)}$ によって入れる．ここまでは μ が有限加法的測度であっても可能である。然し μ のσ−加法性と有限加法性との差異は，L^2 が完備であるか否かの点に現われる．μ がσ−加法的であると L^2 は完備であってヒルベルト空間になるので，これにヒルベルト空間論の諸定理が適用出来る。μ が有限加法的でしかないときは，ヒルベルト空間論を用いるためには，L^2 に仮想的な極限要素を全部つけ加えた完備化拡大という操作をしなければならない．このとき極限要素は抽象的には考えられるけれども，それは最早函数としての意味を失なうから具体的に把握し難くなる。これは理論上不満足であるだけでなく，実際に取り扱いを厄介にする．

第二には *Radon-Nykodim* の定理の成立である。いま二つの測度 μ_1, μ_2 があって $\mu_1(E)=0$ なら必らず $\mu_2(E)=0$ とな

るとき μ_2はμ_1に関して絶対連続であるという。その例としては，適当な正値可測函数 $f(x)$を考えて，μ_1とμ_2が

$$(1)\qquad \mu_2(E) = \int_E f(x)\,d\mu_1(x) \qquad (\text{for } {}^{\forall}E \in \mathfrak{B})$$

の関係にあるときはμ_2はμ_1に関し絶対連続である。Radon–Nykodim の定理は，μ_1, μ_2ともσ-加法的なとき，上記の逆の成立を主張する。すなわちμ_2がμ_1に関して絶対連続でさえあれば，適当な函数$f(x)$が存在して(1)の形に書かれる。この定理は或る場合には非常に有用である。

§2. 問題の提起.

前§の所論から「有限加法的測度が与えられたとき，これを適当なσ-加法的測度に拡張出来るか否か」の問題の重要性が諒解されるであろう。これに関する一般的な定理としては次のものがある。（以後，簡単のため有界測度すなわち$\mu(X)<\infty$をみたす測度についてだけ考える）。

<u>定理（Hopf）</u>

$\mathcal{R}$を有限加法族，μを$\mathcal{R}$の上で定義された有限加法的測度とする。$\mathcal{R}$を含む最小のσ-加法族$\mathfrak{B}$の上にまでμを拡張してσ-加法的測度にすることが出来るための必要十分条件は次の如くである。

$E_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1,2,\cdots)$, $E_1 \supseteqq E_2 \supseteqq \cdots \supseteqq E_n \supseteqq \cdots$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$$ 」

これまでは一般の集合Xの上の測度について述べて来たがこゝで無限次元ベクトル空間との関連において問題点を説明しよう。無限次元空間の測度を考えると言っても実際には有限個の座標にのみdependした函数(tame function という)の積分が考えられれば十分なことが多い。そこで無限次元空間の上に最初から天下りに測度があるのではなく，その有限次元商空間の family の上に有限次元測度の family が先ず与えられていると考えるのが自然であろう。

例えば$[0,1]$で定義された実函数の全体(これを$R^{[0,1]}$で表わす)を考えよう。$t_1, t_2, \cdots, t_n \in [0,1]$として，$(f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_n))$の分布が，任意の$t_1, t_2, \cdots, t_n$に対してわかっているという場合を想定する。すなわちR^n(n次元ユークリッド空間)上の測度$\mu_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$があって$(f(t_1), \cdots, f(t_n))$の分布は$\mu_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$に従うとする。問題は「$R^{[0,1]}$に適当な$\sigma$-加法的測度を定義して，この測度による$(f(t_1), \cdots, f(t_n))$の分布が与えられた$\mu_{t_1, \cdots, t_n}$になるように出来るか」ということ，もう少し正確に言えば，$f \in R^{[0,1]} \longrightarrow (f(t_1), \cdots, f(t_n)) \in R^n$の対応を$P_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$として

$\exists ? \mu$, $\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in [0,1]$, $\forall E$; R^nの Borel set

$$\mu(p^{-1}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E)) = \mu_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E)$$

