

Nonlinear Dispersive System

京大 基研 矢島信男

§1 2, 3の例

此処では分散効果が利いている場合の非線型波動の伝播を考える。一般に波動伝播は双曲型偏微分方程式によって与えられる。例えば気体中の音波の方程式などがそれである。しかし気体分子間の衝突が頻繁に起っているような場合には粘性効果が波動の伝播に利いてくる。此の場合には方程式が高階微分が与えられる、双曲型ではなく抛物型となる。通常流体力学で与えられる方程式は大部分此のタイプのものである。しかし最近になって、衝突の平均自由行程が系の変化を表わす特徴的な長さにくらべて充分長い場合に相当する稀薄プラズマに於ける波動伝播が問題とされるにつれて異なったタイプの方程式がとりあげられた。此の場合には衝突は稀にしかおこらないので無視することができ、従って粘性のような散逸項は与えられない。散逸が存在しないことは方程式が時間反転に対して不変であることを、つまり可逆であることを意味している。散逸項がたゞなくなると方程式が高階微分を伴うことがある。これは物理的には波の分散効果として知られている。このときには非線型波動の伝播はどのようなか、が調べられる。さて分散効果が与えられる2, 3の場合を示す。

う。分散効果がどう利くかを見るためには、線型近似をしたときの波の分散式(振動数 ω と波数 k の関係式)を見るのが簡単である。

例1) イオン音波

プラズマにおけるイオン温度が電子温度に比べて小さい場合には、いわゆるイオン音波の存在が知られていて、その分散式は

$$(1) \quad \omega = \sqrt{T_e/m_i} k$$

と書ける。ここで T_e は電子温度、 m_i はイオンの質量である。因子 $\sqrt{T_e/m_i}$ は音速に相当する。波の ω と k が(1)の如く比例関係にあることは、基本方程式が双曲型であることに対応している。さて、(1)を導く際にはプラズマが電氣的に中性であることが仮定されているが、これは波の波長がデバイ半径 λ_D にくらべて充分長いときには正しい。しかし波の波長が短くなるにつれて、中性の近似は悪くなり、荷電分離の影響を考慮する必要がある。この効果をいれれば(1)は次のように書きかえられる。

$$(2) \quad \omega = \sqrt{T_e/m_i} k / (1 + k^2 \lambda_D^2)^{1/2}$$

ここで λ_D はデバイ半径。(2)は $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$ の極限で(1)に移行するが、一般には $k^2 \lambda_D^2$ の項のためには位相速度(ω/k)は小さくなる。したがって初期値として与えられた wave packet は時間の経過とともに広がっていき、(1)とは全く異なる伝播の様子を示す。

例2) 磁気音波

磁場の中をプラズマが運動する場合、低振動数領域に音波があらわれる。この場合、音速に相当するものは Alfvén 速度 v_A であり、

$$v_A^2 = B_0^2 / (4\pi n_0 m_i)$$

である。ここで B_0 は磁場の強さ, n_0 はプラズマのイオンの密度。もし、波が磁場に垂直に伝播するときには分散式は

$$(3) \quad \omega = v_A k / (1 + (c^2/\omega_{pe}^2)k^2)^{1/2}$$

となる。ここで c は光速, ω_{pe} は電子のプラズマ振動数である。因子 $(1/\omega_{pe}^2)$ は電子質量に比例している。したがって此の場合には分散式の ω と k の直線関係からのずれは電子の慣性効果によるものである。波が磁場に斜めに伝播するときには、分散式は電子の慣性効果を無視しても

$$(4) \quad \omega = v_A k (1 + (\theta^2 c^2/\omega_{pi}^2)k^2)^{1/2}$$

のようにより直線関係からずれてくる。ここで θ は磁場に垂直な方向と波の伝播方向とのなす角, ω_{pi} はイオンのプラズマ振動数である。ここで(3)と(4)をくらべてみることは意味がある。(3)は(2)と同様に分散効果によって波の位相速度が減少する傾向にあることを示すが、(4)は分散効果は全く正反対に位相速度をはやめている。このような事は磁気音波に訴える有限 Larmor 半径の効果を考えても生じる。この場合には分散式は幾分複雑にはなるが、電子の慣性効果を無視すると、

