数理解析研究所講究録
第 25 巻 1967 年 53-79

Random Combined Fractional Factorial Design に関する注意

日大 生産工　宮川 強

§0. はじめに

G. Taguchi (1), K. Takeuchi (2) が所謂 Random Combined Fractional Factorial Design (RACOFFD)なるものを提唱している。これは今 $p+q$ 個の因子 $A_1, A_2, \cdots, A_p, B_1, B_2, \cdots, B_q$ があり、これらが各々2水準であり、交互作用なしとする。今全体で n 個の実験で、これらの因子効果を検定したい場合 今 $p+q > n-1$ であれば、普通の方法ではできない。そこで水準2の $n \times t$ (但し $p, q < t$) 直交配列表が存在するならば、因子 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ については直交配列表より無作為に選んだ p 列にわりつけるのであるが、その場合直交配列表の行の方も、取り出した p 列分だけ無作為に置換し、そこに n 個の実験をわりつけるとする。次に因子 $B_1, B_2, \cdots, B_q$ を選び、直交配列表より、さきの p 列とは独立に(一部分重なる可能性はあるが) q 列を無作為に選び、その時選びだした q 分の n 個の行も、さきの n 個の行の無作為とは独立に置換し、そこに又 n 個の実験をわりつける。これが所謂 RACOFFD Method である。n が特に2の巾の場合で $t=n-1$ の場合が常識的な場合であるが本稿では必ずしもこれに限ら

ず一応一般的に取扱う。この場合取扱うモデルは

$$\underline{y} = \underline{1}_n \mu + \Xi \underline{\alpha} + H \underline{\beta} + \underline{e} \tag{0.1}$$

である。(記号はほとんど K. Takeuchi [2] と同様であるから、くわしくは参照されたい。)

ここで $\underline{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ は $(n \times 1)$ の観測ベクトルであり、μ は一般平均 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)'$ は $(p \times 1)$ 因子 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ に対応する処理効果ベクトル同様に $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q)'$ も $(q \times 1)$ の因子 $B_1, B_2, \cdots, B_q$ に対応する処理効果ベクトル、又 $\underline{1}_n = (1, 1, \cdots, 1)'$ は $(n \times 1)$ の要素がすべて 1 のベクトル、もとの直交配列表が要素がすべて $+1, -1$ よりなるとし、Ξ 及び H が各々 $(n \times p)$, $(n \times q)$ 行列で、直交配列表より既述の方法で選ばれたものとする。従って Ξ, H は互に独立である。又 $\underline{e} = (e_1, e_n, \cdots, e_n)'$ は $(n \times 1)$ の誤差ベクトルで $\underline{e}$ は $N(\underline{0}, \sigma^2 I_n)$ に従うものとする。但し σ^2 は未知とする。

本稿の目的は帰無仮説が $\underline{\alpha} = \underline{0}$ で $\underline{\beta}$ は未知、しかも $\underline{\beta} \neq \underline{0}$ なる場合 ($\underline{\beta} = \underline{0}$ なる場合は明らか。) このとき統計量

$$F_A \equiv \frac{V(A)}{V(\bar{A})} \tag{0.2}$$

但し

$$\left.\begin{aligned} V(A) &\equiv \frac{1}{p} \underline{y}' \left(\frac{1}{n} \Xi \Xi' \right) \underline{y} \\ V(\bar{A}) &\equiv \frac{1}{n-p-1} \underline{y}' \left(I_n - \frac{1}{n} \underline{1}_n \underline{1}_n' - \frac{1}{n} \Xi \Xi' \right) \underline{y} \end{aligned}\right\} \tag{0.3}$$

が　(i)　n が充分大であること

　　(ii)　$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ にある種の一様性があること

以上の2条件が満足されていれば、普通の自由度 $(p, n-p-1)$ を持つ F −

統計量と近似的に見做してもさしつかえないことを示す。又、その計算過程で K. Takeuchi [2]の結果を若干修正する。

§1. 帰無仮説 $\underline{\alpha}=\underline{0}$ 下で Ξ, H が各々固定されている場合の F_A の分布について。

今 F_Aについては

$$F_A = \frac{V(A)}{V(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{p}\underline{y}'\left(\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)\underline{y}}{\frac{1}{n-p-1}\underline{y}'\left(I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n'-\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)\underline{y}} \qquad (1.1)$$

であるが、$\frac{1}{n}\Xi\Xi'$, $I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n'-\frac{1}{n}\Xi\Xi'$ は各々巾等行列であり、且つ直交している。又

$$tr\left(\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)=p, \qquad tr\left(I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n-\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)=n-p-1 \qquad (1.2)$$

なることを考慮に入れれば

$$H_0:\ \underline{\alpha}=\underline{0},\quad \underline{\beta}=\underline{\beta}\neq\underline{0} \qquad (\underline{\beta}\text{は未知})$$

の下では

$$p\cdot V(A) = \underline{y}'\left(\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)\underline{y} = (\underline{e}+H\underline{\beta})'\left(\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)(\underline{e}+H\underline{\beta}) \qquad (1.3)$$

は偏心率 $\lambda_1\equiv\frac{\theta_1}{\sigma^2}$, $\theta_1\equiv\underline{\beta}'H'\left(\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)H\underline{\beta}$ を持つ自由度 p の非心 χ^2-分布に従う。又同様に H_0 の下では

$$(n-p-1)\cdot V(\bar{A}) = \underline{y}'\left(I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n'-\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)\underline{y}$$
$$=(\underline{e}+H\underline{\beta})'\left(I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n'-\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)(\underline{e}+H\underline{\beta}) \qquad (1.4)$$

は偏心率 $\lambda_2\equiv\frac{\theta_2}{\sigma^2}$, $\theta_2=\underline{\beta}H\left(I_n-\frac{1}{n}\underline{1}_n\underline{1}_n'-\frac{1}{n}\Xi\Xi'\right)H\underline{\beta}$ を持つ自由度

$(n-p-1)$ の非心 χ^2 分布に従う。

しかも $p\cdot V(A)$ と $(n-p-1)V(\bar{A})$ は Ξ, H を固定すれば独立である。([3] 参照)

