数理解析研究所講究録
第24巻 1967年 1-12

Navier-Stokes 方程式の定常解について

京大 理 数学教室 池部晃生

この報告は，1964年4月New Yorkで開かれたApplications of Non-linear Partial Differential Equations in Mathematical Physicsに関するsymposiumにおけるR. Finnの報告の，恐らくは多分に誤解を含んだ，抄訳に過ぎない．したがって，Navier-Stokes方程式の数学的取扱いに興味を持たれる方は，この方面の専門家でない筆者の報告などよりは，流体物理学者にとっても極めてreadableであるし，また殆んどいたる所でavailableであると思われる，Finnの原論文[1]を読んでいただきたい．また非定常の問題も含めて数学的なNavier-Stokes 方程式の理論を扱ったものとしてはLadyzhenskaiaの本[2]がある．

さて問題にする定常解が満たすべき方程式は

$$\nu\Delta\vec{w} - \vec{w}\cdot\nabla\vec{w} - \nabla p = -\vec{f}(\vec{x}), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{w} = 0 \tag{2}$$

である．ここに $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ は位置ベクトル，$\vec{w}=\vec{w}(\vec{x})$ は $\vec{x}$ における流体粒子の速度，$p=p(\vec{x})$ は圧力，$\vec{f}$ は外力，ν は粘性係数と密度の比，方程式 (1) は力の平衡関係を示すもので，(2) は連続の方程式である．以下 $\nu=1$ として議論する．

§1. 内部問題

Σ を十分滑らかな有界閉曲面とし その内部を $\mathcal{D}$ で表わす. 問題は

(3) $\vec{u}|_\Sigma = \vec{u}^*$ (境界上で与えられた値 $\vec{u}^*$ をとる)

を満たす(1),(2)の解を求めよというのである. p については境界条件を与えない. これは(附加定数を除いて) $\vec{u}(\vec{x})$ によって定まるべきものである. また $\vec{u}^*$ は勝手に与えることはできない. (2)が要求するように

(4) $$\int_\Sigma \vec{u}^*\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$$ ($\vec{n}$ は Σ 上での法線ベクトル)

を満たさなければならない.

1.1. 線形理論. 内部境界問題の最初の研究は Licktenstein[3] および Odqvist [4] に負う. Odqvistは(1)において非線形項のない同次方程式

(5) $$\Delta\vec{u} - \nabla p = 0$$

と連続の方程式

(6) $$\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

とからなる系に対して, 調和函数に対するpotential論に類似な "hydrodynamical potential theory" を展開した. potential論におけるGreen函数に当るものが, ここでは(未知函数が単独ではないので) Green "tensor" $\mathfrak{G}(\vec{x}, \vec{\xi})$ である. また圧力 p に対するものとして同様な性格の "pressure vector" $\vec{P}(\vec{x},\vec{y})$ も得られる.

1.2. 非線形問題. $\vec{u}_0(\vec{x})$ を線形問題

$$(7) \qquad \Delta\vec{u}-\nabla p=-\vec{f}(\vec{x}), \quad \nabla\cdot\vec{u}=0, \quad \vec{u}|_\Sigma=\vec{u}^*$$

の解とする. いま

$$(8) \qquad \vec{u}(x)=\vec{u}_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\vec{u}_j(\vec{x})\lambda^j$$

とおいて, $\vec{u}(x)$ に対する積分方程式

$$(9) \qquad \vec{u}(\vec{x})=\vec{u}_0(\vec{x})+\lambda\int \mathbb{G}\cdot\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\,dy$$

に代入すれば, $\{\vec{u}_j(\vec{x})\}$ に関する漸化式が得られる. Odqvist [4] による $\mathbb{G}$ に対する評価式を用いれば, λ を十分小として (8) が収束し, かつ Σ 上では $\vec{w}^*$ をとることがわかる. 積分方程式 (9) は

$$(10) \qquad \Delta\vec{u}-\nabla p=-\vec{f}(\vec{x})+\lambda\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}, \quad \nabla\cdot\vec{u}=0, \quad \vec{u}|_\Sigma=\vec{w}^*$$

と同値であつて, $\vec{w}=\lambda\vec{u}$ は (1), (2), (3) の解を与える.