$$(5) \quad \omega = v_A k \left\{ 1 + 8\pi P_e/B_0^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{8\pi P_{i0}}{B_0^2} \right)^2 \frac{c^2}{\omega_{pi}^2} k^2 \right\}^{1/2}$$

となる。ここで P_e, P_i はそれぞれ電子及びイオンの圧力である。 (5) の k^2 の前の係数はイオンの平均の Larmor 半径の自乗に比例しているから、分散はまさにイオンの Larmor 半径が有限であることによる。 ω と k との関係は(4)と同じであり、分散効果は位相速度をはやめている。

以上の二つの例、イオン音波、磁気音波の線型近似から判るようには、

帯電中に生ずるおそれ、電子の慣性効果、波の伝播方向に平行な磁場の影響、
 である。Larmor半径が有限なことなどは物理的に分散効果として波動伝播
 に作用する。これを特徴づける長さはそれぞれ λ_D , c/ω_{pe} ,
 $\theta c/\omega_{pi}$, $\beta_i c/\omega_{pi}$ ($\beta_i = R_{i0}/(B_0/8\pi)$), である。波長が此等の
 長さより大きくなると著しく大きくなる場合には分散効果は無視される。

非線形波動について此の分散効果はどのように利くかは定性的に次の
 ように考えられる。もし分散項がなければ、分散式(2)~(5)はそれぞれ
 波動伝播を特徴づける特性曲線の勾配と関係がある。分散項の存在は
 それが k^2 に比例して増えるので、波形の曲率に応じて特性曲線の勾配が変化
 することを意味している。したがって非線形項の存在によって波形が steep
 になつてくれば、分散項のために曲率の大きくなる部分はその近傍にく
 らべて豊かた速さで進む結果、波長の短い波が波頭の部分から取りわけ
 られることになる。これは粘性のある場合の波の伝播の様子と全く豊かた
 である。以下、分散式(3)に相当する場合を詳しく考えることにする。

§2. 定常解

今後電子の慣性効果が存在する場合の磁気音波の問題をこころみる。基
 本方程式は、

$$(6) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{e/c}{m_i + m_e} v B$$

$$(8) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} v = \frac{m_i + m_e}{m_i m_e} e (E_y - \frac{u}{c} B)$$

$$(9) \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{4\pi e}{c} m v$$

$$(10) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

ここで、波は x 軸の方向に伝播し、磁場は z 軸の方向を向いておりとされた。
電氣的に中性であるとして、イオンと電子の密度は等しいとしてある。 n
はその密度、 u はその速度の x 成分、 v はイオンと電子の速度の y 成分の
差、 B は磁場の強さ、 E_y は電場の y 成分の強さ。方程式 (6) ~ (10) では変位電
流は無視されているが、此の近似と準中性近似とは Alfvén 速度が光速に
くらべて充分小さいときには正しい。

ここでは定常解を求めようので $\frac{\partial}{\partial t}$ の各項は 0 としよう。 $x \rightarrow -\infty$ で

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = U_0, \quad v = 0 \\ n = n_0, \quad B = B_0. \end{array} \right.$$

といる一定値になるような解を求めようとする。今方程式 (6) ~ (10) を無
次元化しておく。

$$\begin{aligned} n/n_0 &\rightarrow n, & u/U_0 &\rightarrow u, \\ B/B_0 &\rightarrow B, & E_y/(U_0 B_0/c) &\rightarrow E_y \\ x/(U_0 m_0 c/e B_0) &\rightarrow x, \end{aligned}$$