Ξ, H を固定した場合の F_A の条件付確率分布の確率要素は

$$e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{\mu}}{\mu!}\frac{\lambda_2^{\nu}}{\nu!}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+\mu+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{\frac{p}{2}+\mu-1}$$

$$\times\left(1+\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{-\left(\frac{n-1}{2}+\mu+\nu\right)} d\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)$$

これを書きなおして

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(1+\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{-\frac{n-1}{2}} d\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)$$

$$\times e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^{\ell}}{\ell!}\left(1+\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{-\ell}\sum_{\mu+\nu=\ell}\frac{\ell!}{\mu!\,\nu!}\lambda^{\mu}(1-\lambda)^{\nu}\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{\mu}$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+\ell\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}+\nu\right)} \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

但し　$\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\dfrac{\theta_1}{n\beta'\beta}=\dfrac{1}{n^2\beta'\beta}\beta'H'\Xi\Xi'H\beta$

(1.5) は Ξ, H を固定している場合の F_A の分布関数の確率要素であるが、p 個の因子を直交配列表の p 列に無作為にわりつけ、又直交配列表の n 個の行も無作為に置換されるときは Ξ は確率変数のマトリックスとなり同様に H も Ξ と独立な確率変数のマトリックスとなる、従って λ は確率変数となる従って、Ξ, H を固定しない場合の F_A の分布を λ なる確率変数に関して積分した周辺分布としてとらえようというわけである。

§2. 確率変数λの $E(\lambda)$, $E(\lambda^2)$ を出すための準備

今 $\Xi_0 (=H_0)$ は $(n\times t)$ 行列で、しかも要素は $+1$, -1 のみよりなる直交行列とし、この行列は固定しているものと考える。(直交の意味は各列が互に直交しているの意味であり、各列の列和はいつも 0 と考える)

S_{σ^*} は $(n\times n)$ 行列で要素は $1, 0$ よりなる置換行列、

S_σ は $(t\times t)$ 行列で要素は $1, 0$ よりなる置換行列、

L_p は $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \\ & 0 & \end{bmatrix}$ なる $(t\times p)$ 行列.

Ξ は所謂 §0. で考えた $(n\times p)$ 無作為直交行列で要素は $+1, -1$ より成る。

H も同じく $(n\times g)$ の無作為直交行列で要素は $+1, -1$ より成る。ここで §0. で考えた Ξ, H は次の様に定式化される。即ち

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= S_{\sigma_1^*}\Xi_0 S_{\sigma_1} L_p \\ H &= S_{\sigma_2^*}\Xi_0 S_{\sigma_2} L_p \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

ここで置換 $\sigma_1, \sigma_1^*, \sigma_2, \sigma_2^*$ は互に全部独立である。又

$$\left.\begin{aligned} &\Xi = \|\xi_{ij}\|, \quad S_{\sigma^*} = \|\Delta_{ij}^*\|, \quad S_\sigma = \|\Delta_{ij}\| \\ &H = \|\eta_{ij}\|, \quad L_p = \|l_{ij}\| \\ &\qquad \text{但しこの } l_{ij} \text{ については} \\ &\qquad\qquad l_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & (1\le j\le p) \\ 0 & (p+1\le j\le t) \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

正確には $S_{\sigma_1^*}$ S_{σ_1} 等と記すべきであるが、実際には Ξ のみ、H のみと分離して考えるから略して S_{σ^*}, S_σ 等の様に記す。

以上の様な定式化で計算すれば、下記の性質 1°) ～ 8°) を得る。

1°) $E(\xi_{ij})=0$ (2.3)

2°) $E(\xi_{ik}\xi_{jk})=\dfrac{1}{n-1}$ $(i\neq j)$ (2.4)

3°) $E(\xi_{ik}\xi_{jl})=0$ ($k\neq l$, i と j の相互関係は何でもよい。) (2.5)

4°)

$$E(\xi_{ik}\xi_{jk}\xi_{kk}\xi_{lk})=\begin{cases}1 & (\text{例えば } i=j\neq k=l,\ \text{又は } i=j=k=l)\\ -\dfrac{1}{n-1} & (\text{例えば } i=j\overset{\neq k}{\underset{\neq l}{}},\ \text{又は } i=j=k\neq l)\\ \dfrac{3}{(n-1)(n-3)} & (i,j,k,l\ \text{がすべて互に異なるとき})\end{cases}$$

..... (2.6)

5°)

$$E(\xi_{ik}\xi_{jk}\xi_{km}\xi_{lm})\quad(k\neq m)$$

$$=\begin{cases}1 & (i=j,\ k=l\ \text{のとき})\\ -\dfrac{1}{n-1} & (i=j,\ k\neq l\ \text{のとき、又は } k=l\ i\neq j\ \text{のとき})\\ -\dfrac{1}{n-1} & (i=k\neq j=l\ \text{のとき、又は } i=l\neq j=k\ \text{のとき})\\ \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} & \left(\begin{array}{l} i=k\text{ か } i=l\text{ か } j=k\text{ か } j=l\text{ で他の2つ}\\ \text{のものは異なる、例えば } i=k\text{ のときは } i=k\overset{\neq j}{\underset{\neq l}{}}\end{array}\right)\\ \dfrac{n-6}{(n-1)(n-2)(n-3)} & (i,j,k,l\ \text{がすべて互に相異なるとき})\end{cases}$$

..... (2.7)

6°)

$$E(\xi_{ki}\xi_{kj}\xi_{kl}\xi_{km})=\begin{cases}1 & (\text{例えば } i=j=l=m,\ \text{又は } i=j\neq l=m)\\ 0 & (\text{例えば } i=j\overset{\neq l}{\underset{\neq m}{}}\ \text{又は } i=j=l\neq m)\\ \dfrac{1}{N} & (i,j,l,m\ \text{がすべて互に相異なるとき})\end{cases}$$

..... (2.8)

但し $\dfrac{1}{N}\equiv\dfrac{1}{nt(t-1)(t-2)(t-3)}\left[\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=0}^{t}\xi^\circ_{a_1b_1}\right)^4-(3t-2)\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1b_1}\right)^2\right]$