1.3. Leray の結果. Leray [5] の結果は "$\vec{w}^*$ が (4) を満足するならば, 問題 (1), (2), (3) は少なくとも一つの解をもつ" というのである. これは後に Leray および Schauder によって定式化された不動点定理 [6] の先駆をなすものであつた. その証明はここでは詳しく述べないが, (1), (2) を

満足する $\vec{w}$ の Dirichlet 積分

(11) $$\int_{\mathcal{G}} |\nabla \vec{w}|^2 dx = \|\vec{w}\|^2$$

に関する，ある a priori な評価に基づいている．Leray[5] において提出された方法は，後に E. Hopf によって更に明確化され，発展させられた[7]．この結果は2次元の Navier-Stokes 方程式に対しても成立つが，4次元以上の場合には重大な困難があるようである．

1.4. <u>Ladyzhenskaia の寄与</u> [8, 2]．Ladyzhenskaia は Leray の存在定理の一つの variant を得たが，その方法は函数解析に基づいていた．

彼女は Navier-Stokes 方程式の generalized solution というものを導入したが，この考え方はその後の研究においても屡々現われる．問題(1),(2),(3)の generalized solution $\vec{w}(\vec{x})$ とは，境界値 $\vec{w}^*$ をとる $\mathcal{G}$ で滑らかな勝手な solenoidal (divergence-free) な函数 $\vec{a}(\vec{x})$ に対して，$\vec{u}=\vec{w}-\vec{a}$ が函数空間 $\mathcal{H}$ に属し（$\mathcal{H}$ は $\mathcal{G}$ で無限回微分可能で，solenoidal かつ境界（無限遠方も境界と考える）の近傍で恒等的に0となるような函数の全体を Dirichlet norm (11) で完備化したものである．あらくいえば Dirichlet norm (11) が有限な solenoidal な函数の全体といってもよかろう．$\mathcal{H}$ は Hilbert 空間になる），かつ

(12) $$\int_{\mathcal{G}} \{\nabla(\vec{u}+\vec{a})\cdot - (\vec{u}+\vec{a})\cdot(\vec{u}+\vec{a})\cdot\}\nabla\vec{\Phi}\,dx = -\int_{\mathcal{G}} \vec{f}\cdot\vec{\Phi}\,dx$$

がすべての $\vec{\Phi}\in\mathcal{H}$ に対して満足されていることである．さて $\vec{u}$ が generalized solution であるとすれば，これが$\mathcal{H}$におけるある非線形方程式の解でなければならないことが結論される．この非線形方程式の解の存在をいうのには，先に触れたLeray-Schauder不動点定理による．Lerayがその存在を示した解はclassical solutionであるから，その点ではLadyzhenskaiaのgen. soln.よりよいわけであるが，彼の場合にはGreen Tensorに関する色々面倒な評価が必要 ―― いわば古典的 ―― であったのが，彼女の取扱いは函数解析の手法を用いることによつて，全体の見通しをよりよくしている．更にgen. soln.を問題とすることによつて，例えばangular pointをもつたような領域に対しても，方法が適用される．gen. soln.が古典的な解になるかという問題については，領域内部でのregularityを示すことはさほど困難ではないが，境界までこめたregularityについては，Green tensorに関するOdqvistによる評価を用いる以外の方法では，まだ示されていないようである．

1.5. Shinbrotの寄与．前述のLadyzhenskaiaの方法は次元が4以上になるとうまく行かない．Shinbrot [9]はある修正を行つて，Ladyzhenskaiaの方法を4次元でも成立するように拡張した．

1.6. Fujitaの寄与 [10]．Fujitaはそのgen. solnの定義に於いて，Ladyzhenskaiaが(12)がすべての$\vec{\Phi}\in\mathcal{H}$に対して成立つことを要求したのに対して，(12)が滑らかな境界の近傍で0となるsolenoidalな$\vec{\Phi}$に対してだけ要求した．$n\leq 4$（nは空間の次元）では両者は一致するが，$n>4$では

$\vec{\Phi} \in \mathcal{H}$ としたのでは(12)の非線形項の線積分の存在さえわからない。

Fujita は Galerkin の方法によって解の近似列を構成することにより，問題を有限次元の問題に帰着し，そこで有限次元空間における Brouwer の不動点定理を使うことによって，先ず近似解の存在を示し，次いで極限操作によって求める解の存在を示した。不動点定理は近似解の段階だけで使う。また彼の方法は僅かの修正によって $n>4$ の場合にも適用でき，外部問題に対しても，自然な解の構成法を与える。

1.7. gen. soln. の regularity. 内部 regularity については，前にも触れたように，$\vec{f}$ に対する適当な仮定の下に肯定的に解決されている ($n=2,3$)。例えば Fujita [10] を参照されたい。境界までこめた regularity については，Σ も $\vec{w}^*$ も滑らかならば，解は境界までこめて滑らかであることが知られている。証明は Green Tensor の評価を用いる以外には知られていない。$n>3$ の場合には gen. soln の regularity については何も知られていない。

1.8. 一意性. 粘性係数 ν を復活させる。ν が十分大きければ，解は一意的である（例えば Finn [11]）。ν が減少すれば，一意性が破れるであろうという予想が長く行なわれてきた。最近 Velte は実際に multiple solutions の存在を示した（今井教授による。文献は多分 1966年の Archive for Rational Mechanics and Analysis）。Velte はこれ以前にも Navier-Stokes と関連の深い問題に対して解の bifurcation を示した [12]。

§2. 外部問題.