と新しい変数とするとき、方程式 (6) ~ (10) は ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$ として)

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x} (n u) = 0$$

$$(13) \quad u \frac{\partial}{\partial x} u = v B$$

$$(14) \quad u \frac{\partial}{\partial x} v = 1 - u B$$

$$(15) \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{A^2} n v$$

$$(16) \quad E_y = 1$$

境界条件 (11) は

$$(7) \quad \eta = 1, \quad u = 1, \quad v = 0, \quad B = 1 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

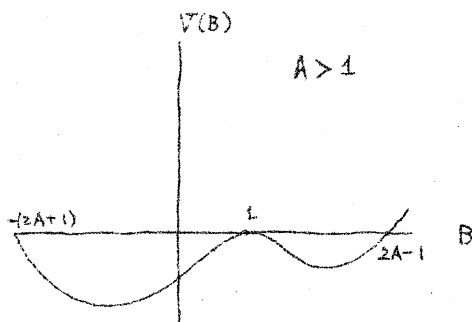
となる。方程式 (12) ~ (16) の積分は容易であつて、

$$(18) \quad u^2 \left(\frac{dB}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4A^2} (B-1)^2 \{ B + (2A+1) \} \{ B - (2A-1) \} = 0$$

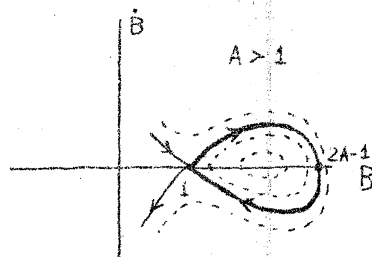
を得る。あるいは (18) を書きかえて、

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{B}^2 + V(B) = 0 \\ V(B) = \frac{1}{4A^2} (B-1)^2 \{ B + (2A+1) \} \{ B - (2A-1) \} \\ \dot{B} = u \frac{dB}{dx} \end{cases}$$

を得る。(19) は potential $V(B)$ の中で動く粒子の運動と同じ意味を持つて
いる。 $V(B)$ は下図のように変化する。あるいは (B, \dot{B}) の位相平面上で解



を調べば下右図の如くになる。



実線で示したものはいわゆる solitary wave に対応し、それ以外か
こまわした内部の実線群は非調和周期解に相当している。此は図で断つて
あるが $A > 1$ の場合に限つてある。 $A < 1$ ならば $V(B)$ のグラフは
上図とは全く異つて $B=1$ のところで極小をもちよる 4 次曲線になるの
で解としては周期解に相当するものしか存在しない。(此処で周期解とい
うのは $B=1$ で $\dot{B} \neq 0$ のものに对应してあり、 $B=1$ で $\dot{B} = 0$ のものは
solitary wave になつてゐる。) A が大きくなると図から判るようには B の
最大値 (= 振幅) は小さくても大きくなつて、

$$(20) \quad B_{\max} = 2A - 1$$

で与えられる。一方 (13) に $m \varepsilon$ を加え、(12), (15) を用いて

$$u = 1 + \frac{1}{2A^2} (1 - B^2)$$

を得る。ここで B_{\max} に相当する u の値を求めると、

$$(21) \quad u_{\min} = \frac{2-A}{A}$$

を得る。逆流がなくなる条件、 $u_{\min} > 0$ 、を示すと A について制限が得られる、

$$1 \leq A \leq 2$$

が得られる。これが solitary wave が存在する条件である。 $A \geq 2$ のときは話は複雑になる。 §3 では此の solitary wave の重要性が述べられる。