特に $t=n-1$ のとき $\frac{1}{N}=\frac{1}{n-3}$

以上 i, j, k, l の関係で分類した。ここで性質 4°) 性質 6°) は i, j, k, l の特殊な一組で分類してあるが、i, j, k, l を入れかえたものについても成立する。ここで注意したいのは性質 6°) は K. Takeuchi の結果を若干修正したことである。(性質6°) の i, j, l, m がすべて互に異なる場合 K. Takeuchi の結果を修正した)

以上の計算はすべて似た様なものであるが、例えばすこし複雑な

a) 5°) で i, j, k, l がすべて互に相異なるとき

b) 6°) で i, j, k, l がすべて互に相異なるとき

を計算してみよう。

a)の計算

$$\Xi = S_{a^*}\,\Xi_0\,S_a\,L_p$$

であるから

$$\xi_{ij}=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{t}\sum_{c=1}^{t} s_{ia}^{*}\,\xi_{ab}^{\circ}\,s_{bc}\,l_{cj} = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{t} s_{ia}^{*}\,\xi_{ab}^{\circ}\,s_{bj}$$

即ち

$$\xi_{ik}=\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1=1}^{t} s_{ia_1}^{*}\,\xi_{a_1b_1}^{\circ}\,s_{b_1k}, \qquad \xi_{jk}=\sum_{a_2=1}^{n}\sum_{b_2=1}^{t} s_{ja_2}^{*}\,\xi_{a_2b_2}^{\circ}\,s_{b_2k}$$

$$\xi_{km}=\sum_{a_3=1}^{n}\sum_{b_3=1}^{t} s_{ka_3}^{*}\,\xi_{a_3b_3}^{\circ}\,s_{b_3m}, \qquad \xi_{lm}=\sum_{a_4=1}^{n}\sum_{b_4=1}^{t} s_{la_4}^{*}\,\xi_{a_4b_4}^{\circ}\,s_{b_4m}$$

故に

$$\xi_{ik}\,\xi_{jk}\,\xi_{km}\,\xi_{lm}=\sum_{a_1,a_2,a_3,a_4}^{n}\ \sum_{b_1,b_2,b_3,b_4}^{t}\left(\xi_{a_1b_1}^{\circ}\,\xi_{a_2b_2}^{\circ}\,\xi_{a_3b_3}^{\circ}\,\xi_{a_4b_4}^{\circ}\right)$$

$$\times\left(s_{ia_1}^{*}\,s_{ja_2}^{*}\,s_{ka_3}^{*}\,s_{la_4}^{*}\right)\left(s_{b_1k}\,s_{b_2k}\,s_{b_3m}\,s_{b_4m}\right)$$

故に

$$E(\xi_{ik}\,\xi_{jk}\,\xi_{km}\,\xi_{lm}) = \sum_{a_1,a_2,a_3,a_4}^{n}\ \sum_{b_1,b_2,b_3,b_4}^{t} (\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_2}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_4b_4})$$

$$\times E(\delta^*_{ia_1}\,\delta^*_{ja_2}\,\delta^*_{ka_3}\,\delta^*_{la_4}) \times E(\delta_{b_1k}\,\delta_{b_2k}\,\delta_{b_3m}\,\delta_{b_4m})$$

ここで

$$E(\delta^*_{ia_1}\,\delta^*_{ja_2}\,\delta^*_{ka_3}\,\delta^*_{la_4}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} & a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ が互に全部異なるとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$E(\delta_{b_1k}\,\delta_{b_2k}\,\delta_{b_3m}\,\delta_{b_4m}) = \begin{cases} \dfrac{1}{t(t-1)} & b_1 = b_2 \neq b_3 = b_4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を考慮に入れれば、(以下特に明記しないかぎり $\sum$ の下の記号 $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ は a_1, a_2, a_3, a_4 が互に全部異なることを意味し、又 $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ 等は a_1, a_2, a_3 等が互に全部異なることを意味すると約束する。)

$$E(\xi_{ik}\,\xi_{jk}\,\xi_{km}\,\xi_{lm}) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)t(t-1)} \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_4b_3}$$

$$= -\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)t(t-1)} \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2 \neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3}\,(\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} + \overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3} + \overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3})$$

$$(*1)$$

$$= -\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)t(t-1)} \Bigg\{ \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2 \neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\,\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3}$$

$$+\underbrace{\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2\neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3}}^{(*2)} + \overbrace{\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2\neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}{}^{2}_{a_3b_3}}^{(*3)} \Bigg\}$$

(＊1) について

$$\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2\neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3} = -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\left(\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}+\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3}\right)$$

$$= -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1} - \sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3} = 2nt(t-1)$$

ここで

$$\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1} = -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1}} \overset{\circ}{\xi}{}^{2}_{a_1b_1} = -nt(t-1)$$

同様に

$$\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3} = -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\left(\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}\right)$$

$$= -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1}} 1 = -nt(t-1)$$

を利用した。

(＊2) について

$$\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2\neq a_3}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3}\overset{\circ}{\xi}_{a_3b_3} = -\sum_{\substack{b_1\neq b_3\\ a_1\neq a_2}} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_1}\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3}\left(\overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3}+\overset{\circ}{\xi}_{a_2b_3}\right)$$

$$= -\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_1 b_3} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_3} - \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} = 2nt(t-1)$$

ここで

$$\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_1 b_3} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_3} = -\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_1 b_3} (\xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_1 b_3})$$

$$= -\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} 1 = -nt(t-1)$$

同様に

$$\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} = -\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} = -\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} 1 = -nt(t-1)$$

を利用した。

(＊3)について

$$\sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2 \neq a_3}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} \xi^{\circ 2}_{a_3 b_3} = \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2 \neq a_3}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_1} = (n-2) \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1 \neq a_2}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_2 b_1}$$

$$= -(n-2) \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} \xi^{\circ}_{a_1 b_1} = -(n-2) \sum_{\substack{b_1 \neq b_3 \\ a_1}} 1 = -n(n-2)t(t-1)$$

故に(＊1), (＊2), (＊3) の結果を綜合すれば

$$E(\xi_{ih} \xi_{jh} \xi_{km} \xi_{lm}) = \frac{n-6}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