外部問題，すなわち有界閉曲面Σの外に横たわる領域$\mathcal{E}$におけるNavier-Stokesの解を求める問題では，新たな困難が現われる．この場合には無限遠における境界条件を設定しなければならない．物理的考察による自然なものとしては，$\vec{w} \to \vec{w}_0 \equiv const$ が考えられる．Σ上では条件(4)の下で$\vec{w} = \vec{w}^*$を要求する．

内部問題と事変り，$n=2$と$n=3$の問題では著しい違いが現われる．$n=2$の場合の方が困難である．以下では$n=3$の場合に話を限る．

2.1. Dirichlet積分有限な解. $\vec{f}(x) \in L_2(\mathcal{E})$としよう．$\vec{w}(x)$が(1),(2)の解で

$$\int_{\mathcal{E}} |\nabla \vec{w}|^2 dx < \infty \tag{13}$$

を満すならば，$\vec{x} \to \infty$のとき$\vec{w}(\vec{x}) \to \vec{w}_0$となるようなvector $\vec{w}_0$が存在する（Finn [11, 13]）．

2.2. 無限遠において連続な解. $\vec{w}(x)$を$\vec{f} \in L_\beta(\mathcal{E})$ $(\beta > 2)$に対する(1)(2)の解で，$\vec{x} \to \infty$のとき$\vec{w}(\vec{x}) \to \vec{w}_0$であるとしよう．このとき$\nabla \vec{w} \to 0$である．ここで(13)は仮定されていない．この結果はFinn [14]による．

2.3. Class P.R.の解. $\mathcal{E}$における解$\vec{w}(\vec{x})$がclass P.R.（Physically Reasonable）に属するとは，ある$\varepsilon > 0$とあるvector $\vec{w}_0$が存在して，

$|\vec{w}(\vec{x})-\vec{w}_0|<\mathrm{Const.}\, r^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ $(r\to\infty)$ が成立つことである. $\vec{f}$をポテンシャル力とし, $\vec{w}$をP.R. 解としよう. すると $\vec{w}_0$ の方向に軸をもつた paraboloidal wake regionがあつて, その内部では $|\vec{w}-\vec{w}_0|=O(r^{-1})$ となることが知られている (Finn [14, 15]).

2.4. 運動エネルギーが∞の場合. (1), (2) に対応する同次方程式を考えよう ($\vec{f}=0$). $\vec{w}(\vec{x})$ はΣ上で0となるこの同次方程式の解で ($\mathcal{E}$における), 無限遠方で有界であるとする. このとき, いかなる一様流$\vec{w}_0$ (= const.) に対しても, これからの disturbance の運動エネルギーは無限大になる. すなわち

$$(14) \qquad T\equiv\frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}}|\vec{w}-\vec{w}_0|^2dx=\infty.$$

これは Finn [30]の結果である (が trivialな場合を除いての話であろう). このことから云える帰結としては, $\vec{w}(\vec{x})$が同次方程式を全空間でみたしかつ有界であれば, ある constant vector $\vec{w}_0$に対して $\int|\vec{w}-\vec{w}_0|^2dx<\infty$ なる場合には, $\vec{w}$は恒等的に$\vec{w}_0$に等しい, ことがあげられる.

2.5. class D における解の存在. 今までの外部問題に関する議論では, 解の存在はすべて仮定されてきた. ここでは, 條件 (13) を満たすような解 —— これを class D (= Dirichlet) の解という —— の存在について述べる. 境界値$\vec{w}^*$が (4) を満足し, $|\vec{x}|\,|\vec{f}(x)|\in L_2(\mathcal{E})$であるとする. このとき, 勝手な (遠方における) 一様流$\vec{w}_0$に対して, $\mathcal{E}$における Navier-Stokes方程式の解