§3. 小振幅超音波

ここで、有限であるが小振幅の超音波の伝播の問題を考へる。

非定常問題を方程式 (6) ~ (10) により、(9) のまゝ、行うことは危ないであらう。

で、(6) ~ (10) に適当な展開を行つても、簡単な方程式に帰着してゆく。

方程式 (6) ~ (10) と上と同様に無次元化して、

$$(22) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n u) = 0$$

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u = \nu B$$

$$(24) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} v = E - u B$$

$$(25) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{A} n v$$

$$(26) \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

§2の議論で $A=1$ のときは定常 = constant 解が存在することが判ってゐる。 A が1に近いときはほぼ constant ではないが、その振幅は $(A-1)$ に比例してゐて、更にその空間的なひろがりも $\sqrt{A-1}$ に比例してゐる。波動伝播は、小振幅のときはほぼ線型の場合と似たふうになるまうと考へれば、分散式(3)から $\xi = (X-t)$, $\epsilon^3 t$ の scale transformation で線型方程式は不変にたもたれるので、此のような変換を行つておけば解は ϵ による展開で求めることかできると想像されよう。そこで

(27)

$$A^2 = 1 + \epsilon^2$$

として

$$\xi = \epsilon(X-t)$$

$$\tau = \epsilon^3 t$$

$$n = 1 + \epsilon^2 n'' + \epsilon^4 n^{(4)} + \dots$$

(28)

$$u = \epsilon^2 u'' + \epsilon^4 u^{(4)} + \dots$$

$$v = \epsilon^2 v'' + \epsilon^4 v^{(4)} + \dots$$

$$B = 1 + \epsilon^2 B'' + \epsilon^4 B^{(4)} + \dots$$

$$E_y = \epsilon^2 E_y'' + \epsilon^4 E_y^{(4)} + \dots$$

と展開して(22) ~ (26) に代入すると、1st order の量に於ては、

(29)

$$n'' = u'' = B'' = E_y''$$

$$v'' = -n''$$

なる関係を得て、更に n'' の方程式として

(30)

$$2n'' + n''_{\xi\xi} + 3n''n''_{\xi\xi} + n''_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

を得る。此は適当に変換を施せば

(31)

$$y_{\tau} + y y_{\xi} + \delta^2 y_{\xi\xi\xi} = 0$$

という方程式になる。これは Kortweg-de Vries 方程式と呼ばれ、Kruskal-Zabusky によつて、数値計算を用いてかなり詳しく調べられている。

(31) は定常解として solitary wave solution をもつことが知られている。その explicit 形式は

$$(32) \quad \begin{cases} \eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2((x-y_0 t)/\Delta) \\ \Delta^2 = 12\delta^2/\eta_0 \end{cases}$$

となる。(32) から判るよりに振幅の異なる 2 つの solitary wave は異なる速度で伝わってゆく。したがつて、振幅の異なる 2 つの solitary wave を初期値として与えるときそれらの散乱問題を与えることができた。このさいに数値計算を用いて、2 個の異なる solitary wave を交分け合して与えてみると、2 個の solitary wave の間の非線型相互作用の問題を扱った。これは Kruskal-Zabusky によつてなされ、その結果相互作用の充分後では、初期値として与えた solitary wave と全く同じ形のものが再びあらわれることが示された。通常、非線型効果がよく判る場合には、Fourier 成分の高調波成分がますます励起されだんだんと波形はくずれてゆくことが信じられている。しかし (31) のような型の方程式ではある程度波形がくずれると再びもとと同じ状態に戻るといふ奇妙な性質があらわれる。不幸にして (31) は analytic に追跡することは未だ行われてはなないので、それが如何なる理由によるものかは判つていない。しかし初期値として 2 つの solitary wave 以外のものを与えたとき (例えば正弦波) でも、同じような性質は観察された。一つの正弦波は非線型項により除々にその形を変えてゆき、その勾配が急になるたところから次々に solitary wave をつくりだして、有限時間後には有限個の solitary wave の組に分解され

てしまう。そして一度 *solitary wave* ができると、それらは互いの谷た
よりに重なり合うところでは波形は着しく変化するがその後では最初と全
く同じ *solitary wave* に分れて、このように散乱をつまづきとくりかえ
してゆく。この数値計算によるあざむき性質は、*nonlinear*
dispersive system では *solitary wave* が何か基本的な波動としての
意味をもっていることを示しているのかもしれない。