ということである。$R^{[0,1]}$ の場合，後に説明するように（Kolomogorov の定理）この問題は肯定的に解決されている。

問題の定式化を一般の無限次元ベクトル空間に対して行なうと次の如くである。X を無限次元位相ベクトル空間とし，$Y=\{\varphi\}$ を X 上に定義された *linear function* の集合とする。（一次独立な無限個の φ が Y に属していなければ，以下の問題提起は無意味になる）。Y の任意の有限集合 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ に対し R^n 上の Borel 測度 $\mu_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}$ が対応しているとき，X 上の測度 μ で次の性質をみたすものが存在するか否か？

1) すべての $\varphi \in Y$ を可測にする。

2) $\forall \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in Y$, $\forall E$: R^n の Borel set

$$(2) \qquad \mu(p^{-1}_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(E)) = \mu_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(E)$$

ただし $p_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}$ は，$x \in X \longrightarrow (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \in R^n$ なる対応。この問題が肯定的に答えられるためには，明らかに次の条件（無矛盾の条件）は必要である。

$$p^{-1}_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(E) = p^{-1}_{\varphi'_1,\varphi'_2,\cdots,\varphi'_m}(E')$$
$$\Longrightarrow \mu_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(E) = \mu_{\varphi'_1,\varphi'_2,\cdots,\varphi'_m}(E')$$

従って問題は「有限次元測度の *family* $\{\mu_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}\}$ が無矛盾の条件さえみたせば，対応する無限次元測度 μ が X 上に作れるか」ということである。この答は空間 X（及び Y）の取り

方によっていろいろであり、後に肯定的な例と否定的な例とを一つずつあげる。

n次元ボレル集合族（$=R^n$における開集合をすべて含む最小のσ-加法族）を$\mathfrak{B}_n$で表わすとき $\mathcal{C}\equiv\bigcup_{\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}\subset Y} p^{-1}_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(\mathfrak{B}_n)$ はXの部分集合から成る有限加法族である。（ただし$\bigcup$はYのすべての有限部分集合$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$について取る）。$\mathcal{C}$が$\sigma$-加法族でないことを見るには、$E_1,E_2,\cdots,E_i,\cdots\in\mathcal{C}$のとき、もしすべての$E_i$が或る共通の$p^{-1}_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(\mathfrak{B}_n)$に属していればこれらの和集合$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$も$p^{-1}_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(\mathfrak{B}_n)$に属するが、もし番号をごとに$E_i$が異なる$p^{-1}_{\varphi^{(i)}_1,\cdots,\varphi^{(i)}_{n(i)}}(\mathfrak{B}_{n(i)})$に属しているときには$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$は一般に$\mathcal{C}$には属さないことを注意すればよい。

ところで有限次元測度の family $\{\mu_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}\}$が無矛盾の条件をみたしているときには、(2)式を$\mu$の定義とみなすことにより、$\mathcal{C}$上に有限加法的測度$\mu$を定義することができる。そこで前述の問題は「このように定義された有限加法的測度μを、$\mathcal{C}$を含む最小のσ-加法族$\mathfrak{B}$の上にまで拡張して、σ-加法的測度にすることができるか」ということと同値である。それに答えるための判定条件として、この$\S$の最初に書いた Hopf の定理が用いられるわけである。以後、証明なしで主な結果を紹介することにする。

§3．無限直積空間の場合．

実数列の全体をR^∞で表わし，実直線Rの(可算)無限直積空間という．

$$R^\infty = \{ x=(x_1, x_2, \cdots\cdots) \mid x_i \in R \text{ for } \forall i \}$$

R^∞の元に対しそのi番目の座標を対応させる対応をφ_iと書こう．φ_i: $x \in R^\infty \longrightarrow x_i \in R$．　前§で言う$X$を上記$R^\infty$と考え$Y = \{ \varphi_i \mid i=1,2,\cdots \}$と考えると，問題は次の如くなる。(簡単のため$P_{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}$の代りに$P_n$で表わすことにする)。