$\vec{w}(\vec{x})$で次の条件を満たすものが存在する（一意性は主張しない）：(i) Σ上で$\vec{w}(\vec{x})=\vec{w}^*(\vec{x})$，(ii) $\vec{w}(\vec{x})$はclass Dに属する，(iii) $\vec{w}(x)\to\vec{w}_0$，$\vec{x}\to\infty$．この結果については，Leray [5]，Ladyzhenskaia [2, 8]，Finn [11]，Fujita [20]などを参照されたい．

class Dの解が前に述べたclass P.R.の解であるか，ということは興味ある問題であるが，無限遠における解の連続性とその偏導函数が0に近づく，ということ以上には，class Dの解の漸近的振舞については，何もわかっていない．ところが，$\vec{w}(\vec{x})$がDirichlet積分有限な（(13)をみたす）勝手なvector函数で，無限遠において$\vec{w}(\vec{x})\to\vec{w}_0$ (= const) ならば，原点より出る殆んどすべての射線（ray）上で，$|\vec{w}(\vec{x})-\vec{w}_0|<Cr^{-\frac{1}{2}}$である．ここで$\vec{w}(\vec{x})$は必ずしもNavier-Stokes方程式の解でなくてもよいことに注意されたい．この結果はFinn [11]による．

Class Dの解の一意性については何も知られていない．境界値その他のdataが十分小さければ，すべての解が一様に互いに近いという結果はあるが（Finn [11]）．

2.6. <u>class PR における解の存在</u>．これについてもすっきりした結果は得られていないようである．境界値$\vec{w}^*(\vec{x})$とconstant vector $\vec{w}_0$の差$\vec{w}^*-\vec{w}_0$を考える．これがΣ上で，3階の接線方向の導函数まで含めて，小さいならば，$\mathcal{E}$におけるPR解$\vec{w}(\vec{x})$で次の条件をみたすものが存在する：$\vec{w}(\vec{x})=\vec{w}^*(\vec{x})$ on Σ，無限遠で$\vec{w}(\vec{x})\to\vec{w}_0$（Finn [15, 17]）．

これと関連して，一意性についていえることは，次のFinn [17]の結果

である．$\vec{w}^*-\vec{w}_c$ が Σ 上で十分小さければ，解は，同じ data（Σ 上では $\vec{w}^*$，無限遠では $\vec{w}_0$）をとる PR 解の中で unique である．ただし PR からはみ出したときには何もわからない．

この後，Finn [1] の論文の内容は，*Flows at low Reynolds' number; Flows at high Reynolds' number; Stationary solutions as limits of nonstationary solutions; Other results; Outlook* と続くのであるが，不案内な道を手探りでこれ以上進むのは危険が増すばかりなので，この辺で話は終りということにさせていただきたい．ただ Finn 自身がいっている次の言葉だけ記しておく．

It is apparent that less is known than is not.

更に彼はいう．

I hope the reader may find on perusing this report still other points of departure for new and fruitful investigations.

ここの "*I*" は勿論 Finn のことである．Finn の report はいざ知らず，"この" 報告は peruse するにはあまりに雑かつ不完全であることを最後にお詫びしなければならない．

文献

[1] R. Finn: Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Proc. Symp. Appl. Math., Vol. 17 (1965), pp. 121-153.

[2] O. A. Ladyzhenskaia: The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.

[3] L. Lichtenstein: Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik, Math. Z., 32 (1930), pp. 608-640.

[4] F. K. Odqvist: Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik, zäher Flüssigkeiten, Norstedt and Söner, Stockholm, 1928; Math. Z., 32 (1930), pp. 329-375.

[5] J. Leray: Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique, J. Math. Pures Appl., 9 (1933), 1-82; Les problèmes non linéaires, Enseignement Math., 35 (1936), 139-151.

[6] J. Leray et J. Schauder: Topologie et équations fonctionelles, Ann. Sci. École Norm. Sup., 51 (1934), 45-78.

[7] E. Hopf: Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik, Math. Ann., 117 (1940-41), 764-775.

[8] O. A. Ladyzhenskaia: Investigation of the Navier-Stokes equations in the case of stationary motion of an incompressible fluid, Uspehi Mat. Nauk, 3 (1959), 75-97.

[9] M. Shinbrot: A fixed point theorem and some applications,

Arch. Rat. Mech. Anal., 17 (1964), 255–271.

[10] H. Fujita: On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, 9 (1961), 59–102.

[11] R. Finn: On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations. III, Acta Math., 105 (1961), 197–244.

[12] W. Velte: Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, Arch. Rat. Mech. Anal., 16 (1964), 97–125.

[13] R. Finn: On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 3 (1959), 381–396.

[14] R. Finn: Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum., 3(51) (1959), 387–418; Proc. Symp. Pure Math., Vol. 4, pp. 143–148, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961.

[15] R. Finn: On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems, Arch. Rat. Mech. Anal. (to appear)

[16] R. Finn: An energy theorem for viscous fluid motions, Arch. Rat. Mech. Anal., 6 (1960), 371–381.

[17] R. Finn: On the Stokes paradox and related questions, Nonlinear problems, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.