を得る。

b) の計算

$$\Xi = S_{\sigma^*} \Xi_{\circ} S_{\sigma} L_p$$

であるから

$$\xi_{ij} = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{t}\sum_{c=1}^{t} s_{ia}^{*}\xi_{ab}^{o} s_{bc} l_{cj} = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{t} s_{ia}^{*}\xi_{ab}^{o} s_{bj}$$

即ち

$$\xi_{ki} = \sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1=1}^{t} s_{ka_1}^{*}\xi_{a_1b_1}^{o} s_{b_1i}\ , \qquad \xi_{kj} = \sum_{a_2=1}^{n}\sum_{b_2=1}^{t} s_{ka_2}^{*}\xi_{a_2b_2}^{o} s_{b_2j}$$

$$\xi_{kl} = \sum_{a_3=1}^{n}\sum_{b_3=1}^{t} s_{ka_3}^{*}\xi_{a_3b_3}^{o} s_{b_3l}\ , \qquad \xi_{km} = \sum_{a_4=1}^{n}\sum_{b_4=1}^{t} s_{ka_4}^{*}\xi_{a_4b_4}^{o} s_{b_4m}$$

故に

$$\xi_{ki}\xi_{kj}\xi_{kl}\xi_{km} = \sum_{a_1,a_2,a_3,a_4}^{n}\ \sum_{b_1,b_2,b_3,b_4}^{t} (\xi_{a_1b_1}^{o}\xi_{a_2b_2}^{o}\xi_{a_3b_3}^{o}\xi_{a_4b_4}^{o})$$

$$\times (s_{ka_1}^{*} s_{ka_2}^{*} s_{ka_3}^{*} s_{ka_4}^{*})(s_{b_1i} s_{b_2j} s_{b_3l} s_{b_4m})$$

故に

$$E(\xi_{ki}\xi_{kj}\xi_{kl}\xi_{km}) = \sum_{a_1,a_2,a_3,a_4}^{n}\ \sum_{b_1,b_2,b_3,b_4}^{t} (\xi_{a_1b_1}^{o}\xi_{a_2b_2}^{o}\xi_{a_3b_3}^{o}\xi_{a_4b_4}^{o})$$

$$\times E(s_{ka_1}^{*} s_{ka_2}^{*} s_{ka_3}^{*} s_{ka_4}^{*}) \times E(s_{b_1i} s_{b_2j} s_{b_3l} s_{b_4m})$$

ここで

$$E(s_{ka_1}^{*} s_{ka_2}^{*} s_{ka_3}^{*} s_{ka_4}^{*}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$E(s_{b_1i} s_{b_2j} s_{b_3l} s_{b_4m}) = \begin{cases} \dfrac{1}{t(t-1)(t-2)(t-3)} & b_1, b_2, b_3, b_4 \text{ が互に全部異なるとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を考慮に入れれば

$$E(\xi_{ki}\xi_{kj}\xi_{kl}\xi_{km}) = \frac{1}{n\cdot t\,(t-1)(t-2)(t-3)} \sum_{a_1}^{n} \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4}$$

今ここで

$$\sum_{a_1=1}^{n} \left\{ \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4} \right\}$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n} \left(\sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3}^{t} \sum_{b_4}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4} - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}{}^2_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \right.$$

$$\left. - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}{}^2_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}{}^2_{a_1b_3} \right)$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n} \left(\sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3}^{t} \sum_{b_4}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4} - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \right.$$

$$\left. - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} - \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \right)$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n} \sum_{b_4=1}^{t} \sum_{b_1 \neq b_2 \neq b_3}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4}$$

$$= \sum_{b_4=1}^{t} \sum_{a_1=1}^{n} \left\{ \sum_{b_1 \neq b_2}^{t} \sum_{b_3=1}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_3} - \sum_{b_1 \neq b_2}^{t} \overset{\circ}{\xi}{}^2_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_2} \right.$$

$$\left. - \sum_{b_1 \neq b_2}^{t} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_1} \overset{\circ}{\xi}{}^2_{a_1b_2} \right\} \overset{\circ}{\xi}_{a_1b_4}$$

$$= \overset{(**1)}{\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1\neq b_2}^{t}\sum_{b_3=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_3}\xi^\circ_{a_1 b_4}} - \overset{(**2)}{\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1\neq b_2}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_4}}$$

$$- \overset{(**3)}{\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1\neq b_2}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_4}}$$

(＊＊1) について

$$\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1\neq b_2}^{t}\sum_{b_3=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_3}\xi^\circ_{a_1 b_4}$$

$$= \sum_{b_4=1}^{t}\sum_{b_3=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\left\{\sum_{b_1=1}^{t}\sum_{b_2=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_2} - \sum_{b_1=1}^{t} \xi^{\circ 2}_{a_1 b_1}\right\}\xi^\circ_{a_1 b_3}\xi^\circ_{a_1 b_4}$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1=1}^{t}\sum_{b_2=1}^{t}\sum_{b_3=1}^{t}\sum_{b_4=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_3}\xi^\circ_{a_1 b_4} - t\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_3=1}^{t}\sum_{b_4=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_3}\xi^\circ_{a_1 b_4}$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_1}\right)^4 - t\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_1}\right)^2$$

(＊＊2) について

$$\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1\neq b_2}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_4} = \sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\left\{\sum_{b_1=1}^{t}\sum_{b_2=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_2} - \sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_1}\right\}\xi^\circ_{a_1 b_4}$$

$$= t\sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_2=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_2}\xi^\circ_{a_1 b_4} - \sum_{b_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{b_1=1}^{t} \xi^\circ_{a_1 b_1}\xi^\circ_{a_1 b_4}$$

$$= t\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_2=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_2}\right)^2 - \sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_1}\right)^2 = (t-1)\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{b_1=1}^{t}\xi^\circ_{a_1 b_1}\right)^2$$

(＊＊3) について

(＊＊2) とまったく同じ方法で

$$\sum_{t_4=1}^{t}\sum_{a_1=1}^{n}\sum_{t_1 \neq t_2}^{t} \xi^{o}_{a_1 t_1}\,\xi^{o}_{a_1 t_4} = (t-1)\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^2$$

故に (＊＊1), (＊＊2), (＊＊3) を総合すれば

$$E(\xi_{ki}\,\xi_{kj}\,\xi_{kl}\,\xi_{km}) = \frac{1}{nt(t-1)(t-2)(t-3)}\left[\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^4 - (3t-2)\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^2\right]$$