「n次元ボレル測度のfamily $\{\mu_n\}$が与えられていて，それが無矛盾の条件：$\mu_n(P_{n,m}^{-1}(E)) = \mu_m(E)$ for $\forall E \in \mathcal{B}_m$をみたしていれば，$R^\infty$上に適当な$\sigma$-加法的測度$\mu$を定義して$\mu(P_n^{-1}(E)) = \mu_n(E)$ for $\forall E \in \mathcal{B}_n$となるようにできるか」。ただし$P_{n,m}$は$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \longrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_m)$なる対応($n > m$として)を意味する。

R^∞の代りに$R^{[0,1]} = \{ [0,1]$で定義された実函数$\}$を考えた場合の問題の定式化は既に前§で述べた。一般に集合Λ上で定義された実函数の全体R^Λに対しても同様な定式化ができる．R^ΛをRのΛ-直積空間という。Λが可算であっても非可算であっても，無限直積空間に対してはつねに上記の測度構成の問題は肯定的に答えられる．

<u>定理(Kolomogorov)．</u>

実直線Rの無限直積空間R^Λに対しては（Λが可算でも非可算でも），無矛盾な有限次元測度のfamily $\{\mu_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}\}$ はつねに一つのσ-加法的測度μに拡張できる」。

念のために「拡張」という意味をもう一度式で書いてみると

$\forall \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \Lambda,\quad \forall E \in \mathcal{B}_n\ ;$

$$\mu(\{x \in R^\Lambda \mid (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2},\cdots, x_{\lambda_n}) \in E\}) = \mu_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}(E)$$

実直線Rを，例えば区間[0,1]でおきかえて[0,1]の無限直積を考える場合にもKolomogorovの定理は成立する。

一般に位相空間Aの無限直積空間の場合にも，付加条件として次のことを要請すればKolomogorovの定理は成立する。

1) $\mu_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}$ は，A^nのすべての開集合を可測にする．

2) $\forall E \in \mathcal{B}_n$ （＝A^nのすべての開集合を含む最小のσ-加法族），$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ （＝A^nのcompact set）；$K \subset E$ かつ

$$\mu_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}(E \cap K^c) < \varepsilon$$

A＝Rとしたとき（又は区間[0,1]などとしたとき）には，上記要請1)2)は任意のボレル測度に対してつねにみたされていることが証明できる。だから実直線（又は区間[0,1]など）の無限直積の場合には要請1)2)をexplicitに持ち出さなくてもKolomogorovの定理の成立が主張できるのである．

§4. 無限次元ガウス測度

無限直積空間の代りにその部分空間を考えるときは、無矛盾な有限次元測度の family は必らずしも σ−加法的測度に拡張できない。実例として、最も典型的な無限次元測度とみなされているガウス測度でさえ、ヒルベルト空間の上には決して構成出来ないことを証明してみよう。

簡単のためヒルベルト空間としては、二乗可積和な数列空間(l^2)を例にとる。

$$(l^2) = \{ x=(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in R \text{ for } \forall i \text{ かつ } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$$

一般のヒルベルト空間も適当な規格直交系を考えることにより(l^2)に同型に写されるので、(l^2)だけ例にとっても一般性を失うものではない。

R^n上の測度μ_nとしては分散1のn次元ガウス測度:

(3) $$d\mu_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

を考える。容易にわかるように$\{\mu_n\}$は無矛盾な family である。それ故 Kolomogorov の定理により、R^∞上に一つのσ−加法的測度μが構成できる。これを無限次元ガウス測度という。(l^2)はR^∞の部分空間であるが、μが(l^2)上の測度とみなされるためには$\mu((l^2)) = 1$でなくてはならない。

ところが現実には$\mu((l^2)) = 0$である。以下これを確かめてみよう。有界数列の全体を$\mathfrak{M}$とすると明らかに$(l^2) \subset \mathfrak{M}$