このことは衝撃波の問題でも見られる。Riemann 問題に対する解
を数値的に求めると、やはり衝撃波の波面のところでは *solitary wave* が
つくられ、 $\delta \rightarrow 0$ の極限ではあたかも衝撃波の波面は2つ存在するかの
ふうに見える。この2つの波面の間では解は急激に振動しているのである。
このような衝撃波の構造は通常の微小粘性の衝撃波では決して予測されな
いものであった。この衝撃波の構造は、(31)の型の方程式に限らず、他
の *nonlinear dispersive wave* についても見られることが §4 で示さ
れる。

§4 Dispersive Limit は如何なる解を示さるか。

方程式 (31) の解の $\delta \rightarrow 0$ の極限はどのようなものかを示すかは非常に興
味がある。よく知られているように双曲型方程式

$$(33) \quad y_t + y y_x = 0$$

の解は、初期値が $t=0$ で与えられる連続な関数であっても有限時間後には解は不連続
となりそれ以後は解の意味をもたなくなってしまう。しかし方程式 (33) と何ら
かの意味でみれば、不連続解も解として認めるようにしてあげれば (33) の
weak solution の解も含めて解の存在、一意性についても議論を行なうこと

が可能となる。物理的にはこの拡張は、多くの人によって調べられたように、粘性効果が非常に小さいときの極限 (dissipative limit) として与えることができる。つまり

$$(34) \quad y_t + y y_x = \nu y_{xx}$$

という方程式 (Burgers Equation) の解で $\nu \rightarrow 0$ の極限で (33) の解を与えるという立場である。幸いことに方程式 (34) の解は解析的に求めることができ、その極限についてもいろいろと調べられしてきた。しかし、その場合にはすべての物理系には何かある散逸効果が存在しているというところが議論の背景にある。じつは巨視的な変化を与える場合にはこの立場は正しいかもしれないが、もし分散効果も共存して、更にここで与えてきたように散逸効果が分散効果にくらべて小さいような場合には極限のとり方は大そう危かくなる。おそらく分散効果と芝を0にして散逸効果を後で0にするような場合には極限は dissipative limit と変りはない。しかし芝に散逸効果を0にして分散効果を後で0にするような極限を与えるときの場合には話は全く異なってくる。この事情は以下の部分で Riemann 問題に対する数値解のふるまいによって予測することができる。通常の dissipative limit では此は不連続面がたどって (この不連続面は衝撃波面の前後の異なる constant state をおまむびつける) 存在するにすぎないが、dispersive limit では不連続面は2つ存在して、その間では非常に激しく振動している。じつはこれのふるまいを (31) の方程式と少し異なるモデルでしらべてみる事ができる。モデル方程式を

$$(35) \quad \begin{aligned} n_t + (nu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x &= \epsilon^2 \left(\frac{2}{\sqrt{n}} (\sqrt{n})_{xx} \right)_x \end{aligned}$$

とすれば、この方程式は analytic にとけて、しかも散逸効果は全く存在せず、高階微分は分散効果しか与えないことが判る。この方程式と Burgers Equation は (35) と

$$y = u - i\epsilon (\log n)_x$$

とすれば

$$(36) \quad y_t + yy_x = i\epsilon y_{xx}$$

となることから密接な関係にあることが知られる。すなわち (34) での代りに $i\epsilon$ とおいたものが (36) であり、(35) は (36) と必ず結びつけられている。したがって (34) が analytic に扱え得るならば、(35) も全く同様に扱え得るのである。ゆえに (34) は適当な変換で分散係数 ν を $i\epsilon$ に分散方程式に帰着されるが、(36) はやはり同じような操作で Schrödinger 方程式になるであろう。このようにして、analytic にとり扱え得る非線型分散波動のモデル方程式をつくることができる。