を得る。

特に $t=n-1$ のとき

$$\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1} = -1 + n\delta_{a_1 1}$$ （Ξ_0 の第一行目がすべて 1 と考えても一般性は失はれないから）

従って

$$\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^2 = (-1+n\delta_{a_1,1})^2 = 1 - 2n\delta_{a_1,1} + n^2\delta_{a_1,1}$$

同様に

$$\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^4 = 1 - 4n\delta_{a_1,1} + 6n^2\delta_{a_1,1} - 4n^3\delta_{a_1,1} + n^4\delta_{a_1,1}$$

故に

$$\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^4 - (3t-2)\sum_{a_1=1}^{n}\left(\sum_{t_1=1}^{t}\xi^{o}_{a_1 t_1}\right)^2$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n}\left(1 - 4n\delta_{a_1,1} + 6n^2\delta_{a_1,1} - 4n^3\delta_{a_1,1} + n^4\delta_{a_1,1}\right)$$

$$-(3n-5)\sum_{a_1=1}^{n}\left(1 - 2n\delta_{a_1,1} + n^2\delta_{a_1,1}\right)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-4)$$

従って

$t = n-1$ なる特殊な場合は

$$E(\xi_{ki}\xi_{kj}\xi_{kl}\xi_{km}) = \frac{1}{n-3}$$ となる。

7°)

$$E(\Xi\Xi') = \frac{np}{n-1}\left[I_n - \frac{1}{n}\,\underline{1}_n\,\underline{1}_n'\right] \tag{2.9}$$

7°) の証明は略す.

8°) $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ は実対称な $(g\times g)$ の常数行列とするとき

$$E(H'\Xi\Xi'H\Pi H'\Xi\Xi'H)$$

$$= \frac{n^3 p}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Big[\left\{(n-1)(n-4)p+n^2-3n+4\right\}\Pi+\left\{(n-2)(n-p-1)\right\}\Big(\sum_l \pi_{l,l}\Big)I_g$$

$$-2(n-p-1)\Big\{2\Pi+\Big(\sum_{l=1}^{g}\pi_{l,l}\Big)I_g-2W\Big\}$$

$$-\frac{2(n-p-1)}{N}\Big\{2\Pi+\Big(\sum_l \pi_{l,l}-\sum_{l,m}\pi_{l,m}\Big)I_g-6W$$

$$+\Big(\sum_{l,m}\pi_{l,m}-\sum_l \pi_{l,l}\Big)\underline{1}_g\underline{1}_g'-2\Pi\,\underline{1}_g\underline{1}_g'-2\,\underline{1}_g\underline{1}_g'\Pi$$

$$+2\,\xi_\pi\,\underline{1}_g'+2\,\underline{1}_g\,\xi_\pi'+4Z_\Sigma\Big\}\Big] \tag{2.10}$$

但し

$$W \equiv \begin{Vmatrix} \pi_{11} & & & 0 \\ & \pi_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi_{gg} \end{Vmatrix},\quad Z_\Sigma \equiv \begin{Vmatrix} \sum_l \pi_{1,l} & & & 0 \\ & \sum_l \pi_{2,l} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum \pi_{g,l} \end{Vmatrix},\quad \xi_\pi \equiv \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{22} \\ \vdots \\ \pi_{gg} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

性質 6°) が K. Takeuchi の結果と若干異なるので当然性質 8°) は異なる。
(2.10)の右辺の最後の { } の部分が修正項と考えればよい。

8°) を証明する

$E_{\Xi,H}\left[H'\Xi\Xi'H\Pi H'\Xi\Xi'H\right]$ を計算する前に $E_{\Xi}\left[\Xi\Xi'X\Xi\Xi'\right]$ を計算する。

但し、$X\equiv\|x_{ij}\|\equiv H\Pi H'$ で $(n\times n)$ の Ξ に無関係な行列として考える。

又、$E_{\Xi}\left[\Xi\Xi'X\Xi\Xi'\right]\equiv\|e_{ij}\|$ とすると

$$e_{ij}=\sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{p}E(\xi_{ih}\xi_{kh}x_{kl}\xi_{lm}\xi_{jm})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}x_{kl}\sum_{h=1}^{p}\sum_{m=1}^{p}E(\xi_{ih}\xi_{kh}\xi_{lm}\xi_{jm})$$

今

$$w(i.j.k.l)\equiv\sum_{h=1}^{p}\sum_{m=1}^{p}E(\xi_{ih}\xi_{kh}\xi_{lm}\xi_{jm})$$

$$=\sum_{h=1}^{p}E(\xi_{ih}\xi_{kh}\xi_{lh}\xi_{jh})+\sum_{h\neq m}E(\xi_{ih}\xi_{kh}\xi_{lm}\xi_{jm})$$

性質 4°) 5°) を利用すれば

$i=j$ のとき

$$w(i.j.k.l)=\begin{cases}p^2\equiv A(p) & k=l=i=j \text{ のとき}\\ -\dfrac{p^2}{n-1}\equiv B(p) & \begin{matrix}i=j\\ \shortparallel\\ k\neq l\end{matrix} \text{ 又は } \begin{matrix}i=j\\ \shortparallel\\ l\neq k\end{matrix} \text{ のとき}\\ -\dfrac{p(p-1)}{n-1}+p\equiv C(p) & \begin{matrix}i=j\\ \nparallel\\ k=l\end{matrix} \text{ のとき}\\ \dfrac{2p(p-1)}{(n-1)(n-2)}-\dfrac{p}{n-1}\equiv D(p) & \begin{matrix}i=j\\ \nparallel\ \times\\ k\neq l\end{matrix} \text{ のとき}\end{cases}$$

$i \neq j$ のとき

$$
w(i,j,k,\ell) = \begin{cases}
A(p) & k = i \neq j = \ell \quad \text{のとき} \\
B(p) & k = i \neq j \neq \ell \quad \text{又は} \quad k \neq i \neq j = \ell \quad \text{のとき} \\
C(p) & \ell = i \neq j = k \quad \text{のとき} \\
D(p) & \underset{\substack{\neq\ \neq \\ k}}{\ell = i \neq j} \quad \text{又は} \quad \underset{\substack{\neq\ \neq \\ \ell}}{i \neq j = k} \quad \text{又は} \quad \underset{\substack{\neq\ \neq \\ \ell = k}}{i \neq j} \quad \text{のとき} \\
E(p) & i, j, k, \ell \quad \text{が互に全部異なるとき}
\end{cases}
$$