だから$\mu(\mathfrak{M})=0$が言えればよい。そのためには

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{M}_k \quad \text{where } \mathfrak{M}_k=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid |x_i|\leqq k \text{ for } {}^\forall i\}$$

$$\mathfrak{M}_k=\bigcap_{j=1}^{\infty}\mathfrak{M}_{j,k} \quad \text{where } \mathfrak{M}_{j,k}=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid |x_i|\leqq k \text{ for } i\leqq j\}$$

であるから，μのσ-加法性を考慮すると

「$\forall k$; $\mu(\mathfrak{M}_k)=0$」が成り立つことを，従って

「$\forall k$; $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(\mathfrak{M}_{j,k})=0$」となることを示せばよい．

然るに

$$\mu(\mathfrak{M}_{j,k})=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k}e^{-t^2/2}dt\right]^j \qquad \text{と書かれ}$$

[ ]の中は1より小さくてjにdependしないので$\lim\limits_{j\to\infty}\mu(\mathfrak{M}_{j,k})=0$はただちにわかる．

このような理由で無限次元ガウス測度はヒルベルト空間の上には定義できない。(3)式右辺に現われるweight function $\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]$は$n\to\infty$として収束するにもかかわらず，測度は作れないのである．

ヒルベルト空間は最も代表的な無限次元ベクトル空間であるから，測度がヒルベルト空間上に構成出来るための条件を特に調べてみよう．それは有限次元の場合のBochnerの定理の無限次元への一般化の形で書かれ，空間の次元が有限次元のときと無限次元のときとで差異が浮彫りにされて来る．

§5．測度と特性函数との対応．

R^n上に有界ボレル測度μが与えられたときその特性函数を

$$(4) \qquad \chi(\xi) = \int_{R^n} \exp[i\langle\xi, x\rangle] d\mu(x)$$

によって定義する。ただし$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$, $\langle\xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$．このとき$\chi(\xi)$は次の性質をみたすことが容易にわかる．

1) $\chi(\xi)$は positive definite．すなわち任意有限個の複素数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$及び$R^n$の元$\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^m$に対し

$$\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \bar{\alpha}_j \chi(\xi^i - \xi^j) \geqq 0$$

2) $\chi(\xi)$はξに関して連続．

逆にR^n上に positive definite かつ連続な函数$\chi(\xi)$を勝手に与えたとき，これを特性函数とするようなボレル測度μが一意に存在する．すなわち：

「定理 (Bochner)

R^n上のボレル測度μと，連続かつ positive definite な函数$\chi(\xi)$とは(4)の関係によって一対一に対応する．」

ところで(4)式において$\langle\xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots\cdots$．とみなせば，ヒルベルト空間上の測度に対してもその特性函数は定義できて positive definite かつ連続となる．然しヒルベルト空間の場合，逆は必ずしも成り立たない．例えば無限次元ガウ

ス測度を一応R^∞上に作っておいたと考えてその特性函数を計算してみると

$$\chi(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2\right] \quad \text{となる．}$$

$\chi(\xi)$はヒルベルト空間のノルムで連続であるにもかかわらず，対応する測度（無限次元ガウス測度）はヒルベルト空間上に定義できない．

一方，有限次元ベクトル空間の場合には，位相の入れ方は唯一通りしかない（普通のユークリッド空間の位相だけ）が，無限次元空間の場合には，代数的に同じベクトル空間にも異なった位相の入れ方ができる．このことから無限次元空間の場合，(4)式右辺に現われている内積によって定義される位相と，$\chi(\xi)$の連続性を定義する位相とは異なったものであると考えることにより，Bochner の定理（の一般化）が成り立つようになるのではないかと考えたくなる．

実際この考えに沿って，測度がヒルベルト空間上に乗っているための必要十分条件が出せる。Hをヒルベルト空間，Tをその上の連続な linear operator で次の条件をみたすものとする．

1) Tは正値：すなわち $\forall \xi \in H$ ，$\xi \neq 0 \Rightarrow \langle \xi, T\xi \rangle > 0$