しかしながら、不幸にして (35) は solitary wave の型の定常解は持っていない。たゞ (35) は非調和周期解と定常解として持つだけである。そのため solitary wave の生成、それらの相互作用をしるべきことはできないが、Riemann 問題についての limit の問題にこたえることは可能である。ゆえに (35) を用いてしるべると、衝撃波の連続面は2つ存在することが判る。そしてその間では解ははげしく振動してあり、数値計算からの予測を完全にうらがきしている。しかも面白いことに、(35) と (36) と

をすべりて

$$(37) \quad y_t + y y_x = (\nu + i\epsilon) y_{xx}$$

の解の極限をしようとするに ν/ϵ の比を一定にして $|\nu + i\epsilon| \rightarrow 0$ に近づける極限では $\nu/\epsilon \neq 0$ ならば極限は常に *dissipative limit* となるということがある。 $\nu/\epsilon = 0$ のときのみその極限は全く異なったふるまいをする。このように示せるならば、非線形効果で波面の勾配が急になつてきた場合には衝突の影響をわづかでも示さなくてはならないことは重要なのかも知れないことを意味するように思われる。

しかし、この *nonlinear dispersive wave* についてはその研究は未だ始められたばかりであり、多くの問題がまだ未解決のまま残っていることを注意して最後に文献表をあてておく。

§5. 文献

§1で述べた plasma 中の波動の分散式については

1) T.H. Stix : *The Theory of Plasma Waves* (McGraw-Hill Book Co.) 1962.

イオン音波の非線形性については、

2) S.S. Moiseev and R.Z. Sagdeev : *J nuclear Energy Part C* 5 (1963) 43

3) A.A. Vedenov, E.P. Velikhov and R.Z. Sagdeev : *Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg* (1961)

4) N. Yajima, T. Tamintti and A. Outi : *Journal of Phys Soc. Japan* 21 (1966)

757

5) H. Washimi and T. Tamintti : *Phys Rev. Letters* 17 (1966) 996

非線型 MHD 波に³ 112 は

- 6) Adam and J.E. Allen : *Phil. mag.* 3 (1958) 448
- 7) A. Baños and A.R. Vernon : *Nuovo. Cimento* 15 (1960) 269
- 8) L. Davis, R. Lüst and A. Schlüter : *Z. Naturforsch.* 13a (1958) 916
- 9) C.S. Gardner and G.K. Morikawa : *New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., Res. Rep. TID-6184* (1960)
- 10) C.S. Gardner and G.K. Morikawa : *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, (1965) 35.

斜め伝播する MHD 波は

- 11) Yu. A. Berezin and V. I. Korpmann ; *Sov. Phys. J.E.T.P.* 19 (1964) 1265
- 有限 Larmor 半径の効果は
- 12) N. Yajima : *Prog. Theor. Phys.* 36, (1966) 1.

Kortweg-de Vries 方程式に³ 112 は,

- 13) J.B. Keller, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1 (1948) 323.
- 14) Kortweg D.J., and G. de Vries ; *Phil. Mag.* 39 (1895) 422.
- 15) H.J. Zabusky and M.D. Kruskal *Phys. Rev. Letters* 15 (1965) 240.

Burgers 方程式に³ 112 は,

- 16) E. Hopf ; *Comm. Pure Appl. Math.*; 3 (1950) 201

Dispersive limit に³ 112 は

- 17) N. Yajima, A. Culi and T. Taniuti ; *Prog. Theor. Phys.* 35 (1966) 1142.

Dispersive System の漸近的存在³ 112 は

- 18) G.B. Whitham ; *Proc. Roy. Soc.* 283A (1965) 238
- 19) J.C. Luke ; *Proc. Roy. Soc.* (1966)
- 20) G.B. Whitham ; *J. Fluid Mech.* 22, 273