但し $$E(p) = \frac{(n-6)p(p-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{3p}{(n-1)(n-3)}$$

故に

$$
e_{ii} = A(p)x_{ii} + B(p)\left(\sum_{\ell(\neq i)} x_{i\ell} + \sum_{k(\neq i)} x_{ki}\right) + C(p)\sum_{k(\neq i)} x_{kk} + D(p)\sum_{\substack{k \neq \ell \\ k(\neq i),\ \ell(\neq i)}} x_{k\ell}
$$

同様に $i \neq j$ のとき

$$
e_{ij} = A(p)x_{ij} + C(p)x_{ji} + B(p)\left(\sum_{\ell(\neq j)} x_{i\ell} + \sum_{k(\neq i)} x_{kj}\right)
$$

$$
+ D(p)\left(\sum_{k(\neq i,j)} x_{ki} + \sum_{\ell(\neq i,j)} x_{j\ell} + \sum_{k(\neq i,j)} x_{kk}\right) + E(p)\sum_{\substack{k \neq \ell \\ k(\neq i,j) \\ \ell(\neq i,j)}} x_{k\ell}
$$

を得る。ここで

$$
\sum_{\ell} x_{i\ell} = 0, \qquad \sum_{k} x_{kj} = 0, \qquad x_{ij} = x_{ji}
$$

なることに注意すれば

$$e_{ii} = \{A(p) + 2D(p) - 3B(p) - C(p)\} x_{ii} + \{C(p) - D(p)\} \sum_k x_{kk}$$

$i \neq j$ のとき

$$e_{ij} = \{A(p) + C(p) + 2E(p) - 2B(p) - 2D(p)\} x_{ij}$$
$$-2\{D(p) - E(p)\}(x_{ii} + x_{jj}) + \{D(p) - E(p)\} \sum_k x_{kk}$$

故に

$$E_{\Xi}\left[\Xi\Xi' X \Xi\Xi'\right] = \|e_{ij}\|$$
$$= \{A(p) + C(p) + 2E(p) - 2B(p) - 2D(p)\} X - 2\{D(p) - E(p)\} \xi \mathbf{1}_n'$$
$$- 2\{D(p) - E(p)\} \mathbf{1}_n \xi' + \{D(p) - E(p)\}(tr X) \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n'$$
$$+ 2\{4D(p) - C(p) - 3E(p)\} Z + \{C(p) + E(p) - 2D(p)\}(tr X) I_n$$

---- (2.12)

但し

$$\xi \equiv \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}, \qquad Z \equiv \begin{Vmatrix} x_{11} & & & 0 \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (2.13)$$

ここで　$X = H\Pi H'$　を置きもどし　$E_{\Xi}\left[\Xi\Xi' X \Xi\Xi'\right]$　の左より　H'、右より　H　を乗じて H に関して平均する。このとき

$$\mathbf{1}_n' H = 0_{(1\times q)}, \qquad H' \mathbf{1}_n = 0_{(q\times 1)}$$

を注意すれば

$$E_{\Xi, H}\left[H'\Xi\Xi' H \Pi H \Xi\Xi' H\right] = E_H\left[H' E_{\Xi}(\Xi\Xi' H \Pi H \Xi\Xi') H\right]$$

$$=\{A(p)+C(p)+2E(p)-2B(p)-2D(p)\}E_H[H'H\Pi HH']$$

$$+2\{4D(p)-C(p)-3E(p)\}E_H[H'ZH]$$

$$+\{C(p)+E(p)-2D(p)\}E_H[tr(H\Pi H')H'H]$$

$$=n^2\{A(p)+C(p)+2E(p)-2B(p)-2D(p)\}\Pi$$

$$+2\{4D(p)-C(p)-3E(p)\}E_H[H'ZH]+n^2\{C(p)+E(p)-2D(p)\}(tr\Pi)I_g \quad \cdots\cdots (2.14)$$

ここで　$E_H[H'ZH]\equiv\|f_{ij}\|$　として　f_{ij}　を考えてみよう。

$$f_{ij}=E\left(\sum_{k=1}^{n}h_{ki}x_{kk}h_{kj}\right)=E\left[\sum_{k=1}^{n}h_{ki}\left(\sum_{l=1}^{g}\sum_{m=1}^{g}h_{kl}\Pi_{lm}h_{km}\right)h_{kj}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{g}\sum_{m=1}^{g}\Pi_{lm}E(h_{ki}h_{kl}h_{km}h_{kj}) \qquad (2.15)$$

ここで、次の事実に注意しよう。主として性質6)を利用すれば

$i=j$ のとき

$$E(h_{ki}h_{kj}h_{kl}h_{km})=\begin{cases}1 & i=j=l=m,\ 又は\ i=j\neq l=m\\ 0 & i=j\underset{m}{\neq}l,\ 又は\ i=j=l\neq m,\\ & 又は\ i=j=m\neq l\end{cases}$$

$i \neq j$ のとき

$$E(\varphi_{ki}\varphi_{kj}\varphi_{k\ell}\varphi_{km}) = \begin{cases} 1 & \ell = i \neq j = m,\ \text{又は}\ m = i \neq j = \ell\ \text{のとき} \\ 0 & \ell = \underset{\neq m \neq}{i \neq j},\ \text{又は}\ \ell = \underset{\neq m \neq}{j \neq i},\ \text{又は}\ \underset{\neq \ell \neq}{i \neq j} = m \\ & \text{又は}\ m = \underset{\neq \ell \neq}{i \neq j},\ \text{又は}\ \ell = m = i \neq j \\ & \text{又は}\ i \neq j = \ell = m\ \text{のとき。又}\ \ell = m,\ i \neq j\ \text{であってもよい。} \\ \frac{1}{N} & i, j, \ell, m\ \text{が互に全部異なるとき} \end{cases}$$