2) Tは trace class ：すなわちHの完全規格直交系$\{e_i\}$に対し $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, Te_i \rangle < \infty$

このとき $\|\xi\|_T = \sqrt{\langle \xi, T\xi \rangle}$ として，ノルム $\|\cdot\|_T$ によって新らしい位相を定義すると，明らかにこれはもとのヒルベルト空間の位相より弱い．

定理（Sazonov）

ヒルベルト空間H上に positive definite な函数 $\chi(\xi)$ を考える。$\chi(\xi)$ がH上の有界ボレル測度の特性函数となるための必要十分条件は，前記1) 2)をみたす適当なTが存在して，$\chi(\xi)$ がノルム $\|\cdot\|_T$ に関して連続になることである．」

例えば R^∞ において，座標ごとに分散の異なるようなガウス測度を考えよう．

$$\chi(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \xi_i^2\right] \text{ が与えられたとき}$$

$T : (\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots) \longrightarrow (c_1^2\xi_1, c_2^2\xi_2, \cdots\cdots)$ とすると，$\chi(\xi)$ は $\|\cdot\|_T$ に関し連続である．このときTが条件2)をみたすとのことは $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ と同値である．

それ故 $\chi(\xi)$ に対応する測度：

$$d\mu = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2} c_1 c_2 \cdots c_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{c_n^2}\right)\right\} dx_1 \cdots dx_n\right]$$

は，$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ なるとき（又そのときに限って）(l^2) 上に構成できる．特に $c_i = 1$ for $\forall i$ とすると，$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \infty$ であるから，普通の無限次元ガウス測度が (l^2) 上に構成できないのは，Sazonov の定理からもわかる．

（分散一定の）普通の無限次元ガウス測度は，ヒルベルト空間上には定義なくても，もう少し拡大した空間を考えたらそこでは定義できるのではなかろうか。簡単のため (ℓ^2) で説明すると，§3で見たように無限次元ガウス測度は $R^\infty(\supset(\ell^2))$ では定義できた。では R^∞ の代りにどの程度まで空間をせばめても無限次元ガウス測度はその上に乗っているか？この問題を次§で考えよう。

§6．核型拡大．

Sazonov の定理と立場を少し変えて，今度は $\chi(\xi)$ の連続性の方をもともとのヒルベルト空間の位相で考え，測度 μ の定義空間の方を別の位相によって与える。

定理（Minlos）

H をヒルベルト空間，T を H の上で定義された linear operator で正値かつ trace class のものとする。

H 上で定義された函数 $\chi(\xi)$ が positive definite，かつこのヒルベルト空間のノルムに関して連続であれば，対応する σ-加法的測度 μ は $\overline{H}_T$（＝ノルム $\|\cdot\|_T$ による H の完備化拡大）の上に作れる。」

（T が正値かつ trace class のとき $\overline{H}_T$ を H の核型拡大という。又 H は $\overline{H}_T$ の中に核型に imbed されているという）。

この定理を $H=(l^2)$, $\chi(\xi)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2\right]$ の場合に適用する。$T:(\xi_1,\xi_2,\cdots,\cdots)\longrightarrow(c_1^2\xi_1,c_2^2\xi_2,\cdots\cdots)$ とすると $\|\xi\|_T=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\xi_i^2}$. 又 T が trace class であるための条件は $\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty$ である。

明らかに $\overline{H}_T=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\in R^\infty \mid \|x\|_T\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2x_i^2}<\infty\}$ である。この空間は数列 (c_i) に depend してきまるから $\overline{H}_{(c_i)}$ とあらわす。Minlos の定理より任意の二乗可総和数列 (c_i) に対し、無限次元ガウス測度は $\overline{H}_{(c_i)}$ の上に定義できることがわかる。

一般に $\chi(\xi)$ が (l^2) で連続なら、対応する測度 μ は $\overline{H}_{(c_i)}$ 上に作れるわけである（すなわち $\mu(\overline{H}_{(c_i)})=1$）が、$\mu$ は σ-加法的であることを注意すると次のことが言える。

「$(c_i)_k$ を可算個の二乗可総和数列（すなわち実数 c_{ik} $(i,k=1,2,\cdots)$ が与えられていて $\sum_{i=1}^{\infty}c_{ik}^2<\infty$ for $\forall k$）とすると、

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{H}_{(c_i)_k}\right)=1.」$$

もっと一般に T_k $(k=1,2,\cdots)$ を (l^2) 上の正値かつ trace class な linear operator とすると $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{H}_{T_k}\right)=1$ となる。

然し μ は一般に非可算個の $\overline{H}_T$ の共通部分の上には集っていない。特に正値かつ trace class な linear operator の全体について $\bigcap_{T:\text{全体}}\overline{H}_T$ を作ると、それはもとの H に一致してしまうことが証明できる。（例えば (l^2) で考えると、R^∞ の任意の元

xに対し，$x \notin (\ell^2) \Longrightarrow {}^{\exists}T$：正値かつ trace class；$x \notin \overline{(\ell^2)}_T$ ）。だから例えば無限次元ガウス測度の場合 $\mu(\bigcap_{T:\text{全体}} \overline{H}_T) = 0$ である。それ故 R^∞の部分空間で測度1となるような最小のものは存在しない。

応用上から言えば，ヒルベルト空間として(ℓ^2)でなく，二乗可積分函数の全体L^2を考える場合が多い。

例えば　$L^2((0,1)) = \{ f(t) \mid \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \}$

このとき直交展開を考えることによりL^2を(ℓ^2)に同型に写すことも可能であるが，むしろ実用上は函数空間（又は超函数の空間）の方が大切であるから，L^2の核型拡大も適当なTを与えることにより直接行なった方がよい。このように考えて，L^2上で連続な$\chi(f)$に対応する測度が，適当な函数空間又は超函数の空間の上に構成できる。

準備として超函数について簡単に説明する．（位相的性質は説明が厄介なので省略）。例えば区間$(0,1)$において函数$f(t)$が与えられたとき，これに付随して次のような線型汎函数が考えられる。

$$\varphi(t) \longrightarrow \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt \quad (\equiv \langle f, \varphi \rangle \text{と書く}).$$

ただし$\varphi(t)$は無限回可微分で$\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n)}(0) = \cdots = 0$，$\varphi(1) = \varphi'(1) = \cdots = \varphi^{(n)}(1) = \cdots = 0$ をみたすものとする。

$f(t)$は一般に微分可能とは限らないが，もし微分可能のときは部分積分により $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$ が成り立つ。fが微分可能でなくても $-\langle f, \varphi' \rangle$ はφに関する線型汎函数であるから $\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle$ をf'の定義とみなすと，f'は函数ではなくてもφに関する線型汎函数としては意味をもつ。同様にして $f'', f''', \cdots, f^{(n)}, \cdots$ が定義できるので，この意味で微分を考えると（普通の意味で微分できない函数でも）何回でも微分できる。こゝに現われる f', f'' 等を超函数という。（勿論普通の函数も含む。） 普通の函数でない超函数の例としては Dirac のδ函数やその微分などがある。

これで準備を終り，L^2の核型拡大に関する一つの結果をあげておく。$L^2((0,1))$ の部分空間として

$$L_\beta = \left\{ f(t) \in L^2((0,1)) \;\middle|\; \lim_{h \to 0} \int_h^{1-h} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h^\beta} \right|^2 dt = 0 \right\}$$

を考える。このとき「$\beta > \frac{1}{2}$ ならば次に記す $D(L_\beta)$ は $L^2((0,1))$ の核型拡大になる。従って $L^2((0,1))$ で連続な $\chi(f)$ に対応する測度はつねに $D(L_\beta)$ の上に構成できる。

$$D(L_\beta) = \{ f' \mid f \in L_\beta \}$$

ただしf'は超函数の意味によるfの微分を意味する。」

更に無限次元ガウス測度（$L^2((0,1))$ の場合には

$$\chi(f) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right] \text{ に対応する測度）}$$