上記の性質を利用すれば

$$f_{ii} = n \sum_{\ell=1}^{g} \Pi_{\ell\ell} \qquad \cdots\cdots (2.16)$$

$i \neq j$ のとき

$$f_{ij} = n \sum_{\ell=1}^{g} \sum_{m=1}^{g} \Pi_{\ell m} E(\varphi_{ki}\varphi_{k\ell}\varphi_{km}\varphi_{kj})$$

$$= n \left\{ 2\Pi_{ij} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\ell \neq m \\ \ell (\neq i, j) \\ m (\neq i, j)}} \Pi_{\ell m} \right\}$$

$$= n \left\{ 2\Pi_{ij} + \frac{1}{N} \left(\sum_{\ell, m} \Pi_{\ell m} - \sum_{\ell=1}^{g} \Pi_{\ell\ell} - 2\sum_{\ell=1}^{g} \Pi_{\ell i} - 2\sum_{\ell=1}^{g} \Pi_{\ell j} \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\Pi_{ij} + 2\Pi_{ii} + 2\Pi_{jj} \right) \right\} \qquad \cdots\cdots (2.17)$$

故に

$$f_{ij} = \begin{cases} 2n\Pi_{ij} + \frac{n}{N}\Delta_1 & (i \neq j) \\ n\Delta_2 & (i = j) \end{cases} \qquad \cdots\cdots (2.18)$$

但し

$$\Delta_1 \equiv \sum_{l,m} \Pi_{l,m} - \sum_{l=1}^{g} \Pi_{ll} - 2\sum_{l=1}^{g} \Pi_{li} - 2\sum_{l=1}^{g} \Pi_{lj} + 2\Pi_{ij} + 2\Pi_{ii} + 2\Pi_{jj}$$

$$\Delta_2 \equiv \sum_{l=1}^{g} \Pi_{ll} \qquad (2.19)$$

ここで若干計算すれば

$$\|f_{ij}\| = n\Big[\frac{1}{N}\Big(\sum_{l,m}\Pi_{lm} - \sum_{l}\Pi_{ll}\Big)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n' - \frac{2}{N}\Pi\,\mathbf{1}_g\mathbf{1}_g' - \frac{2}{N}\mathbf{1}_g\mathbf{1}_g'\Pi$$

$$+ 2\Big(1+\frac{1}{N}\Big)\Pi + \frac{2}{N}\xi_\pi\mathbf{1}_g' + \frac{2}{N}\mathbf{1}_g\xi_\pi'$$

$$+\Big\{\Big(1+\frac{1}{N}\Big)\sum_{l}\Pi_{ll} - \frac{1}{N}\sum_{l,m}\Pi_{lm}\Big\}I_g + \frac{4}{N}Z_\xi - 2\Big(1+\frac{3}{N}\Big)W\Big]$$

$$\cdots\cdots (2.20)$$

を得る

$$E[H'\Xi\Xi'H\Pi H'\Xi\Xi'H]$$

$$= n^2\{A(p)+C(p)+2E(p)-2B(p)-2D(p)\}\Pi$$

$$+2\{4D(p)-C(p)-3E(p)\}\|f_{ij}\| + n^2\{C(p)+E(p)-2D(p)\}(tr\,\Pi)I_g$$

であった。ここで

Π の係数　$n^2\{A(p)+C(p)+2E(p)-2B(p)-2D(p)\}$

$$= \frac{n^3p}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left[(n-1)(1-4)p + n^2 - 3n + 4\right]$$

$\|f_{ij}\|$ の係数　$2\{4D(p)-C(p)-3E(p)\} = -\frac{2n^2p}{(n-1)(n-2)(n-3)}(n-p-1)$

$(tr\,\Pi)\, I_g$ の係数 $\quad n^2\{C(p)+E(p)-2D(p)\}$

$$= \frac{n^3 p}{(n-1)(n-2)(n-3)}(n-2)(n-p-1) = \frac{n^3 p}{(n-1)(n-3)}(n-p-1) \qquad \cdots\cdots (2.21)$$

を考慮に入れれば、

$$E[H'\Xi\Xi'H\Pi H'\Xi\Xi'H]$$

$$= \frac{n^3 p}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Bigl[\{(n-1)(n-4)p+n^2-3n+4\}\Pi + \{(n-2)(n-p-1)\}(t_r\Pi)I_g - \Bigl\{\frac{2(n-p-1)}{n}\Bigr\}\|f_{ij}\|\Bigr]$$

$$= \frac{n^3 p}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Bigl(\{(n-1)(n-4)p+n^2-3n-4\}\Pi + \{(n-2)(n-p-1)\}(t_r\Pi)I_g$$

$$-2(n-p-1)\Bigl\{2\Pi + \Bigl(\sum_{l=1}^{g}\Pi_{ll}\Bigr)I_g - 2W\Bigr\}$$

$$-\frac{2(n-p-1)}{N}\quad 2\Pi + \Bigl(\sum_{l}\Pi_{ll} - \sum_{l,m}\Pi_{lm}\Bigr)I_g - 6W$$

$$+\Bigl(\sum_{l,m}\Pi_{lm} - \sum_{l}\Pi_{ll}\Bigr)\underline{1}_g\underline{1}_g' - 2\Pi\underline{1}_g\underline{1}_g' - 2\underline{1}_g\underline{1}_g'\Pi$$

$$+2\underline{\varsigma}_\pi\underline{1}_g' + 2\underline{1}_g\underline{\varsigma}_\pi' + 4Z_\Sigma\Bigr)$$

を得る。

§3. 確率変数 λ の $E(\lambda)$, $E(\lambda^2)$ について

§1. (1.5) 既出の

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\theta_1}{n\beta'\beta} = \frac{1}{n^2\beta'\beta}\beta'H'\Xi\Xi'H\beta$$

の $E(\lambda)$, $E(\lambda^2)$ を求めてみよう。

$$E(\lambda) = \frac{1}{n^2\beta'\beta} E_{\Xi,H}\left[\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\right] \tag{3.1}$$

ここで §2. の性質 7°) 及び $H'H = nI_q$ を利用すれば

$$E_{\Xi,H}\left[\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\right] = \beta'E_H\left[H'E_{\Xi}(\Xi\Xi')H\right]\beta$$

$$= \beta'E_H\left[H'\frac{np}{n-1}(I_n - \frac{1}{n}1_n1_n')H\right]\beta$$

$$= \frac{np}{n-1}\beta'E_H(H'H)\beta = \frac{n^2p}{n-1}\beta'\beta$$

故に

$$E(\lambda) = \frac{p}{n-1} \tag{3.2}$$

を得る。又

$$E(\lambda^2) = \left(\frac{1}{n^2\beta'\beta}\right)^2 E\left[\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\right] \tag{3.3}$$

今 $E\left[\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\right]$ を求めるために §2. 性質 8°) にて $\Pi = \beta\beta'$ とし $E\left[H'\Xi\Xi'H\beta\beta'H'\Xi\Xi'H\right]$ の左より β', 右より β を乗じると

$$E\left[\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\beta'H'\Xi\Xi'H\beta\right]$$

$$= \frac{n^3p}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Bigg[\left\{(n^2-6n+12)p+2(n^2-6n+6)-\frac{6(n-p-1)}{N}\right\}\left(\sum\beta_i^2\right)^2$$

$$+4(n-p-1)(1+\frac{3}{N})(\sum\beta_i^4)+\frac{12(n-p-1)}{N}(\sum\beta_i^2)(\sum\beta_i)^2$$

$$-\frac{2(n-p-1)}{N}(\sum\beta_i)^4-\frac{16(n-p-1)}{N}(\sum\beta_i^3)(\sum\beta_i)\Big] \qquad (3.4)$$

となる。従って

$$E(\lambda^2)=\frac{p}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\Big\{(n^2-6n+12)p+2(n^2-6n+6)-\frac{6(n-p-1)}{N}$$

$$+4(n-p-1)(1+\frac{3}{N})\frac{\sum\beta_i^4}{(\sum\beta_i^2)^2}+\frac{12(n-p-1)}{N}\frac{(\sum\beta_i)^2}{\sum\beta_i^2}$$

$$-\frac{2(n-p-1)}{N}\frac{(\sum\beta_i)^4}{(\sum\beta_i^2)^2}-\frac{16(n-p-1)}{N}\frac{(\sum\beta_i^3)(\sum\beta_i)}{(\sum\beta_i^2)^2}\Big\}$$

$$\cdots\cdots(3.5)$$

§4. F_A-統計量の近似分布について

今確率変数λの分布を1次，2次の積率が見合う様に下記の確率要素をもつ Beta 分布であてはめてみよう。

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}t^{\frac{\mu}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu}{2}-1}\,dt \qquad (4.1)$$

ここでこの Beta 分布の平均及び分散は

$$\frac{\mu}{\mu+\nu}, \qquad \frac{2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2(\mu+\nu+2)} \qquad (4.2)$$

であり、λの分布をこの Beta 分布にあてはめると．

$$\frac{\mu}{\mu+\nu}=\frac{p}{n-1}\ ,\qquad \frac{2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2(\mu+\nu+2)}=E(\lambda^2)-\frac{p^2}{(n-1)^2}$$

ここで

$$\mu\equiv\phi\cdot p\ ,\qquad \nu\equiv\phi\cdot(n-p-1) \tag{4.3}$$

とすると

$$\phi=\frac{2p(n-p-1)}{(n-1)^3\ E(\lambda^2)-\frac{p^2}{(n-1)^2}}-\frac{2}{n-1} \tag{4.4}$$

となる。ここで

$$\frac{\left(\sum\beta_i\right)^4}{\left(\sum\beta_i^2\right)^2}=O(n)\ ,\qquad \frac{\left(\sum\beta_i^3\right)\left(\sum\beta_i\right)}{\left(\sum\beta_i^2\right)^2}=O(n) \tag{4.5}$$

であれば $O(n)$ は n の order として n と同程度以下を意味する。これはある意味で β についての一様性を意味するのであるが、n が十分大であれば p が小さくとも、或いは n と同程度の order であっても、

$$\phi=1+O\left(\tfrac{1}{n}\right) \tag{4.6}$$

となり、この様な条件下では確率変数 λ の近似分布として

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)}\ t^{\frac{p}{2}-1}(1-t)^{\frac{n-p-1}{2}-1}\ dt \tag{4.7}$$

なる確率要素をもつ Beta 分布を考えることができる。

従って、§1 (1.5) をこの (4.7) に関して平均をとることにより、即ち F_A の分布を確率変数 λ に関して積分した周辺分布を考えれば

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p-1}{2}\right)}\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(1+\frac{p}{n-p-1}F_A\right)^{-\frac{n-1}{2}}d\left(\frac{p}{n-p-1}F_A\right)$$

を得る。即ちこの周辺分布は普通の F^{p}_{n-p-1} に従っていることがわかる。

（附記）

$\frac{1}{N}$ の値は $t=n-1,\ n-2,\ n-3$ の様な時には具体的に n を用いて書き下せる。しかし実は明らかに $\left|\frac{1}{N}\right|\leq 1$ であり、n が十分大きいときは $\frac{1}{N}$ はきいてこない。又 Ξ と H とは直観的になるべく重ならないようにした方が検定の効果がありそうにみえるが、実は例えば H を先に無作為に決定し次に H となるべく重ならない様に（はなす様に）条件付で Ξ を無作為に決定しても結果は殆んど変らない。ただ具体的には $\frac{1}{N}$ の所が若干変わるだけである。この辺の事情は実はこの RACOFFD は $H,\ \Xi$ の行の方を無作為に置換しているところにそのカラクリがあると思われる。

参考文献

[1] G. Taguchi: "Jikken Keikaku-ho (Design of Experiments, Vol. 2)" Maruzen, 1958.

[2] K. Takeuchi: "On a special class of regression problems and its applications: random combinatorial fractional factorial designs", Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 7(No. 4), 1960.

[3] J. Ogawa: "On the independence of bilinear and quadratic forms of a random sample from a normal population", Ann. Inst. Stat. Math., 1, 1949.

[4] J. Ogawa: "On the null-distribution of a F-statistics in a randomized balanced incomplete block design under the Neyman Model", Ann. Math. Statist., 34 (No. 4), 1963.