のように具体的に与えられている場合には，Minlos の定理によらずにこの場合にのみ適用する特殊な議論を行なってもっと精密な結果を出すこともできる．例えば

$$C_\beta = \left\{ f(t) \;\middle|\; \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h^\beta} = 0 \quad \text{for } \forall t \right\}$$

として，$\beta > \frac{1}{2}$ でさえあれば無限次元ガウス測度は $D(C_\beta)$ の上に乗っている。（このことは「$x(f)$ が $L^2((0,1))$ で連続」との仮定だけからなら必らずしも成り立たない）。

以上述べて来たように，$\chi(\xi)$ がヒルベルト空間 H のノルムで連続なとき，対応する測度 μ は H の任意の核型拡大の上に構成でき，その核型拡大は場合場合に応じて適宜作って行けばよい。ところで或る核型拡大 $\overline{H}_T$ を含むような空間 L を考えても，$\mu(\overline{H}_T) = 1$ なのだから勿論 $\mu(L) = 1$ であり測度構成という目的には L でもかなう。

だからむしろ標準的な L を一つ定めておいた方が，実用上は繁雑さが省けるかも知れない。このような標準的な L として（l^2）の場合（S'），L^2 の場合（$\mathcal{S}'$）を考えておけば（（S'）や（$\mathcal{S}'$）が §7 で述べる性質をもっていることから考えても）実用上の多くの問題に対して十分ではないかと思われる．

ただし　$(S') = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots) \in R^\infty \;\middle|\; \exists n : \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{k^n} = 0 \right\}$

又 $L^2((-\infty,\infty))$ の場合

$$(\mathcal{S}') = \Big(\Big\{ f(t) \;\Big|\; \forall a, b \neq \pm\infty : \int_a^b |f(t)|\,dt < \infty \quad \text{かつ } \exists n : \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0 \Big\}$$

および このような $f(t)$ の超函数の意味での任意有限回微分の全体 $\Big)$

Dirac の δ などは $(\mathcal{S}')$ に属す。$Y(t) = 1$ for $t>0$, $=0$ for $t<0$ とすると $Y(t)$ は普通の函数であって $Y' = \delta$ となるから。その他実用上普通に出て来る函数や超函数は大抵 $(\mathcal{S}')$ に入る。ただし無限遠点で指数函数の order で発散するような函数は $(\mathcal{S}')$ に属さぬから注意を要する。

§7. 核型空間に対する Bochner の定理

無限次元位相ベクトル空間 X があるとき、X 上で連続な linear fun. の全体を X^* と表わし X の共役空間という。例えばヒルベルト空間 H の場合, $x \in H$ に付随して linear fun: $\xi \longrightarrow \langle \xi, x \rangle$ が考えられるが、実は H 上の連続な linear fun. はこの形のものに限られることが証明できて $H^* \simeq H$ となる。

共役空間の概念を用いると無限次元空間に対しても Bochner の定理の一般的な定式化ができる。

ξ を X の元, x を X^* の元と考えて

$$(5) \qquad \chi(\xi) = \int_{L^*} \exp[i\langle \xi, x\rangle]\, d\mu(x)$$

において $\langle \xi, x\rangle$ は linear fun. x の点 ξ における値を意味すると解釈すれば、Bochner の定理は一般に X 上の連続な positive definite fun. と、X^* 上の σ-加法的測度との一対一の対応を主張する命題となる。

この意味で Bochner の定理の定式化はできても、それは無限次元の場合必らずしも成り立たない。例えばヒルベルト空間 H の場合には $X=H$, $X^*=H$ とみなして、χ と μ との対応は破れていた。μ を H の上に作ろうと思えば χ の連続性を規定する位相を変えねばならなかった（Sazonov の定理）し、又 χ の連続性をヒルベルト空間のノルムで考えれば μ の定義空間を拡大しなければならなかった。（Minlos の定理）。

このようにヒルベルト空間は Bochner の定理を成立させないが，然し無限次元空間でも Bochner の定理を成立させるものもある。

定理（Bochner–Minlos）

無限次元位相ベクトル空間 X が、可算個のノルム（又は semi-norm）で定義された核型空間であれば、上記(5)式の対応によって、X 上で定義された連続な positive definite fun. $\chi(\xi)$ と、X^* 上の σ-加法的測度 μ とは一対一に対応する。」

すなわちこの場合には μ を構成するために，更に X^* を拡大

する必要はないのである。この定理で，Xの位相についての条件（アンダラインの部分）を詳しく意味を説明する余裕はないが，実例をあげるならば，次にあげる空間はアンダラインの部分の性質をみたしている。

数列空間　$(S)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in R^{\infty}\mid \forall n:\ \lim_{k\to\infty} k^n\xi_k=0\}$

その位相は可算個のノルム $\|\xi\|_n=\mathrm{Max}_k|k^n\xi_k|$ で与える。

函数空間　$(\mathcal{S})=\{f(t)\ \mathrm{on}\ (-\infty,\infty)\mid$ 無限回可微分かつ

$\forall n,k\quad \lim_{|t|\to\infty} t^n f^{(k)}(t)=0\}$．

その位相は可算個のノルム $\|f\|_{n,k}=\mathrm{Max}_t|t^n f^{(k)}(t)|$ で入れる。

(S)の共役空間が(S')，$(\mathcal{S})$の共役空間が$(\mathcal{S}')$である。（§6末参照）．従って(S')上のσ-加法的測度は(S)上の連続な positive definite fun. と，又$(\mathcal{S}')$上のσ-加法的測度は$(\mathcal{S})$上の連続な positive definite fun と一対一に対応している。このように(S')や$(\mathcal{S}')$は，測度構成のためにこれを更に拡大する必要がないという意味で，§6末に述べたように標準的な空間として採用するのに適していると思われる。

流体力学において函数空間上の測度が必要になるのは，速度ベクトル，密度，圧力など，いわゆる"場の量"に depend する汎函数を考えるからであろう。実際に汎函数積分を考えるためなどの必要上，函数空間又は超函数の空間上に測度が必要になったとき，その測度をどこの上で考えたらよいか？ それは問題によりけりで一概には言えないだろう。勿論，測度構成のためだけが目的なら，十分大きい函数空間を考えておけばよいので，例えば三次元ユークリッド空間上に定義された実函数の全体$(=R^{R^3})$を

考えておけば，Kolmogorov の定理によって確かに測度は構成できる．

然し他の要請，例えば汎函数の定義域が限られていることなどのため，或いは物理的要請から何らかの制限条件がつくため，考慮の対象とする函数空間は，もっとせばめる必要が起るだろう．そこで測度の構成もでき，かつこれらの他の要請にも適するような都合のよい函数空間（又は超函数の空間）を持って来るのが，汎函数積分による formulation を行なうためには重要である．

筆者の考えでは（流体力学でどのようなことが問題になっているのか知らないのに僭越ではあるが），前述の $(\mathcal{S}')$ を基礎に選んで理論を立てるのが望ましいのではないかと思う。その理由は，$(\mathcal{S}')$ においては Bochner の定理が成立するので測度の構成も円滑に行っており，他方 $(\mathcal{S}')$ の元に対しては多項式との掛算とか微分積分とかの，普通に出て来る函数演算が $(\mathcal{S}')$ の中で自由にできるからである．

文献

測度全般については，積分論又は測度論の本が日本語で沢山出ている．無限次元測度についてまとめたものは，成書としては

Gelfand-Vilenkin ; "超函数" のシリーズの中，第IV巻
（ロシヤ語） (1961)

がある．又次のものも参照するとよい．

Y. Umemura ; "Measures on infinite dimensional vector spaces." Publ. of Research Inst. for Math. Sci., Kyoto Univ., Vol.1 No.1 (1965)